

CHAIM SAMUEL HONIG

**CURSO
DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

Redigido por

Dra. ALCILÉA AUGUSTO HOMEM DE MELLO

SÃO PAULO - 1967

CADEIRA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

DEPTO. DE MATEMÁTICA - FACULDADE

DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS

DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

2ª Tiragem

IME-USP

1989

CHAIM SAMUEL HONIG

**CURSO
DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

Redigido por

Dra. ALCILÉA AUGUSTO HOMEM DE MELLO

SÃO PAULO - 1967

CADEIRA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
DEPTO. DE MATEMÁTICA - FACULDADE
DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS
DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

2ª Tiragem

IME-USP

1989

Capítulo I	1
I.1 - Definições e Exemplos	1
I.2 - Equações Diferenciais de 1ª Ordem: Interpretação Geométrica, Exemplos da Física e da Geometria	2
I.3 - Famílias de Curvas a um Parâmetro	5
I.4 - Métodos Elementares de Resolução de Equações Diferenciais de 1ª Ordem sob Forma Normal - I	7
I.4.1 - Variáveis Separadas (ou Separáveis)	8
I.4.2 - Equações Homogêneas	11
I.5 - Enunciado de um Teorema de Existência e Unicidade	15
I.6 - Sistemas de Equações Diferenciais: Definições e Notações	16
I.7 - Exercícios	20
I.8 - Métodos Elementares de Resolução de Equações Diferenciais de 1ª Ordem sob Forma Normal - II	21
I.8.1 - Equação Linear de 1ª Ordem	21
I.8.2 - Equação de Bernoulli	26
I.9 - Exercícios	29
I.10 - Métodos Elementares de Resolução de Equações Diferenciais de 1ª Ordem sob Forma Normal - III	30
I.10.1 - Equação Diferencial Exata	30
I.10.2 - Fatores Integrantes	37
I.11 - Exercícios	41
I.12 - Métodos de Resolução para algumas Equações Diferenciais de 1ª Ordem, não necessariamente em Forma Normal	42
I.12.1 -	42
I.12.2 - $y = f(y')$	43
I.12.3 - $x = f(y')$	44
I.12.4 - Equação de Clairaut	45
I.12.5 - Equação de Lagrange ou D'Alembert	47

ÍNDICE**PÁGINA**

I.13 - Exercícios	51
Capítulo II - Teoremas de Existência e Unicidade de Soluções	52
II.1 - Equação Diferencial de 1ª Ordem em Forma Normal	52
II.2 - Sistemas de Equações Diferenciais de 1ª Ordem em Forma Normal	61
II.3 - $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$	63
Capítulo III - Equações Diferenciais Lineares	64
III.1 - Equação Diferencial Linear de Ordem n	64
III.2 - Existência e Unicidade das Soluções	65
III.3 - Sistemas Fundamentais de Soluções de uma Equação Linear Homogênea	67
III.4 - Abaixamento da Ordem de uma Equação Diferencial Linear Homogênea na sua Resolução	74
III.5 - Equação Diferencial Linear Homogênea com Coeficientes Constantes	75
III.5.1 - Polinômio Característico com n raízes distintas	76
III.5.2 - Polinômio Característico com raízes múltiplas	81
III.5.3 - $ay'' + by' + c = 0$	86
III.6 - Exercícios	88
III.7 - Equação Diferencial Linear não Homogênea - Método da Variação das Constantes	89
III.8 - Equação Diferencial Linear com Coeficientes Constantes, tendo como 2º Membro um Semi-Polinômio	92
III.10 - Exercícios	100
III.11 - Equação de Euler	100
III.12 -	103
III.13 - $y'' + A_1(x)y' + A_2(x)y = 0$	105
III.14 - Exercícios	107

CAPÍTULO I

I.1 - DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Uma equação diferencial de ordem n é uma relação da forma

$$(I.1) \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

em que x diz-se variável independente, y a variável dependente (que é uma função da variável independente x) e $y', y'', \dots, y^{(n)}$ as derivadas sucessivas de y em relação a x . A função F deve, portanto, estar definida num certo conjunto do espaço R^{n+2} pois consideraremos somente variáveis reais.

