

SÉRIE ARQUIMEDES

ANAIS DO I CONGRESSO TEMÁTICO  
DE DINÂMICA CONTROLE  
APLICAÇÕES

DINCON 2002  
29 de julho a 01 de agosto  
DCCE/IBILCE/UNESP

organização



Sel  
08  
05  
03

Coordenação Editorial: José Manoel Balthazar  
Editora: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada  
Co-Editora: FAPESP  
Formato: CDROM  
Patrocínio: FAPESP(processo: 2002/03048-0) e SBMAC

Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações  
: 2002 : São José do Rio Preto, SP)  
Anais do I Congresso Temático de Dinâmica, Controle e  
Aplicações. - São Carlos : SBMAC , 2002  
1275 p.; (SÉRIE ARQUIMEDES,1)

ISBN: 85-86883-05-0

1. Dinâmica. 2. Teoria do controle. 3. Teoria do controle  
não-linear. 4. Sistemas de parâmetros distribuídos. I.  
Balthazar, José Manoel. II. Boaventura, Maurílio. III.  
Silva, Geraldo Nunes. IV. Tsuchida, Masayoshi. V. Título.  
CDU - 531.124

DEDALUS - Acervo - EESC



31100042436



# Aplicação da Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle à Análise de Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência<sup>1</sup>

B844a

Newton G. Bretas<sup>2</sup>, Luís F. C. Alberto<sup>3</sup>, Departamento de Eng. Elétrica, Escola de Eng. de São Carlos, USP, 13566-590 São Carlos, SP, Brasil.

**Resumo.** Neste trabalho apresenta-se a teoria da extensão do Princípio de Invariância de LaSalle e algumas aplicações relacionadas com o estudo de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência. A extensão do Princípio de Invariância permite que a derivada da função auxiliar, comumente chamada de Função de Liapunov, seja positiva em algumas regiões limitadas do espaço de estados. Com isto, uma classe mais ampla de problemas pode ser estudada à luz desta teoria. Este é o caso das aplicações apresentadas neste trabalho. Estuda-se a estabilidade de sistemas elétricos de potência, que a princípio não poderiam ser estudados utilizando-se o Princípio de Invariância original, utilizando-se esta extensão.

## 1. Introdução

O Princípio de Invariância de LaSalle tem sido uma das ferramentas mais importantes para estudar o comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais. Este resultado foi primeiramente estabelecido e provado para equações diferenciais autônomas definidas em espaços de dimensão finita por LaSalle [5]. Depois disto, este resultado foi estendido para equações diferenciais definidas em espaços de dimensão infinita, ver Hale [3] e Slemrod [13] incluindo equações diferenciais funcionais, veja Hale e Lunel [4]. Este foi estendido para equações diferenciais não autônomas periódicas por LaSalle [6], quase-periódicas por Miller [8] e para equações diferenciais ordinárias mais gerais por Sell [12]. Rodrigues [9] obteve uma extensão para equações não autônomas retardadas e LaSalle [7] obteve uma extensão para equações de diferença.

A grande virtude do Princípio de Invariância de LaSalle é que ele fornece um meio de estudar a estabilidade de um sistema sem o conhecimento das soluções das equações diferenciais. Para isto, utiliza-se uma função auxiliar denominada *Função de Liapunov*. Ainda que o Princípio de Invariância de LaSalle venha sendo

<sup>1</sup>Este trabalho foi financiado pela FAPESP

<sup>2</sup>ngbretas@sel.eesc.sc.usp.br

<sup>3</sup>luis@sel.eesc.sc.usp.br

1309140  
200503

SYSNO	1309140
PROD	0001036
ACERVO EESC	

utilizado com sucesso em inúmeras aplicações, ele apresenta alguns problemas. Um dos principais é que ele não fornece nenhuma maneira sistemática de encontrar a Função de Liapunov. A condição mais restritiva para encontrar tal função é que se exige que a derivada da Função de Liapunov, ao longo das trajetórias do sistema, seja semi-definida negativa. Em sistemas complexos, tais como sistemas caóticos, dificilmente encontram-se Funções de Liapunov satisfazendo estas condições. Neste trabalho, propõe-se uma versão mais geral do Princípio de Invariância de LaSalle na qual não exige-se que a derivada da função auxiliar<sup>1</sup> seja sempre semi-definida negativa e além disso, admitem-se incertezas na determinação dos parâmetros do sistema.

A extensão do Princípio de Invariância de LaSalle proposta neste trabalho é apresentada em duas etapas. Na primeira etapa, descrita na seção 3., apresenta-se uma versão do Princípio de Invariância que permite que a derivada da Função de Liapunov ao longo das trajetórias seja positiva em algumas regiões limitadas. Na segunda etapa, descrita na seção 4., apresenta-se uma versão do Princípio de Invariância que, além de permitir que a derivada da função de Liapunov seja positiva em algumas regiões limitadas, contempla incertezas na determinação dos parâmetros. Esta extensão é útil para encontrar estimativas concretas de atratores e das áreas de atração de sistemas não-lineares uniformes com relação aos parâmetros do sistema. Em seguida apresentam-se aplicações desta extensão na análise de estabilidade transitória em sistemas elétricos de potência.

## 2. Princípio de Invariância de LaSalle

Antes de apresentarem-se os resultados obtidos neste trabalho, é interessante rever a versão original do Princípio de Invariância de LaSalle.

Seja para isto a equação diferencial autônoma:

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.1)$$

**Teorema 2..1** : *Sejam  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções de classe  $C^1$ . Seja  $L$  uma constante real tal que  $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$  seja limitado. Admita que  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \Omega_L$  e defina  $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\}$ . Seja  $B$  o maior conjunto invariante<sup>2</sup> contido em  $E$ . Então, toda solução de (2.1) iniciando em  $\Omega_L$  converge para  $B$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

Este teorema foi demonstrado pela primeira vez por LaSalle [5]. Maiores detalhes podem ser encontrados também em Brauer e Nohel [1].

A função  $V$  utilizada no Teorema 2..1 é conhecida por *Função de Liapunov*. Observe que o Teorema admite a existência desta função mas não diz nada a respeito de como encontrá-la. Em verdade, não existem métodos sistemáticos para encontrar

<sup>1</sup>Neste caso, denominaremos esta função auxiliar de Função de Liapunov Estendida com o intuito de distingui-la da Função de Liapunov no sentido mais usual.

<sup>2</sup>Um conjunto  $B \subset \mathbb{R}^n$  é invariante com relação a (2.1) se, para todo  $x_0 \in B$ , a solução  $\varphi(t, x_0) \in B$  para todo  $t \in \mathbb{R}$

uma Função de Liapunov e encontrá-la é, sem sombra de dúvida, uma tarefa não trivial.

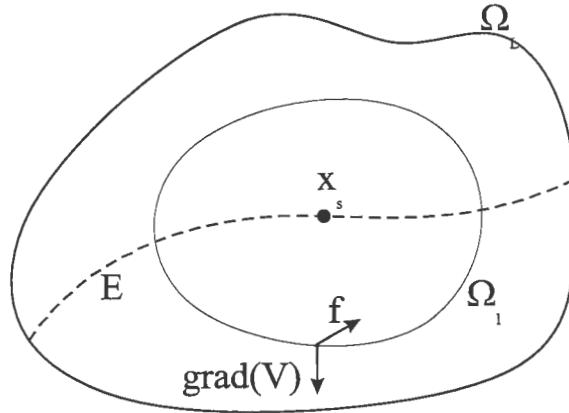


Figura 1: Interpretação geométrica do Princípio de Invariância de LaSalle

É interessante interpretar geometricamente o teorema anterior. Para isto utilizar-se-á a Figura 1 na qual se apresenta um caso simples da aplicação do teorema de LaSalle. Como exigido pelo Teorema 2.1,  $\Omega_L$  é um conjunto limitado nesta figura. A linha tracejada representa o conjunto  $E$  no qual  $\dot{V} = 0$ . Suponha que o maior conjunto invariante contido em  $E$  seja composto apenas pelo ponto de equilíbrio estável  $x_s$ . Considere agora a curva de nível  $\Omega_l := \{x \in \Omega_L : V(x) = l < L\}$  e seja  $p$  um ponto nesta curva de nível. Como dentro de  $\Omega_L$ , a derivada de  $V$  é menor ou igual a zero, obtém-se pela regra da cadeia a seguinte estimativa:

$$\dot{V} = \langle \text{grad}(V), \dot{x} \rangle = \langle \text{grad}(V), f \rangle \leq 0.$$

Em particular, esta desigualdade é verdadeira para o ponto  $p$ . Desta desigualdade verifica-se que o produto escalar do vetor gradiente de  $V$ , o qual é perpendicular às curvas de nível, com o vetor velocidade  $f$ , o qual é tangente às órbitas do sistema, deve ser menor ou igual a zero. Isto significa que o ângulo entre estes vetores deve ser maior ou igual a  $90^\circ$ , como mostra a Figura 1. Esta relação entre estes vetores existe para todos os pontos da curva de nível  $\Omega_l$  da função  $V$ , logo as soluções estão necessariamente entrando na região delimitada pela curva de nível  $\Omega_l$ . Isto vale para todas as curvas de nível internas a  $\Omega_L$ , logo toda solução iniciando em  $\Omega_L$  deverá convergir para o ponto de equilíbrio  $x_s$ . Esta observação geométrica do Princípio de Invariância de LaSalle dá origem aos métodos de estimativa da área de atração de pontos de equilíbrio estáveis de sistemas não-lineares.