Uma tal equação diferencial diz-se estar sob forma normal se estiver na forma

$$(I.2) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

isto é, quando estiver resolvida em relação à derivada de ordem n . Veremos adiante o grande interêsse em considerar equações sob esta forma.

Uma solução da equação (I.1) ou (I.2) é uma função $y(x)$ definida e suficientemente derivável num intervalo, que, substituída na respectiva equação, juntamente com suas derivadas, dê lugar a uma identidade em x .

Assim é que, se nos restringimos a uma equação diferencial de 1ª ordem

$$(I.3) \quad F(x, y, y') = 0$$

uma solução desta equação será uma função $y = y(x)$ definida e derivável num certo intervalo e tal que se tenha, idênticamente, neste intervalo,

$$F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$$

No caso em que esta função é dada implicitamente por uma relação $\Phi(x, y) = 0$, esta relação, por motivos históricos, chama-se integral da equação diferencial.

Pelo que vimos acima, uma equação diferencial de 1ª ordem em forma normal tem o seguinte aspecto

$$(I.4) \quad y' = f(x, y)$$

Vejamos alguns exemplos de equações diferenciais de 1ª ordem pois serão objeto do início de nosso estudo:

1. A equação diferencial $yy' + x = 0$, que está definida para quaisquer x e y , pode ser posta sob forma normal quando $y \neq 0$ e temos, então

$$y' = -\frac{x}{y}$$

2. A equação diferencial $y'^2 + y^2 = 1$ que só terá sentido se tomarmos $|y| \leq 1$ e, nesta faixa, à equação dada correspondem duas equações em forma normal a saber:

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \quad \text{e} \quad y' = -\sqrt{1 - y^2}$$

Realmente, aos pontos externos à faixa $|y| \leq 1$ não correspondem de valor algum de y' enquanto aos pontos internos correspondem dois valores distintos de y' . Neste exemplo, já se começa sentir a vantagem da forma normal.

3. $y'^2 = \log y$ é uma equação diferencial que tem sentido só quando $y \geq 1$ e, como no caso anterior, neste semi-plano, têm-se duas equações diferenciais em forma normal correspondendo à equação dada:

$$y' = \sqrt{\log y} \quad \text{e} \quad y' = -\sqrt{\log y}$$

4. Já a equação diferencial $y'^2 + 1 = 0$ não pode ser verificada para nenhum valor de x e y , não dando lugar a nenhuma equação diferencial sob forma normal. O mesmo se dá com a equação diferencial

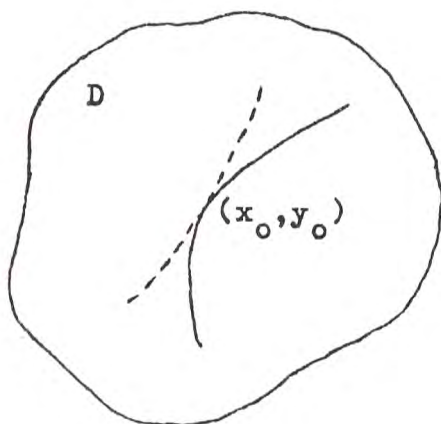
$$e^{yy'} + x^2 = 0.$$

Isto vem reforçar a vantagem de lidarmos com equações sob forma normal, pois, não só eliminamos equações que não admitem solução, como temos, para cada ponto (x, y) , um só valor de y' .

I.2 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1.ª ORDEM: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA, EXEMPLOS DA FÍSICA E DA GEOMETRIA.

Tomando a equação diferencial de 1.ª ordem sob forma normal como em (I.4): $y' = f(x, y)$, se a função f está definida num conjunto D do plano (que é, em geral, um conjunto aberto ou um aberto mais sua fronteira), podemos dar uma interpretação geométrica bastante natural ao problema.