Uma versão global deste teorema também foi proposta por LaSalle [5]. Esta versão é muito similar ao seguinte teorema:

**Teorema 2..2 :** *Sejam  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções de classe  $C^1$ . Admita que  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e defina  $E := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$ . Seja  $B$  o maior conjunto invariante contido em  $E$ . Então toda solução limitada para  $t \geq 0$  de (2.1) converge para  $B$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

### 3. Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle

Neste trabalho, apresentam-se resultados mais gerais do que aqueles que foram apresentados na seção anterior. Estes requerem condições menos restritivas do que aquelas exigidas na versão original, possibilitando o tratamento de problemas mais gerais. Basicamente, permite-se que a derivada de  $V$  seja positiva em algumas regiões. Com estas condições menos restritivas, torna-se mais fácil encontrar a função  $V$  e alguns problemas bastante complicados, tais como sistemas caóticos, podem ser tratados.

O teorema a seguir foi proposto e demonstrado pela primeira vez por Rodrigues, Alberto e Bretas em 2000 [10].

**Teorema 3..1 : (Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle).** *Sejam  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções de classe  $C^1$ . Seja  $L \in \mathbb{R}$  uma constante tal que  $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$  seja limitado. Seja  $C := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) > 0\}$ , e admita que  $\sup_{x \in C} V(x) = l < L$ . Defina  $\bar{\Omega}_l = \{x \in \Omega_L : V(x) \leq l\}$  e  $E := \{x \in \Omega_L : \dot{V}(x) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$ . Seja  $B$  o maior conjunto invariante de (2.1) contido em  $E$ . Então, toda solução de (2.1) iniciando em  $\Omega_L$  converge para o conjunto invariante  $B$  quando  $t \rightarrow \infty$ .*

*Além disto, se  $x_o \in \bar{\Omega}_l$ , então  $\varphi(t, x_o) \in \bar{\Omega}_l$  para todo  $t \geq 0$  e  $\varphi(t, x_o)$  tende para o maior conjunto invariante de (2.1) contido em  $\bar{\Omega}_l$ .*

**Demonstração:** vide [10]

Para interpretar geometricamente este teorema, observe a Figura 2. O conjunto  $\Omega_L$  é limitado em acordo com as hipóteses do Teorema 3..1. Dentro de  $\Omega_L$ , a derivada de  $V$ , ao longo das soluções, é não positiva exceto dentro do conjunto  $C$  o qual aparece em tom de cinza. Por hipótese, este conjunto nunca atinge a fronteira de  $\Omega_L$ , uma vez que  $l < L$ . O Teorema 3..1 garante que todas as soluções de (2.1) iniciando dentro de  $\Omega_L$  tendem para o maior conjunto invariante contido em  $E$ . Se, em particular, o maior conjunto invariante contido em  $E$  estiver contido em  $\bar{\Omega}_l$ , então todas as soluções com condição inicial em  $\Omega_L$  tendem para o maior conjunto invariante contido em  $\bar{\Omega}_l$ . Uma vez dentro de  $\bar{\Omega}_l$ , as soluções não saem deste conjunto o qual é uma estimativa do atrator. Dentro de  $\bar{\Omega}_l$ , duas coisas podem ocorrer, ou as soluções tendem para o conjunto  $\{x \in \bar{\Omega}_l : \dot{V}(x) = 0\}$ , ou as soluções permanecem entrando e saindo do conjunto  $C$  indefinidamente. Estas duas situações serão ilustradas na seção de exemplos.

**Observação 3..1 :** *Se  $\dot{V}(x) < 0$  para  $x \notin \bar{C}$ , então toda solução  $\varphi(t, x_o)$  de (2.1) tende para o maior conjunto invariante contido em  $\bar{\Omega}_l$ . Na maioria das vezes, a condição exigida anteriormente não é satisfeita, no entanto se para todo  $x_o \in E - \bar{\Omega}_l$*

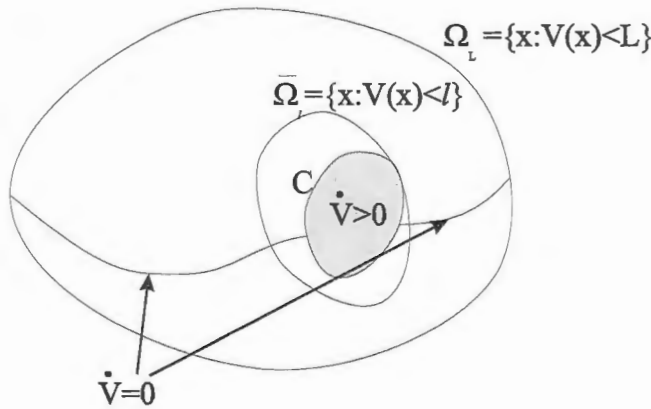


Figura 2: Interpretação geométrica da extensão do Princípio de Invariância

a solução  $\varphi(t, x_0)$  abandonar o conjunto  $E$  para qualquer  $t > 0$ , suficientemente pequeno, então  $\varphi(t, x_0)$  tende para o maior conjunto invariante contido em  $\Omega_l$

**Observação 3..2 :** No teorema anterior, admite-se que o conjunto  $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < L\}$  seja limitado. Em verdade, se apenas uma componente conexa de  $\Omega_L$  é limitada, então o teorema permanece válido para esta componente. Isto segue do fato de que soluções com condições iniciais dentro de uma componente conexa não podem sair desta componente.

Uma versão global do teorema anterior também foi proposta e demonstrada pela primeira vez por Rodrigues, Alberto e Bretas em 1998 [10].

**Teorema 3..2 : (Versão Global da Extensão do Princípio de Invariância)** Sejam  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções de classe  $C^1$  Seja  $C := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) > 0\}$ . Admita que  $l := \sup_{x \in C} V(x) \in \mathbb{R}$  e que  $\bar{\Omega}_l := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq l\}$  seja limitado. Seja  $E := \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\} \cup \bar{\Omega}_l$  e seja  $B$  o maior conjunto invariante contido em  $E$ . Então toda solução,  $\varphi(t, x_0)$ , de (2.1), que é limitada para  $t \geq 0$ , converge para o conjunto invariante  $B$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Além disto, se  $x_0 \in \bar{\Omega}_l$  então  $\varphi(t, x_0)$  é definido para todo  $t \geq 0$ ,  $\varphi(t, x_0) \in \bar{\Omega}_l$  para todo  $t \geq 0$ , e  $\varphi(t, x_0)$  tende para o maior conjunto invariante de (2.1) contido em  $\bar{\Omega}_l$ .

**Demonstração:** vide [10].

A Observação 3..1 feita para o Teorema 3..1 pode ser adaptada ao Teorema 3..2. Do ponto de vista de aplicações, a seguinte observação é bastante importante.

**Observação 3..3 :** Admitindo-se, no teorema acima, que  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é ilimitada radialmete, i.e.,  $V(x) \rightarrow \infty$ , quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ , então toda solução é limitada para  $t \geq 0$  e as conclusões do teorema acima são válidas para todas as soluções.

O Teorema 3.2 apresentado anteriormente associado à Observação 3.3 é muito útil para a obtenção de estimativas de atratores globais conforme mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.1 : Sistema de Lorenz.** Considere o sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -y - xz + rx \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{cases}$$

onde,  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  and  $b = 8/3$ . Estes valores foram escolhidos de forma a obter-se comportamentos caóticos. A seguir, mostra-se como a extensão do Princípio de Invariância pode ser facilmente utilizada para estimar-se o atrator de Lorenz.

Seja

$$V(x, y, z) = rx^2 + 4\sigma y^2 + 4\sigma(z - 5/4r)^2$$

uma Função de Liapunov associada ao sistema de Lorenz. Até onde se sabe, a Função de Liapunov apresentada anteriormente é a melhor apresentada até hoje para estimar-se o atrator de Lorenz por um elipsóide positivamente invariante. Maiores detalhes a respeito deste sistema e de funções de Liapunov podem ser encontrados em Sparrow [14].

Pode-se verificar que esta função satisfaz as condições da Observação 3.3, logo utilizar-se-á o Teorema 3.2 para obter-se uma estimativa do atrator global de Lorenz. A derivada de  $V$  é dada por:

$$\dot{V}(x, y, z) = -2\sigma(rx^2 + 4y^2 + 4bz^2 - 5rbz).$$

O conjunto  $C$  é dado por  $C := \{x \in R^3 : rx^2 + 4y^2 + 4bz^2 - 5rbz < 0\}$  e é fácil verificar que a fronteira de  $C$  é um elipsóide centrado em  $(x = 0, y = 0, z = 5/8r)$ . Como  $C$  é um conjunto convexo e a Função de Liapunov  $V$  é uma função convexa, o  $\sup_{x \in C} V(x)$  ocorre na fronteira do conjunto  $C$ . Para calcular o sup de  $V$  no conjunto  $C$ , a técnica dos multiplicadores de Lagrange será utilizada. A equação do elipsóide será tratada como uma equação de restrição.

Usando a função Lagrangiana:

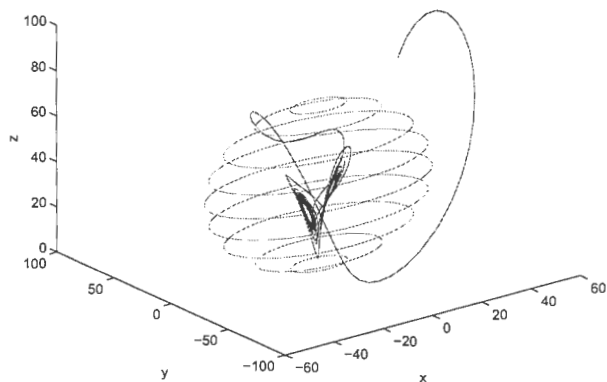
$$\mathcal{L}(x, y, z) = rx^2 + 4\sigma y^2 + 4\sigma(z - \frac{5}{4}r)^2 + \lambda(rx^2 + 4y^2 + 4bz^2 - 5rbz)$$

obtêm-se as seguintes condições de extremo:

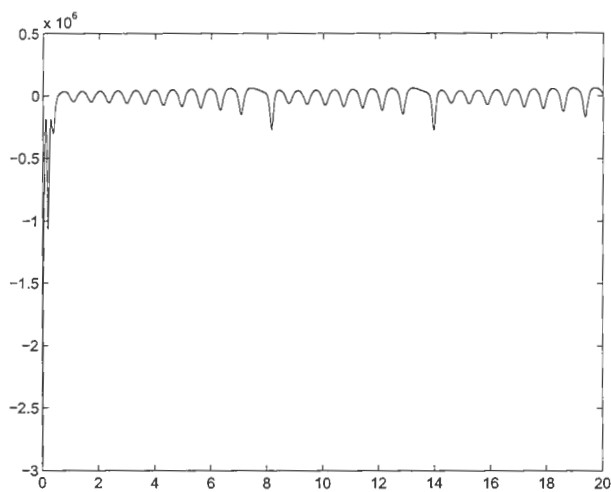
$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 2rx(1 + \lambda) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 8y(\sigma + \lambda) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= 8(\sigma + b\lambda)z - (10\sigma + 5b\lambda)r &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= rx^2 + 4y^2 + 4bz^2 - 5rbz &= 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior obtêm-se  $\lambda = -\sigma$ ,  $x = 0$ ,  $z = \frac{5r(2-b)}{8(1-b)}$  e  $y^2 = \frac{25b^2r^2(b-2)}{64(b-1)^2}$ . Substituindo estes valores na expressão de  $V$ , obtêm-se:

$$l = \sup_{x \in C} V(x) = \frac{25b^2r^2\sigma}{16(b-1)} = \frac{156800}{3} < 52267.$$



(a) Estimativa do Atrator



(b) Derivada da Função de Liapunov

Figura 3: Sistema de Lorenz

O conjunto  $\bar{\Omega}_I$  é o elipsóide:  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : rx^2 + 4\sigma y^2 + 4\sigma(z - \frac{5}{4}r)^2 \leq \frac{156800}{3}\}$ .

O conjunto no qual  $\dot{V} = 0$  está contido em  $\bar{\Omega}_I$  e portanto toda solução com condição inicial em  $\mathbb{R}^3$  converge para o maior conjunto invariante contido em  $\bar{\Omega}_I$ . O

conjunto  $\bar{\Omega}_l$  é uma estimativa do atrator. A Figura 3a mostra esta estimativa. Neste caso, é importante salientar que a derivada de  $V$  permanece intercambiando de sinal depois que a solução entra em  $\bar{\Omega}_l$ . Um gráfico de  $\dot{V}(x(t), y(t), z(t))$  é mostrado na Figura 3b.

#### 4. Princípio de Invariância Uniforme. Robustez com Relação à Variação de Parâmetros

Os resultados apresentados nesta seção são mais gerais do que aqueles apresentados na seção anterior. Nesta seção apresenta-se uma extensão do Princípio de Invariância na qual, além de permitir que a derivada da Função de Liapunov seja positiva em algumas regiões limitadas, consideram-se incertezas na determinação dos parâmetros do sistema. Esta extensão será denominada Princípio de Invariância Uniforme, isto porque esta é útil para a obtenção de estimativas uniformes, com relação aos parâmetros, do atrator e da área de atração de sistemas dinâmicos. O Princípio de Invariância Uniforme foi proposto e demonstrado pela primeira vez por Rodrigues et al. [11].

Considere o seguinte sistema autônomo:

$$\dot{x} = f(x, \lambda) \quad (4.1)$$

onde  $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$  é um vetor de parâmetros do sistema e  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 4.1 : (Princípio de Invariância Uniforme).** *Suponha que  $f : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $V : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  sejam funções de classe  $C^1$  e  $a, b, c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sejam funções contínuas. Admita que para qualquer  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$ , tem-se:*

$$a(x) \leq V(x, \lambda) \leq b(x), \quad -\dot{V}(x, \lambda) \geq c(x).$$

*Para  $L > 0$  seja  $A_L := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) < L\}$ . Admita que  $A_L$  seja não-vazio e limitado. Considere os conjuntos*

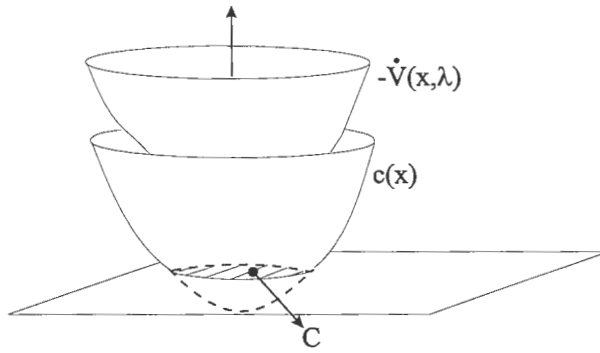
$$B_L := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) < L\}, \quad C := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) < 0\} \text{ e } E_L := \{x \in A_L : c(x) = 0\}.$$

*Suponha agora que  $\sup_{x \in C} b(x) \leq l < L$  e defina os conjuntos*

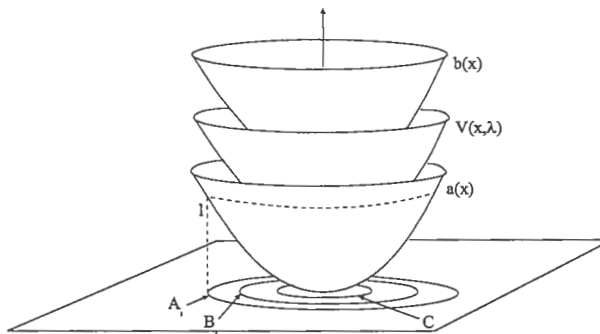
$$A_l := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq l\} \text{ e } B_l := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) \leq l\}.$$

*Se  $\lambda$  é um parâmetro fixo em  $\Lambda$  e todas as condições anteriores são satisfeitas, então para  $x_0 \in B_L$  a solução  $\varphi(t, x_0, \lambda)$  é definida em  $[0, \infty)$  e as seguintes conclusões são obtidas:*

- I) se  $x_0 \in B_l$  então  $\varphi(t, x_0, \lambda) \in A_l$ , para  $t \geq 0$  e  $\varphi(t, x_0, \lambda)$  tende para o maior conjunto invariante de (4.1) contido em  $A_l$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .*
- II) se  $x_0 \in B_L - B_l$ , então  $\varphi(t, x_0, \lambda)$  tende para o maior conjunto invariante de (4.1) contido em  $A_l \cup E_L$ .*



(a) Derivada da Função de Liapunov



(b) Função de Liapunov

Figura 4: Funções **a**, **b** e **c** do Teorema 4.1

**Demonstração:** vide [11].

A uniformidade é garantida pela existência das funções **a**, **b** e **c** as quais são independentes dos parâmetros do sistema. Para interpretar geometricamente este resultado, observe a Figura 4 onde ilustram-se as relações entre estas funções e as estimativas obtidas com o teorema.

O conjunto **C** contém o conjunto onde  $\dot{V}$  é positiva independentemente do parâmetro  $\lambda \in \Lambda$ . Portanto, ao calcular o  $\sup_{x \in C} b(x)$ , obtém-se um número  $l$  que é sempre maior que  $\sup_{x, \lambda \in \{x, \lambda: \dot{V}(x, \lambda) > 0\}} V(x, \lambda)$ . De posse deste número, utiliza-se a curva de nível  $l$  da função **a** para obter-se uma estimativa do atrator.

A Figura 5 ilustra a aplicação do Princípio de Invariância Uniforme. Observe que  $B_l \subset A_l$  e  $B_L \subset A_L$ . A noção de invariância, neste caso, é um pouco diferente conforme explicado a seguir. Nesta ilustração,  $x_1$  e  $x_3$  pertencem à  $B_L$ . O conjunto

$\mathcal{B}_L$ , por sua vez, não é positivamente invariante, entretanto, pode-se afirmar que as soluções iniciando dentro de  $\mathcal{B}_L$  não saem de  $\mathcal{A}_L$ . Este é o caso das soluções iniciando em  $x_1$  e  $x_3$  na Figura 5. Nada pode-se afirmar a respeito das soluções iniciando em  $\mathcal{A}_L - \mathcal{B}_L$ . A solução iniciando em  $x_2$ , por exemplo, abandona  $\mathcal{A}_L$  e não retorna mais.

Todas as soluções iniciando em  $\mathcal{B}_L$  garantidamente tendem para o maior conjunto invariante contido em  $A_i \cup E_L$ . Se por ventura alguma destas soluções entrar em  $B_i$ , então pode-se afirmar que esta nunca mais sairá de  $A_i \supset B_i$ , embora  $B_i$  não seja positivamente invariante. Este é o caso da solução com condição inicial em  $x_3$ .

É importante salientar que a ilustração da Figura 5 não apresenta o caso mais geral. Neste exemplo o conjunto  $A_i \subset \mathcal{B}_L$ , entretanto, esta não é uma condição necessária.

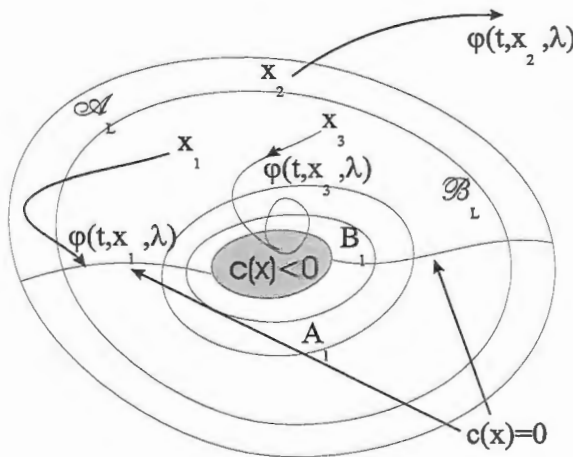


Figura 5: Interpretação geométrica do Princípio de Invariância Uniforme

Observações similares àquelas feitas para a extensão do Princípio de Invariância apresentada na seção 3. podem ser feitas para o Princípio de Invariância Uniforme.