Em cada ponto $(x_0, y_0) \in D$, consideramos a direção cujo coefi-

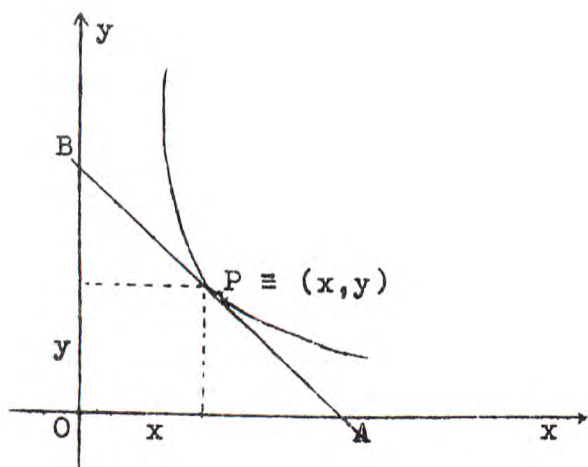


ciente angular seja o número $f(x_0, y_0)$. Sendo assim, a solução que procuramos - a função $y(x)$ tal que $y'(x) = f(x, y(x))$ - corresponderá, no nosso esquema, a uma curva $y = y(x)$ que, em cada um de seus pontos tenha como tangente esta direção.

O leitor, certamente, já entrou em contacto com problemas da Física e da Geometria que nos levam a equações diferençais.

Vejamos alguns dêles em que a equação diferencial envolvida seja de 1ª ordem:

1. Se procurarmos as curvas planas que gozem da seguinte propriedade:



"Cada ponto P da curva é ponto médio do segmento determinado pelos eixos coordenados sôbre a tangente à curva em P", chegaremos, sem dúvida, a uma equação diferencial. De fato, de acôrd - com as notações introduzidas na figura, devemos ter $BP = PA$ e daí teremos $\overline{OA} = 2x$ e $\overline{OB} = 2y$. Mas,

$$y' = \operatorname{tg} BAx = - \operatorname{tg} BAO = - \frac{2y}{2x},$$

donde tiramos a equação diferencial $y' = - \frac{y}{x}$ que caracteriza as curvas procuradas.

Nos pontos em que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, podemos reescrever a equação acima:

$$\frac{y'}{y} = - \frac{1}{x}$$

que equivale a $(\log |y|)' = - (\log |x|)'$

ou seja, $\log |y| + \log |x| = c''$,

em que c'' é uma constante real qualquer. Isto se escreve também como:

$$\log |xy| = c'' \quad \text{ou} \quad |xy| = e^{c''} = c',$$

em que c' é uma constante estritamente positiva, ou ainda, $xy = c$ onde c é uma constante real não nula. Isto é, as curvas procuradas são as hipérboles equiláteras.

Na realidade, a equação diferencial admite ainda a solução $y \equiv 0$, que não satisfaz o problema geométrico. Isto é frequente quando se examinam casos concretos: aparecem soluções que, embora satisfazendo à equação diferencial, são estranhas ao problema de partida.

De passagem, observamos que, por todo ponto (x_0, y_0) do plano, fora dos eixos coordenados, passa uma curva (e uma só) que responde ao problema, precisamente aquela de equação

$$y = \frac{x_0 y_0}{x}$$

Se nos referirmos às soluções da equação diferencial $y' = -\frac{y}{x}$, isto é verdade ainda que incluíssemos pontos da forma $(x_0, 0)$ pelos quais passa a solução $y \equiv 0$.

2. A lei da variação de quantidade de uma substância radioativa de meia vida conhecida também pode ser obtida pela resolução de uma equação diferencial de 1ª ordem. De fato, seja T a meia vida da substância em foco (T = intervalo de tempo em que uma certa quantidade desta substância se reduz à metade) e seja $x(t)$ a quantidade de substância existente no instante t . Supondo que esta variação seja proporcional - (com constante de proporcionalidade $-k$, onde $k > 0$) à quantidade de substância, podemos escrever a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -kx.$$

Pela definição, temos sempre $x > 0$, podemos então escrever:

$$\frac{dx}{x} = -k dt \quad \text{ou} \quad \log x = -kt + c',$$

onde c' é uma constante qualquer, ou ainda:

$$x(t) = c e^{-kt},$$

onde a constante c sempre positiva tem o seguinte sentido:

$$c = x(0) = x_0 = \text{quantidade de matéria existente no instante } t = 0.$$

Completamos o problema relacionando k e T : pelo significado de T , podemos escrever

$$\frac{1}{2} = e^{-kT}$$

donde

$$k = \frac{\log 2}{T}$$

Em termos da meia vida, a solução tem a forma:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{T} \log 2}$$