**Teorema 4.2 : (Versão Global do Princípio de Invariância Uniforme).** *Suponha que  $f : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $V : \mathbb{R}^n \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  sejam funções de classe  $C^1$ ,  $a, b, c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sejam funções contínuas. Admita que para qualquer  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$ , tem-se:*

$$a(x) \leq V(x, \lambda) \leq b(x) , \quad -\dot{V}(x, \lambda) \geq c(x).$$

Considere os conjuntos:

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) < 0\} \text{ e } E := \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) = 0\}.$$

Suponha que  $\sup_{x \in C} b(x) \leq l < \infty$  e considere os conjuntos

$$A_l := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq l\} \text{ e } B_l := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) \leq l\}.$$

Suponha que  $A_l$  é não-vazio e limitado.

Então, se  $\lambda$  é um parâmetro fixo em  $\Lambda$  e todas as condições anteriores são satisfeitas, então as seguintes conclusões são obtidas:

I) se  $x_0 \in B_l$  então  $\varphi(t, x_0, \lambda)$  está definida e pertence à  $A_l$  para todo  $t \geq 0$  e  $\varphi(t, x_0, \lambda)$  tende para o maior conjunto invariante de (4.1) contido em  $A_l$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

II) Se  $x_0$  é tal que a solução  $\varphi(t, x_0, \lambda)$  é limitada para  $t \geq 0$ , então  $\varphi(t, x_0, \lambda)$  tende para o maior conjunto invariante de (4.1) contido em  $A_l \cup E$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Demonstração:** vide [11].

**Observação 4.1 :** Se  $a(x) \rightarrow \infty$ , quando  $\|x\| \rightarrow \infty$ , então para todo  $r > 0$  o conjunto  $A_r := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq r\}$  é limitado. Se tal condição é satisfeita, então toda solução é limitada para  $t \geq 0$  e a conclusão do teorema anterior é válida para todas as soluções.

Ao utilizar os Teoremas 4.1 ou 4.2 em algumas aplicações, podem surgir algumas dificuldades técnicas. A função  $c(x)$  pode não ser suave, o conjunto  $C$  pode não ser convexo e portanto  $\sup_{x \in C} b(x)$  pode não ocorrer na fronteira do conjunto  $C$ . Isto impossibilita a aplicação da técnica de multiplicadores de Lagrange para o cálculo do  $\sup_{x \in C} b(x)$  mesmo que  $b$  seja uma função convexa. Entretanto, quando existirem algumas simetrias presentes no problema, o próximo Lema fornece um caminho alternativo para explorá-las, evitando estas dificuldades.

**Exemplo 4.1 :** Estimativa do Atrator do Sistema de Lorenz com incertezas nos parâmetros.

Considere o sistema de Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{u} &= -\sigma u + \sigma v \\ \dot{v} &= -v - uz + ru \\ \dot{w} &= -bw + uv \end{cases}$$

onde,  $\sigma, r$  e  $b$  são parâmetros do sistema. Os valores nominais destes parâmetros são  $\sigma_N = 10, r_N = 28$  e  $b_N = \frac{8}{3}$ . Admite-se existir uma incerteza de  $\pm 5\%$  na determinação destes parâmetros. Seja  $\sigma_m := 9.5, \sigma_M := 10.5, r_m := 28 - \frac{28}{20}, r_M := 28 + \frac{28}{20}, b_m := \frac{8}{3} - \frac{8}{60}, b_M := \frac{8}{3} + \frac{8}{60}$ . Portanto, os parâmetros pertencem ao seguinte subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\Lambda := \{ \lambda := (\sigma, r, b) \in \mathbb{R}^3 : \sigma_m \leq \sigma \leq \sigma_M, r_m \leq r \leq r_M, b_m \leq b \leq b_M \}.$$

Com a seguinte mudança de variáveis:

$$x := u, y := v, z := w - \frac{5}{4}r,$$

obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -y - x(z + \frac{5}{4}r) + rx \\ \dot{z} &= -b(z + \frac{5}{4}r) + xy. \end{cases} \quad (4.2)$$

Seja

$$V(\sigma, r, b, x, y, z) = rx^2 + 4\sigma y^2 + 4\sigma z^2$$

uma Função de Liapunov para o sistema (4.2). É fácil verificar que esta função satisfaz as condições estabelecidas na Observação 4.1, portanto o Teorema 4.2 será utilizado para estimar o atrator de Lorenz.

Neste caso escolhem-se as funções  $a$  e  $b$  como sendo  $a(x, y, z) := r_m x^2 + 4\sigma_m y^2 + 4\sigma_m z^2$  e  $b(x, y, z) := r_M x^2 + 4\sigma_M y^2 + 4\sigma_M z^2$ . É importante destacar que a mudança de variáveis e a escolha da função  $V$  foram fundamentais para que as funções  $a$  e  $b$  pudessem ser facilmente escolhidas como funções regulares, ou seja, são contínuas e possuem derivadas de qualquer ordem contínuas.

A escolha da função  $c$  não é tão simples. Calculando a derivada de  $V$  ao longo das soluções de (4.2), obtém-se a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} -\dot{V}(r, \sigma, b, x, y, z) &= 2\sigma(rx^2 + 4y^2) + 8\sigma bz^2 + 10\sigma rbz \geq \\ &2\sigma_m(r_m x^2 + 4y^2) + 8\sigma_m b_m(|z| - \frac{5\sigma_M r_M b_M}{8\sigma_m b_m})^2 - \frac{(5\sigma_M r_M b_M)^2}{8\sigma_m b_m} \\ &:= c(x, y, z) := \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma(|z| - \rho)^2 - \mu. \end{aligned}$$

A expressão anterior define claramente os parâmetros  $\alpha, \beta, \gamma$ . Observe que a função  $c$  não é uma função regular e o conjunto  $C$  não é convexo.

Defina  $f_1(x, y, z) := \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma(z - \rho)^2 - \mu$  e  $f_2(x, y, z) := \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma(z + \rho)^2 - \mu$ .

Se tomarmos  $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c(x, y, z) < 0\}$ ,  $F_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) < 0\}$  pode-se demonstrar observando as simetrias do problema que  $\sup_C b \leq \sup_{F_1} b$ .

Como  $F_1$  é um conjunto convexo e  $b$  é uma função convexa, a técnica de multiplicadores de Lagrange pode ser utilizada para obter-se que o supremo é atingido em  $x = 0$ ,  $y^2 = \frac{25\sigma_M^2 b_M^2 r_M^2 (b_m - 2)}{64\sigma_m (1 - b_m)^2}$ ,  $z = \frac{5\sigma_M b_M r_M}{8\sigma_m (b_m - 1)}$  e

$$\sup_{F_1} b = \frac{25\sigma_M^3 b_M^2 r_M^2}{16\sigma_m^2 (b_m - 1)} < 88575,75 < l := 88576.$$

Portanto o atrator de Lorenz está contido dentro do elipsóide:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r_m x^2 + 4\sigma_m y^2 + 4\sigma_m z^2 < l = 88576\}.$$

A estimativa anterior assim como uma representação numérica do atrator de Lorenz estão mostradas na Figura 6 para dois vetores de parâmetros diferentes. O elipsóide externo representado em tons de cinza corresponde ao conjunto  $A_l$  e o elipsóide interno representado parcialmente por linhas circulares corresponde ao conjunto  $B_l$ .

## 5. Aplicações em Sistemas Elétricos de Potência

Os métodos diretos têm se mostrado adequados à análise de estabilidade transitória de sistemas de potência em tempo real. Dentre estes métodos, as idéias de Liapunov associadas ao Princípio de Invariância de LaSalle têm sido utilizadas para estimar a região de estabilidade ou área de atração dos sistemas de potência. Para isto utiliza-se uma função auxiliar denominada Função de Liapunov a qual muitas vezes está associada à energia do sistema.

Nas últimas duas décadas, muitos autores abordaram o problema da estimativa da área de atração e estes estudos culminaram com o desenvolvimento do método BCU [2], o qual é considerado, no momento, o método direto mais eficiente ao estudo de estabilidade transitória. Embora estes avanços tenham sido significativos, a aplicação destes métodos à análise de estabilidade em sistemas reais tem encontrado muitos obstáculos. O principal deles é que os métodos energéticos ainda são impróprios para trabalhar com modelos mais realísticos. Em verdade este obstáculo está intimamente relacionado com o problema de encontrar uma Função de Liapunov associada a estes modelos.

Em geral para encontrar uma Função de Liapunov, muitas simplificações são feitas no modelo do sistema de potência. As máquinas são usualmente modeladas como uma força eletromotriz constante atrás da reatância transitória. As cargas são modeladas como potências constantes. O sistema elétrico é reduzido aos nós das forças eletromotrizes e as perdas nas linhas de transmissão são desprezadas. Além disto, usualmente exige-se a existência de um barramento infinito ou alternativamente faz-se uma hipótese de amortecimento uniforme.

Neste trabalho apresentam-se Funções de Liapunov Estendidas para modelos de sistemas de potência que não possuem em princípio uma Função de Liapunov no sentido usual.

### 5.1 Sistema de Uma Máquina Versus Barramento Infinito: Modelo Clássico do Gerador

Seja o sistema de uma máquina versus barramento infinito da Figura 7. A máquina síncrona está conectada ao barramento infinito através de uma linha de transmissão com perdas.

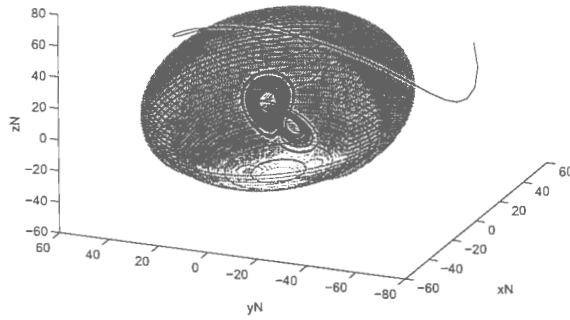
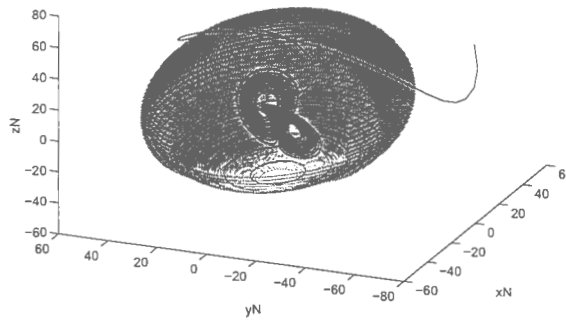
(a)  $(\sigma, r, b) = (9.5, 26.6, 2.53)$ (b)  $(\sigma, r, b) = (10.5, 29.4, 2.8)$ 

Figura 6: Estimativa Uniforme do Atrator de Lorenz. Condições Iniciais:  $(x(0), y(0), z(0)) = (20, -70, 40)$

Modelando o gerador como uma força eletromotriz constante através da reatância transitória, pode-se descrever este sistema pelo seguinte par de equações diferenci-

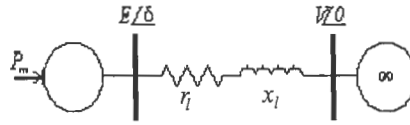


Figura 7: Sistema uma máquina versus barramento infinito.

ais:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \omega \\ \frac{H}{\pi f_o} \dot{\omega} &= P_m - \frac{R}{R^2 + X_d'^2} E^2 - \frac{X_d'}{R^2 + X_d'^2} EV \sin \delta + \frac{R}{R^2 + X_d'^2} EV \cos \delta - T\omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $\delta$  e  $\omega$  são respectivamente o ângulo do rotor e o desvio de frequência do gerador em relação à velocidade síncrona,  $P_m$  é a potência mecânica injetada no gerador,  $H$  é a constante de inércia,  $E$  é o módulo da força eletromotriz,  $V$  é o módulo da tensão no barramento infinito e  $T$  é o coeficiente de amortecimento. Os parâmetros  $R = r_a + r_l$  e  $X_d' = x_d' + x_l$  são respectivamente a resistência e a reatância equivalentes do sistema. Sendo  $r_a$  a resistência de armadura da máquina,  $x_d'$  a reatância transitória de eixo direto da máquina,  $r_l$  e  $x_l$  são respectivamente a resistência e a reatância da linha de transmissão.

Incorporando as perdas na linha, este sistema possui uma Função de Liapunov no sentido usual que é dada por:

$$V_{FL}(\delta, \omega) := \frac{H}{\pi f_o} \frac{\omega^2}{2} - P\delta + \frac{X_d'}{R^2 + X_d'^2} EV \cos \delta - \frac{R}{R^2 + X_d'^2} EV \sin \delta + \alpha$$

onde  $\alpha$  é uma constante arbitrária e  $P = P_m - \frac{R}{R^2 + X_d'^2} E^2$ . É fácil mostrar que a derivada de  $V_{FL}$  ao longo das órbitas é dada por

$$\dot{V}_{FL} = -T\omega^2 \leq 0$$

a qual é uma função semi-definida negativa. Portanto, a função  $V_{FL}$  satisfaz as exigências do Princípio de Invariância usual e pode ser utilizada para estudar a estabilidade deste sistema com as técnicas usuais. Apesar disto, uma nova função energia será proposta a seguir e a Extensão do Princípio de Invariância será utilizada para estudar a estabilidade do sistema. O objetivo é ilustrar uma aplicação da Extensão do Princípio de Invariância e preparar as idéias para em seguida resolver um problema que não apresenta uma função de Liapunov no sentido usual.

Para isto, considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} W(\delta, \omega) &:= \frac{H}{\pi f_o} \frac{\omega^2}{2} - P\delta - \frac{X_d'}{R^2 + X_d'^2} EV \cos \delta + \\ &\beta \omega \left( -P + \frac{X_d'}{R^2 + X_d'^2} EV \sin \delta + \frac{R}{R^2 + X_d'^2} EV \cos \delta \right) + \alpha \end{aligned}$$

onde  $\beta$  é um parâmetro a ser determinado e  $\alpha$  é uma constante arbitrária. Nosso objetivo principal é mostrar que essa função satisfaz as condições do Teorema 3.1.1.

Calculando a derivada de  $W$  ao longo das órbitas, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{W} &:= - \left( T - \beta \left( + \frac{X'_d}{R^2 + x^2} EV \cos \delta - \frac{R}{R^2 + X'^2_d} EV \sin \delta \right) \right) \omega^2 \\ &+ \frac{\beta \pi f_o T}{H} \left( P + \frac{X'_d}{R^2 + X'^2_d} EV \sin \delta - \frac{R}{R^2 + X'^2_d} EV \cos \delta \right) \omega \\ &- \frac{\beta \pi f_o}{H} \left( P - \frac{X'_d}{R^2 + X'^2_d} EV \sin \delta - \frac{R}{R^2 + X'^2_d} EV \cos \delta \right)^2 \\ &- \frac{R}{R^2 + X'^2_d} EV \cos(\delta) \omega \end{aligned}$$

que é equivalente a:

$$-\dot{W} := \begin{bmatrix} P_l(\delta) \\ \omega \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} P_l(\delta) \\ \omega \end{bmatrix} - \frac{R}{R^2 + X'^2_d} EV \cos(\delta) \omega$$

onde

$$P_l(\delta) = P - \frac{X'_d}{R^2 + X'^2_d} EV \sin \delta - \frac{R}{R^2 + X'^2_d} EV \cos \delta$$

e

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{\beta \pi f_o}{H} & -\frac{\beta \pi f_o T}{2H} \\ \hline -\frac{\beta \pi f_o T}{2H} & T - \beta EV \left( -\frac{X'_d}{R^2 + X'^2_d} \cos \delta + \frac{R}{R^2 + X'^2_d} \sin \delta \right) \end{array} \right]$$

Note que  $\dot{W}$  é composta por um termo quadrático adicionado ao termo  $\left( -\frac{R}{R^2 + X'^2_d} EV \cos(\delta) \omega \right)$ . O parâmetro  $\beta$  pode ser escolhido de forma a tornar a parte quadrática definida positiva. Aplicando o Critério de Sylvester pode-se facilmente demonstrar que isto é certamente garantido se

$$\beta < \frac{T}{\left( \frac{X'_d}{R^2 + X'^2_d} + \frac{R}{R^2 + X'^2_d} \right) EV + \frac{\pi f_o T^2}{4H}}$$

Desta forma, apenas o termo  $\left( -\frac{R}{R^2 + X'^2_d} EV \cos(\delta) \omega \right)$  será responsável por gerar regiões nas quais a derivada de  $W$  é positiva. Uma vez escolhido o parâmetro  $\beta$ , tem-se que encontrar a constante real  $L$  para que sejam satisfeitas as condições do Teorema 3..1. Essas condições são:

- O conjunto  $\Omega_L$  deve ser limitado;
- $l = \sup_{x \in C} W(x) < L$ .

No Exemplo a seguir estas condições são verificadas numericamente.

**Exemplo 5..1** *Seja o sistema de uma máquina versus barramento infinito da Figura 7 com  $P_m = 1.0$ ,  $H = 6.0$ ,  $T = 0.08$ ,  $E = 1.33$ ,  $V = 1.0$ ,  $r_a = 0.002$ ,  $x'_d = 0.2$ ,  $r_l = 0.04$  e  $x_l = 0.5$ . As curvas de nível de  $W$  estão apresentadas na Figura 8 para  $\alpha = 2.0841$  e  $\beta = 0.0078$ . A constante  $\alpha$  foi escolhida de forma que a função energia no ponto de equilíbrio estável pós falta seja igual a zero. Observe que as regiões onde a derivada de  $W$  é positiva são pequenos conjuntos limitados. Um*

deles está próximo ao ponto de equilíbrio instável. O outro está próximo ao ponto de equilíbrio estável e este corresponde ao conjunto  $C$  do Teorema 3.1. O máximo valor de  $W$  em  $\bar{C}$  define o conjunto  $\bar{\Omega}_l$ , o qual é uma estimativa do atrator. Neste exemplo  $l = 0.0903$ . Para estimar a região de estabilidade ou área de atração deste atrator, procura-se pelo maior número  $L$  tal que as condições do Teorema 3.1 sejam satisfeitas. Na prática, deve-se garantir que  $\bar{\Omega}_L$  não intercepte a região, próxima ao ponto de equilíbrio instável, onde a derivada é positiva. Neste exemplo obteve-se  $L = 1.4621$ . A Figura 8 ilustra as estimativas do atrator e da região de estabilidade.

O tempo crítico de abertura obtido por simulação para um curto sólido trifásico na barra do gerador pertence ao intervalo  $(0.355, 0.356s)$ . A estimativa do tempo crítico de abertura obtida com a Função de Liapunov Estendida pertence ao intervalo  $(0.312, 0.313s)$ . Como esperado, esta estimativa é um pouco conservadora porque a estimativa da região de estabilidade está contida dentro da região de estabilidade verdadeira. Entretanto este tempo não é muito mais conservador do que o obtido com a Função de Liapunov convencional  $V_{LF}$  o qual pertence ao intervalo  $(0.329, 0.330s)$ . A Figura 8 mostra as trajetórias do sistema em falta e pós-falta para um tempo de abertura de  $0.312s$ .

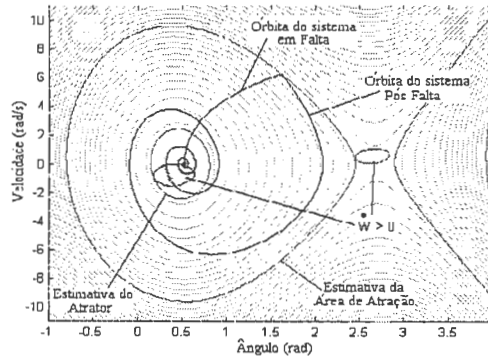


Figura 8: Curvas de nível de  $W$ .