No caso do rádio, por exemplo, em que $T = 1600$, tem-se

$$x = x_0 e^{-0,00043 t}$$

Examinando agora a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

independentemente de significados físicos e suas soluções

$$x = c e^{-kt},$$

em que c pode então assumir qualquer valor real, observamos que por to do ponto (t_0, x_0) passa uma e única solução da equação diferencial, aque la que corresponde à constante

$$c = x_0 e^{kt_0}$$

1.3 - FAMÍLIAS DE CURVAS A UM PARÂMETRO

Em cada um dos dois exemplos precedentes, vimos que as soluções de uma equação diferencial de 1ª ordem eram tôdas as curvas de uma família de curvas a um parâmetro. É natural, portanto, perguntar se: dada uma família de curvas dependendo de um parâmetro existirá uma equação diferencial de 1ª ordem da qual as curvas dadas sejam soluções?

No caso em que esta família é dada pela equação

$$\phi(x, y, c) = 0,$$

o programa que temos para responder à pergunta acima é o seguinte: se fôr possível entre as duas relações

$$\begin{cases} \phi(x, y, c) = 0 \\ \phi'_x(x, y, c) + \phi'_y(x, y, c)y' = 0 \end{cases}$$

(a 1ª é a equação da família e a 2ª obtida da 1ª derivando-se esta em relação a x , onde se considera y como função de x), eliminar o parâmetro c , a relação obtida

$$F(x, y, y') = 0$$

será a equação diferencial procurada.

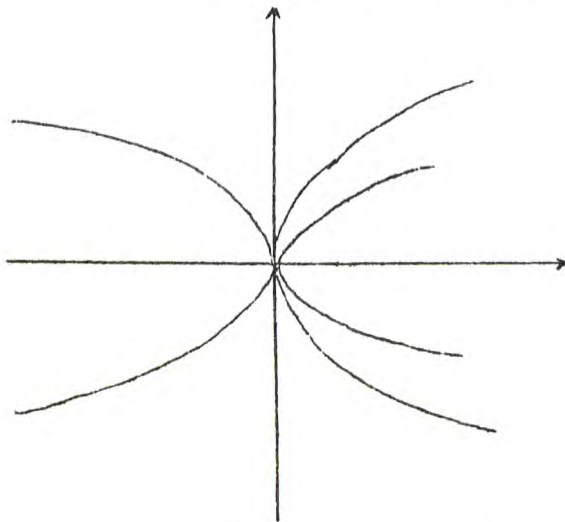
Por exemplo, seguindo o programa acima para a família de parábolas

$$y^2 = 2cx ,$$

devemos eliminar o parâmetro c entre as equações:

$$\begin{cases} y^2 = 2cx \\ 2yy' = 2c \end{cases}$$

donde tiramos $y^2 = 2xyy'$ ou $y = 2xy'$ que é a equação diferencial da família dada.



Analogamente, para a família de retas que passam pela origem, com exceção do eixo dos y , dada pela equação $y = cx$, tem-se, do mesmo modo, a equação diferencial

$$y = xy' \quad \text{ou} \quad y' = \frac{y}{x}$$

Já para a família de retas paralelas à diagonal:

$$y = x + c ,$$

obtem-se, só por derivação, sua equação diferencial $y' = 1$.

Uma outra pergunta que se responde com a resolução de equações diferenciais é a seguinte: dada uma família de curvas planas dependendo de um parâmetro, quais as suas trajetórias ortogonais? As trajetórias ortogonais serão uma segunda família de curvas de tal modo que sempre que duas curvas, uma de cada família, se encontrem, elas se cortam perpendicularmente.

Ora, sendo assim, se $F(x,y,y') = 0$ é a equação diferencial da família dada, as trajetórias ortogonais devem satisfazer a equação diferencial

$$F(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0 ,$$

pois, se no ponto (x,y) a curva da família dada tem tangente com coeficiente angular y' , a trajetória ortogonal por este ponto terá tangente perpendicular à primeira e, então, com coeficiente angular $-\frac{1}{y'}$.

Procuremos, a título de exemplo, as trajetórias ortogonais da família de parábolas $y^2 = 2cx$, cuja equação diferencial é, como acabamos de ver,

$$y' = \frac{y}{2x} .$$

Sendo assim, as trajetórias ortogonais serão as soluções da equação diferencial

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y}{2x} \quad \text{ou} \quad yy' + 2x = 0$$

ou ainda, $\frac{y^2}{2} + x^2 = c$, onde c é uma constante positiva. Escrevendo sob a forma

$$\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{2c} = 1,$$

vemos que as trajetórias ortogonais são elipses.