## 5.2 Sistema de Uma Máquina Versus Barramento Infinito: - Modelo de Um Eixo do Gerador

Considere novamente o sistema da Figura 7. Utilizando o modelo de 1-eixo para o gerador, o sistema de potência pode ser descrito matematicamente pelas seguintes

equações diferenciais:

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega \\ \frac{H}{\pi f_o} \dot{\omega} &= P_l(\delta, E'_q) - T\omega \\ \frac{\tau'_{do}}{X_d - X'_d} \dot{E}'_q &= \frac{1}{X_d - X'_d} E_{fd} + \frac{X'_q}{R^2 + X'_d X'_q} |V| \cos \delta - \frac{R^2 + X_d X'_q}{(R^2 + X'_d X'_q)(X_d - X'_d)} E'_q \\ &\quad + \frac{R}{R^2 + X'_d X'_q} |V| \sin \delta\end{aligned}\quad (5.2)$$

onde

$$\begin{aligned}P_l(\delta, E'_q) &= P_m + \frac{(R^2 - X'_d X'_q)(X'_d - X'_q)}{2(R^2 + X'_d X'_q)^2} |V|^2 \sin 2\delta - \frac{R(R^2 + X'_q{}^2)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} E'_q{}^2 + \frac{R X'_q (X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} |V|^2 \sin^2 \delta \\ &\quad - \left( \frac{2R^2 (X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} + \frac{X'_q}{R^2 + X'_d X'_q} \right) E'_q |V| \sin \delta + \left( \frac{2R X'_q (X'_q - X'_d)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} + \frac{R}{R^2 + X'_d X'_q} \right) E'_q |V| \cos \delta \\ &\quad + \frac{R X'_q (X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} |V|^2 \cos^2 \delta\end{aligned}$$

$E'_q$  é o módulo da força eletromotriz de eixo em quadratura,  $E_{fd}$  é o módulo da tensão aplicada ao enrolamento de campo da máquina,  $R = r_a + r_l$  é a resistência equivalente do sistema,  $X'_d = x'_d + x_l$ ,  $X_d = x_d + x_l$ ,  $X'_q = x'_q + x_l$  e  $X_q = x_q + x_l$  são as reatâncias equivalentes do sistema, sendo  $r_a$  a resistência de armadura da máquina,  $x'_d$  e  $x'_q$  as reatâncias transitória de eixo direto e quadratura da máquina,  $x_d$  e  $x_q$  as reatâncias síncronas de eixo direto e quadratura da máquina e  $r_l$  e  $x_l$  são respectivamente a resistência e a reatância da linha de transmissão.

Obter uma Função de Liapunov para este sistema não é uma tarefa trivial. Para isto considere a seguinte mudança de variável

$$\varepsilon'_q = \ln(E'_q)$$

A nova variável esta bem definida, já que  $E'_q$  representa uma força eletromotriz e tem-se  $E'_q \neq 0$ . Desprezando as perdas na linha de transmissão e a resistência de armadura, este sistema possui uma Função de Liapunov no sentido usual que é dada por:

$$\begin{aligned}V_{FL} &= \frac{H}{\pi f_o} \omega^2 - P_m \delta - \frac{1}{2} |V|^2 \frac{(X'_d - X'_q)}{2X'_d X'_q} \cos 2\delta - \\ &\quad \frac{e^{\varepsilon'_q} |V|}{X'_d} \cos \delta + \frac{1}{2} \frac{X_d}{X'_d (X_d - X'_d)} e^{2\varepsilon'_q} - \frac{1}{X_d - X'_d} E_{fd} e^{\varepsilon'_q} + \alpha\end{aligned}$$

onde  $\alpha$  é uma constante arbitrária. É fácil mostrar que a derivada de  $V_{FL}$  ao longo das órbitas é dada por:

$$\dot{V}_{FL} = -\frac{\tau'_{do}}{X_d - X'_d} \left( e^{\varepsilon'_q} \right)^2 - T\omega^2 \leq 0$$

a qual é uma função semi-definida negativa. Portanto, a função  $V_{FL}$  satisfaz todas as exigências do Princípio de Invariância usual e pode ser utilizada para estudar a estabilidade deste sistema com as técnicas usuais.

**Exemplo 5..2** *Seja o sistema de uma máquina versus barramento infinito da Figura 1 com  $P_m = 1.0$ ,  $H = 6$ ,  $T = 0.08$ ,  $\tau'_{do} = 5$ ,  $E_{fd} = 1.92$ ,  $V = 1$ ,  $r_a = 0$ ,  $x'_d = 0.2$ ,  $x'_q = 0.4$ ,  $x_d = 0.9$ ,  $x_q = 0.8$ ,  $r_l = 0$  e  $x_l = 0.5$ . As curvas de nível de  $V_{FL}$  são apresentadas considerando  $\alpha = 3.2625$ . Novamente a constante  $\alpha$  foi escolhida de forma que a energia do ponto de equilíbrio estável pós falta fosse zero. Na Figura 9,  $E'_q$  é constante e igual a 1.3. Na Figura 10,  $\omega$  é constante e igual a  $-0.8$ . Para estimar a área de atração, procura-se pelo maior número  $L$  tal que o conjunto  $\Omega_L$  seja limitado. Neste exemplo obteve-se  $L = 0.4081$ . As regiões hachuradas nas Figuras 9 e 10 mostram a interseção da estimativa da área de atração com o plano de corte. O tempo crítico de abertura obtido por simulação para um curto sólido trifásico na barra do gerador pertence ao intervalo  $(0.281, 0.282s)$ . Utilizando esta função energia, a estimativa do tempo crítico de abertura obtido pertence ao intervalo  $(0.127; 0.128s)$ . Como esperado, esta estimativa é um pouco conservadora porque a estimativa da região de estabilidade está contida dentro da região de estabilidade verdadeira. As Figuras 9 e 10 mostram as trajetórias do sistema em falta e pós falta para um tempo de abertura de 0.127s.*

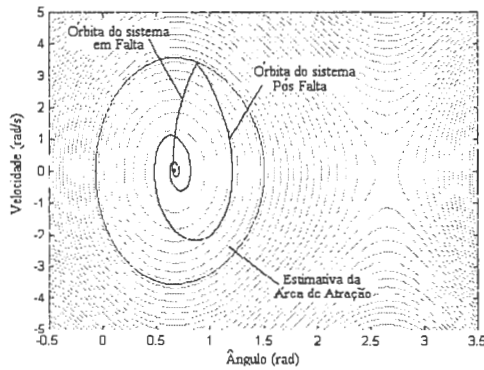


Figura 9: Curvas de nível de  $V$ ,  $E'_q$  constante e igual a 1.3.

Quando a resistência de armadura e as perdas na linha são consideradas, este sistema não possui uma Função de Liapunov no sentido usual. Apesar disto, uma nova função energia será proposta a seguir e a Extensão do Princípio de Invariância será utilizada para estudar a estabilidade do sistema. Para isto, considere a seguinte função:

$$W = \frac{H}{\pi f_0} \omega^2 - P_m \delta - \frac{1}{x_d - x'_d} E_{fd} e^{\epsilon'_q} - \frac{x'_q}{R^2 + x'_d x'_q} e^{\epsilon'_q} |V| \cos \delta - \frac{R}{R^2 + x'_d x'_q} e^{\epsilon'_q} |V| \sin \delta - \frac{R x'_q (x'_d - x'_q)}{2(R^2 + x'_d x'_q)} |V|^2 \left( \delta + \frac{\sin 2\delta}{2} \right) + \frac{R x'_d (x'_d - x'_q)}{2(R^2 + x'_d x'_q)} |V|^2 \left( \delta - \frac{\sin 2\delta}{2} \right) + \frac{(R^2 - x'_d x'_q)(x'_d - x'_q)}{4(R^2 + x'_d x'_q)^2} |V|^2 \cos 2\delta + \frac{R^2 + x'_d x'_q}{(R^2 + x'_d x'_q)(x_d - x'_d)} e^{2\epsilon'_q} - \beta \omega P_l(\delta, E'_q) + \alpha$$

onde  $\beta$  é um parâmetro a ser determinado e  $\alpha$  uma constante arbitrária. Nosso objetivo é mostrar que esta função satisfaz as condições do Teorema 3.1. Calculando

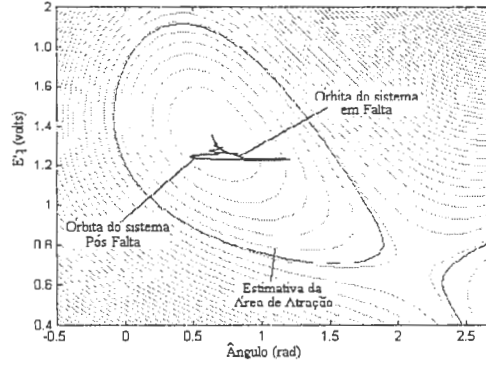


Figura 10: Curvas de nível de  $V$ ,  $\omega$  constante e igual a  $-0.8$ .

a derivada de  $W$  ao longo das órbitas do sistema obtém-se:

$$-\dot{W} = \begin{bmatrix} e^{\varepsilon'_q} \\ P_l(\delta, E'_q) \\ \omega \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} e^{\varepsilon'_q} \\ P_l(\delta, E'_q) \\ \omega \end{bmatrix} + \frac{2R^2(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} e^{\varepsilon'_q} |V| \omega \sin \delta \\ - \frac{2RX'_q(X'_q - X'_d)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} e^{\varepsilon'_q} |V| \omega \cos \delta + \frac{R(R^2 + X_q'^2)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} e^{2\varepsilon'_q} \omega$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \frac{\tau'_{d0}}{X'_d - X'_q} \\ A_{22} = \frac{1}{2} \frac{H}{\pi J_0} \beta \\ A_{33} = \beta \left[ - \left( \frac{X'_q}{R^2 + X'_d X'_q} + \frac{2RX'_q(X'_q - X'_d)}{R^2 + X'_d X'_q} \right) e^{\varepsilon'_q} |V| \cos \delta \right. \\ \left. - \left( \frac{2R^2 X'_q(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} + \frac{R}{R^2 + X'_d X'_q} \right) e^{\varepsilon'_q} |V| \sin \delta \right. \\ \left. - \left( \frac{2RX'_q(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} + \frac{2RX'_d(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} \right) |V|^2 \cos \delta \sin \delta \right. \\ \left. + \frac{(R^2 - X'_d X'_q)(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} |V|^2 \cos 2\delta \right] + T \\ A_{13} = \frac{\beta}{2} \left[ \left( - \frac{X'_q}{R^2 + X'_d X'_q} - \frac{2R^2(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} \right) |V| \sin \delta \right. \\ \left. + \left( \frac{R}{R^2 + X'_d X'_q} - \frac{2RX'_q(X'_q - X'_d)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} \right) |V| \cos \delta - \frac{2R(R^2 + X_q'^2)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} (e^{\varepsilon'_q})^2 \right] \\ A_{23} = - \frac{1}{4} \frac{H}{\pi J_0} \beta d$$

Similarmente ao Exemplo 5.1, a derivada de  $W$  é composta por um termo quadrático adicionado a três outros termos. O parâmetro  $\beta$  deve ser escolhido de

forma a tornar a parte quadrática definida positiva. Aplicando a fórmula da variação das constantes à Equação (5.2), pode-se mostrar que  $E'_q$  mantém-se limitado ao longo das órbitas, segundo a estimativa:

$$E'_q < E'_{q\text{est}} = |E'_q(0)| + \left| \frac{E_{fd}}{\tau'_{do}} \right| + \left| \frac{(x_d - x'_d)x'_q}{\tau'_{do}(r_a^2 + x'_d x'_q)} V \right| + \left| \frac{(x_d - x'_d)r}{\tau'_{do}(r_a^2 + x'_d x'_q)} V \right|$$

Com esta estimativa e aplicando-se o Critério de Sylvester encontra-se a seguinte restrição para  $\beta$

$$-\frac{E_2^2}{8 \frac{H}{\pi f_o}} \beta^2 + \frac{\tau'_{do}}{(X_d - X'_d)} \left( \left( \frac{E_1}{\frac{2H}{\pi f_o}} - \frac{T^2}{16 \left( \frac{H}{\pi f_o} \right)^2} \right) \beta + \frac{T}{\frac{2H}{\pi f_o}} \right) > 0$$

onde

$$\begin{aligned} E_1 &= - \left( \frac{X'_q}{R^2 + X'_d X'_q} + \frac{2RX'_q(X'_q - X'_d)}{R^2 + X'_d X'_q} \right) E'_{q\text{est}} |V| \\ &\quad - \left( \frac{2R^2 X'_q (X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} + \frac{R}{R^2 + X'_d X'_q} \right) E'_{q\text{est}} |V| \\ &\quad - \left( \frac{2RX'_q(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} + \frac{2RX'_d(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} \right) |V|^2 + \frac{(R^2 - X'_d X'_q)(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} |V|^2 \\ E_2 &= - \frac{2R(R^2 + x_d^2)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} (e^{e'_q})^2 - \left( \frac{X'_q}{R^2 + X'_d X'_q} + \frac{2R^2(X'_d - X'_q)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} \right) |V| \\ &\quad + \left( \frac{R}{R^2 + X'_d X'_q} - \frac{2RX'_q(X'_q - X'_d)}{(R^2 + X'_d X'_q)^2} \right) |V| \end{aligned}$$

A constante  $\beta$  deve ser escolhida positiva e satisfazendo esta última restrição para que a matriz  $A$  seja definida positiva.

**Exemplo 5.3** *Seja o sistema de uma máquina versus barramento infinito da Figura 1 com  $P_m = 1.0$ ,  $H = 6$ ,  $T = 0.08$ ,  $\tau'_{do} = 5$ ,  $E_{fd} = 1.92$ ,  $V = 1$ ,  $r_a = 0.002$ ,  $x'_d = 0.2$ ,  $x'_q = 0.4$ ,  $x_d = 0.9$ ,  $x_q = 0.8$ ,  $r_l = 0.04$  e  $x_l = 0.5$ . As curvas de nível de  $W$  são apresentadas considerando  $\alpha = 3.3072$  e  $\beta = 0.0117$ . Na Figura 11,  $E'_q$  é constante e igual a 1.3. Na Figura 12,  $\omega$  é constante e igual a  $-0.8$ . As regiões onde a derivada de  $W$  é positiva são pequenos conjuntos limitados, apresentados nas Figuras 11 e 12. Para estimar a região de estabilidade ou área de atração deste atrator, procura-se pelo maior número  $L$  tal que as condições do Teorema 3.1 sejam satisfeitas. Neste exemplo obteve-se  $L = 0.3996$ . As regiões hachuradas nas Figuras 11 e 12 mostram a interseção da estimativa da área de atração com o plano de corte.*

*O tempo crítico de abertura obtido por simulação para um curto sólido trifásico na barra do gerador pertence ao intervalo (0.333, 0.334s). Utilizando esta função energia, obtém-se a seguinte estimativa (0.143, 0.144s). Como esperado, esta estimativa é um pouco conservadora porque a estimativa da região de estabilidade está contida dentro da região de estabilidade verdadeira. As Figuras 11 e 12 mostram as trajetórias do sistema em falta e pós falta para um tempo de abertura de 0.143s.*

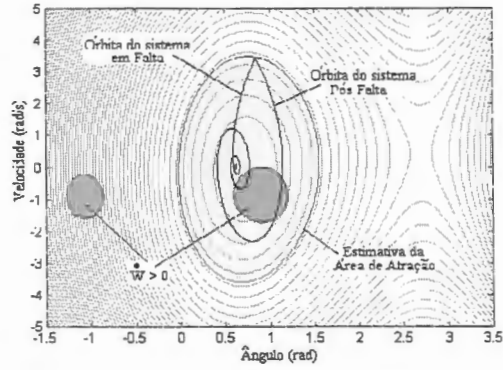


Figura 11: Curvas de nível de  $W$ ,  $E'_q$  constante e igual a 1.3.

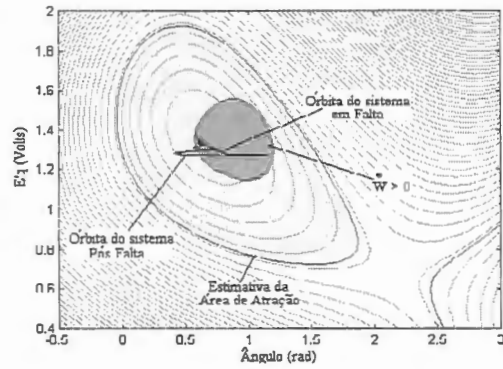


Figura 12: Curvas de nível de  $W$ ,  $\omega$  constante e igual a  $-0.8$ .

### 5.3 Sistemas de Duas Máquinas versus Barramento Infinito: Modelo Clássico do Gerador

Antes de abordar o caso geral de um sistema multi-máquinas, considere o sistema composto por duas máquinas e um barramento infinito da Figura 13.

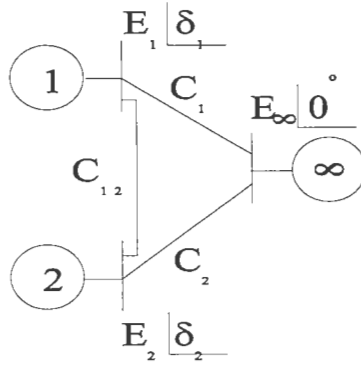


Figura 13: Sistema de Duas Máquinas versus Barramento Infinito

As seguintes equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1 &= \omega_1 \\ M_1 \dot{\omega}_1 &= P_1 - C_1 \sin \delta_1 - D_1 \cos \delta_1 - \\ &- C_{12} \sin(\delta_1 - \delta_2) - D_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2) - T_1 \omega_1 \\ \dot{\delta}_2 &= \omega_2 \\ M_2 \dot{\omega}_2 &= P_2 - C_2 \sin \delta_2 - D_2 \cos \delta_2 - \\ &- C_{12} \sin(\delta_2 - \delta_1) - D_{12} \cos(\delta_2 - \delta_1) - T_2 \omega_2 \end{cases}$$

descrevem o comportamento dinâmico deste sistema. Quando as condutâncias de transferência são desprezadas ( $D_{12} = 0$ ), existe uma Função de Liapunov geral, no senso usual, que pode ser utilizada para os estudos de estabilidade deste sistema. Esta função pode ser facilmente obtida por um processo tradicional de integração e é dada por:

$$\begin{aligned} V(\delta_1, \omega_1, \delta_2, \omega_2) &= M_1 \frac{\omega_1^2}{2} - P_1 \delta_1 - C_1 \cos \delta_1 + D_1 \sin \delta_1 + \\ &M_2 \frac{\omega_2^2}{2} - P_2 \delta_2 - C_2 \cos \delta_2 + D_2 \sin \delta_2 - \\ &- C_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2) + cte \end{aligned}$$

Entretanto quando  $D_{12} \neq 0$  o processo de integração gera uma integral dependente do caminho, o que torna impossível demonstrar que sua derivada, ao longo das trajetórias, é semi-definida negativa.

Para resolver este problema uma nova função energia será proposta e a extensão do Princípio de Invariância será utilizado para estudar a estabilidade deste sistema. Será mostrado que esta função energia é uma Função de Liapunov Estendida quando as condutâncias de transferência  $D_{12}$  são suficientemente pequenas. Para isto,

considere a seguinte função energia:

$$\begin{aligned} W(\delta_1, \omega_1, \delta_2, \omega_2) = & M_1 \frac{\omega_1^2}{2} - P_1 \delta_1 - C_1 \cos \delta_1 + D_1 \sin \delta_1 - \\ & - \beta_1 \omega_1 [P_1 - C_1 \sin \delta_1 - D_1 \cos \delta_1 - C_{12} \sin(\delta_1 - \delta_2) - \\ & D_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2)] + M_2 \frac{\omega_2^2}{2} - P_2 \delta_2 - C_2 \cos \delta_2 + D_2 \sin \delta_2 - \\ & - \beta_2 \omega_2 [P_2 - C_2 \sin \delta_2 - D_2 \cos \delta_2 - C_{12} \sin(\delta_2 - \delta_1) - \\ & D_{12} \cos(\delta_2 - \delta_1)] - C_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2) + cte \end{aligned}$$

onde  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são parâmetros a serem determinados.

Calculando a derivada desta função ao longo das órbitas do sistema encontra-se:

$$-\dot{W} = \begin{bmatrix} P_{11}(\delta_1, \delta_2) \\ \omega_1 \\ P_{12}(\delta_1, \delta_2) \\ \omega_2 \end{bmatrix}^T B \begin{bmatrix} P_{11}(\delta_1, \delta_2) \\ \omega_1 \\ P_{12}(\delta_1, \delta_2) \\ \omega_2 \end{bmatrix} + D_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2)(\omega_1 + \omega_2)$$

onde

$$B = \left[ \begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{12} & B_{22} \end{array} \right]$$

e

$$\begin{aligned} B_{11} &= \left[ \begin{array}{c|c} \beta_1 & -\frac{\beta_1 T_1}{2} \\ \hline -\frac{\beta_1 T_1}{2} & T_1 + \beta_1 [-C_1 \cos \delta_1 + D_1 \sin \delta_1 - C_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2) + D_{12} \sin(\delta_1 - \delta_2)] \end{array} \right] \\ B_{22} &= \left[ \begin{array}{c|c} \beta_2 & -\frac{\beta_2 T_2}{2} \\ \hline -\frac{\beta_2 T_2}{2} & T_2 + \beta_2 [-C_2 \cos \delta_2 + D_2 \sin \delta_2 - C_{12} \cos(\delta_2 - \delta_1) + D_{12} \sin(\delta_2 - \delta_1)] \end{array} \right] \\ B_{12} &= \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{\beta_1}{2} [C_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2) - D_{12} \sin(\delta_1 - \delta_2)] + \frac{\beta_2}{2} [C_{12} \cos(\delta_2 - \delta_1) - D_{12} \sin(\delta_2 - \delta_1)] \end{array} \right] \end{aligned}$$

Observe novamente que a derivada de  $W$  é composta por uma parte quadrática e pelo termo  $D_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2)(\omega_1 + \omega_2)$ . Os parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$  podem ser escolhidos de forma a tornar a parte quadrática definida positiva. Sendo assim, apenas o termo  $D_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2)(\omega_1 + \omega_2)$  será responsável por regiões na qual a derivada de  $W$  poderia ser positiva.

**Exemplo 5.4** Seja o sistema da Figura 13 com  $P_1 = 1.25$ ,  $P_2 = 1.5$ ,  $C_1 = 1.7$ ,  $C_2 = 2.0$ ,  $D_1 = D_2 = 0.1$ ,  $C_{12} = 0.5$ ,  $D_{12} = 0.04$ ,  $T_1 = T_2 = 0.1$  e  $M_1 = M_2 = 0.05$ . As curvas de nível de  $W$  estão apresentadas na Figura 14 onde  $\beta_1 = 0.0111$  e  $\beta_2 = 0.0095$ . Estas curvas de nível foram traçadas no plano  $\omega_1 = \omega_2 = -0.4$ . Observe que a região onde a derivada de  $W$  é positiva é uma pequena região limitada próxima ao ponto de equilíbrio estável. Esta região pertence ao conjunto  $C$  do Teorema 3.1. Para outros planos, esta região torna-se menor ou até mesmo desaparece o que garante que esta região é um conjunto limitado que está próximo ao ponto de equilíbrio estável. Portanto, esta função pode ser utilizada para o estudo da estabilidade deste sistema. A Figura 14 mostra a projeção da estimativa do atrator no plano  $\omega_1 = \omega_2 = -0.4$ .

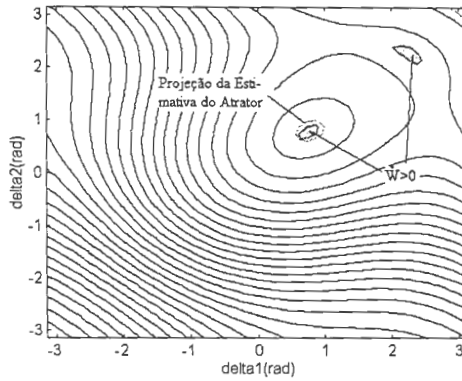


Figura 14: Curvas de nível da Função  $W$  - Sistema de Duas Máquinas versus Barramento Infinito

### 5.4 Sistemas Multimáquinas: Modelo Clássico do Gerador

Seja o sistema composto por  $n$  máquinas onde a  $n$ -ésima máquina é um barramento infinito. Pode-se mostrar, similarmente ao caso de duas máquinas, que a seguinte função energia

$$\begin{aligned}
 W = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ M_i \frac{\omega_i^2}{2} - P_i \delta_i - C_i \cos \delta_i + D_i \sin \delta_i - \right. \\
 \left. - \beta_i \omega_i \left[ P_i - C_i \sin \delta_i - D_i \cos \delta_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} C_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) - \right. \right. \\
 \left. \left. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} D_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) \right] - \sum_{j=i+1}^{n-1} C_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + cte \right\}
 \end{aligned}$$

é uma Função de Liapunov no senso da extensão do Princípio de Invariância se as condutâncias de transferência são suficientemente pequenas. Conseqüentemente, esta pode ser utilizada para estudos de estabilidade transitória em sistemas de potência.

## 6. Conclusão

Neste trabalho a Extensão do Princípio de Invariância de LaSalle foi utilizada como suporte matemático para a obtenção de novas funções de Liapunov. Nesta extensão, permite-se que a derivada da Função de Liapunov, neste caso chamada de Função de Liapunov Estendida, possua derivada positiva em regiões limitadas do espaço de estados. Com isto uma classe maior de problemas pode ser tratada. Neste trabalho propuseram-se Funções de Liapunov Estendidas para alguns modelos de sistemas de potência que não possuem Funções de Liapunov no sentido usual. Mais especificamente, uma Função de Liapunov Estendida foi proposta para o sistema

de uma máquina versus barramento infinito considerando-se as resistências das linhas de transmissão e de armadura do gerador. Tanto o modelo clássico do gerador como o modelo de 1-eixo foram considerados. Obteve-se também uma Função de Liapunov Estendida para um sistema multimáquinas com condutância de transferência. Mostrou-se que estas funções podem ser utilizadas para a obtenção da estimativa da área de atração e do tempo crítico de abertura no estudo de estabilidade transitória de sistemas de potência. Estudos mais profundos são necessários para reduzir-se o conservadorismo das estimativas obtidas, principalmente no caso do modelo de um eixo para o gerador.

Enfim, as aplicações da extensão do Princípio de Invariância de LaSalle em sistemas de potência são inúmeras e certamente existem muitos outros problemas em outras áreas da ciência nos quais este resultado pode ser muito útil.

### Agradecimentos

Os autores agradecem a colaboração do Professor Hildebrando Munhoz Rodrigues do ICMC-USP que trabalhou conosco no desenvolvimento da extensão do Princípio de Invariância e ao aluno de doutorado Flávio Henrique Justiniano Ribeiro da Silva que trabalhou em alguns dos exemplos que estão apresentados neste texto.

### Referências

- [1] F. Brauer and J. A. Nohel. *The qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*. W.A.Benjamin Inc., New York, Amsterdam, 1969.
- [2] H.D. Chiang, F.F. Wu, and P.P. Varaya. A bcu method for direct analysis of power system transient stability. *IEEE Trans. on Power Systems*, pages 1194–1208, Aug 1994.
- [3] J. K. Hale. Dynamical systems and stability. *J. Math. Anal. and Appl.*, 26:39–59, 1969.
- [4] J. K. Hale and S. V. Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, Vol.99, 1993.
- [5] J. P. LaSalle. Some extensions of liapunov's second method. *IRE Trans. on Circuit Theory*, CT-7:520–527, 1960.
- [6] J. P. LaSalle. Asymptotic stability criteria. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Hydrodynamic Instability*, AMS, 13:299–307, 1962.
- [7] J. P. LaSalle. Stability theory for difference equations. studies in ordinary differential equation. *Studies in ordinary differential equations, Stud. in Math., Math. Assoc. of America, Washington, D.C.(Reviewer G.R.Sell)*, 14:1–31, 1977.

- [8] R. K. Miller. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 115(3):400–416, 1965.
- [9] H. M. Rodrigues. Invariança para sistemas não autônomos de equações diferenciais com retardamento e aplicações. Master's thesis, Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 1970.
- [10] H. M. Rodrigues, L. F. C. Alberto, and N. G. Bretas. On the invariance principle. generalizations and applications to synchronism. *Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(5):730–739, Maio 2000.
- [11] H. M. Rodrigues, L. F. C. Alberto, and N. G. Bretas. Uniform invariance principle and synchronization. robustness with respect to parametr variation. *Journal of Differential Equations*, 169(1):228–254, Jan 2001.
- [12] G. Sell. Nonautonomous differential equations and topological dynamics i, ii. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 127:(I)241–262 (II)263–283, 1967.
- [13] M. Slemrod. Asymptotic behavior of a class of abstract dynamical systems. *J. Diff. Equations*, 7(3):584–600, 1970.
- [14] C. Sparrow. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, Vol.41, 1982.