I.4 - MÉTODOS ELEMENTARES DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM SOB FORMA NORMAL - I

Consideremos a equação diferencial (I.4)

$$y' = f(x, y)$$

e vejamos alguns casos particulares para os quais existem métodos elementares de resolução. Por métodos elementares de resolução entendemos a redução da resolução desta equação diferencial a quadraturas, ou seja, ao cálculo de integrais.

O caso mais simples é aquele em que a função f não dependa de y , tem-se então

$$(I.5) \quad y' = f(x)$$

cujas soluções são as primitivas de f :

(I.6)

$$y = \int f(x) dx + c$$

ou, se quisermos, explicitamente, a solução que em x_0 assuma o valor y_0 teremos:

(I.7)

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(s) ds$$

Uma equação diferencial de 1ª ordem pode aparecer sob outras formas, por exemplo:

(I.8)

$$X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0$$

que, nos pontos onde $Y(x, y) \neq 0$, toma a forma normal

$$y' = -\frac{X(x, y)}{Y(x, y)}$$

Supomos para isto que X e Y sejam funções contínuas em D (aberto do plano, eventualmente, mais sua fronteira).

Sob a forma (I.8) o tratamento das variáveis x e y é mais simétrico pois, nos pontos em que $X \neq 0$, podemos considerar y como variável independente e x como função de y , pondo

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$$

Uma outra forma é a

$$(I.9) \quad \frac{dx}{A(x,y)} = \frac{dy}{B(x,y)} ,$$

que, posta sob forma normal tendo x como variável independente, fica

$$y' = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}$$

Neste parágrafo veremos dois casos de resolução destas equações. Voltaremos a isto em outras condições.

I.4.1 - VARIÁVEIS SEPARADAS (OU SEPARÁVEIS): uma equação diz-se de variáveis separadas (ou separáveis) se a função $f(x,y)$ se apresenta como o produto de uma função de x por uma função de y . Resolvamos, então a equação diferencial

$$(I.10) \quad y' = f(x) g(y) .$$

Admitindo possíveis, executamos as seguintes passagens:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

donde

(I.11)

$$\boxed{\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + c}$$

onde c é uma constante real qualquer.

Dando nomes às primitivas, podemos escrever (I.11) como:

$$(I.12) \quad G(y) = F(x) + c$$

Vejamos agora onde é válido o que se fez. É preciso considerar x e y em intervalos nos quais se tenham, respectivamente, f e g contínuas e $g(y) \neq 0$. Mas a equação está também definida ainda que g se anule. Seja, então y_0 um valor que anule g , isto é, tal que $g(y_0) = 0$,

nestas condições, a função constante $y \equiv y_0$ é uma solução da equação dada, pois temos $y' = 0$ que satisfaz a equação (I.10) para qualquer x . Geometricamente, quando $g(y_0) = 0$, a reta $y = y_0$ é solução da equação

A equação diferencial $y' = xy$ pode ser resolvida deste modo, obtendo-se, quando $y \neq 0$,

$$\frac{dy}{y} = x dx \quad \text{ou} \quad \int \frac{dy}{y} = \int x dx + c''$$

ou ainda

$$\log |y| = \frac{1}{2} x^2 + c''$$

donde

$$|y| = c' e^{\frac{x^2}{2}}$$

com $c' > 0$ e, finalmente, $y = c e^{\frac{x^2}{2}}$, onde $c \neq 0$.

Pelo que vimos acima, podemos incluir o valor $c = 0$, pois $g(0) = 0$ e a reta $y = 0$ também é uma solução.

Também aqui observamos que por todo ponto (x_0, y_0) do plano passa uma, e uma só, curva solução da equação. Será, precisamente, aquela correspondente ao valor

$$c_0 = y_0 e^{-\frac{x_0^2}{2}}$$

da constante c .

Tomemos, agora, a equação $y' = \sqrt{1 - y^2}$ que surgiu no exemplo 2 do § I.1. Esta equação só está definida nos pontos da faixa $|y| \leq 1$ e é de variáveis separadas. Temos então que, para $1 - y^2 \neq 0$,

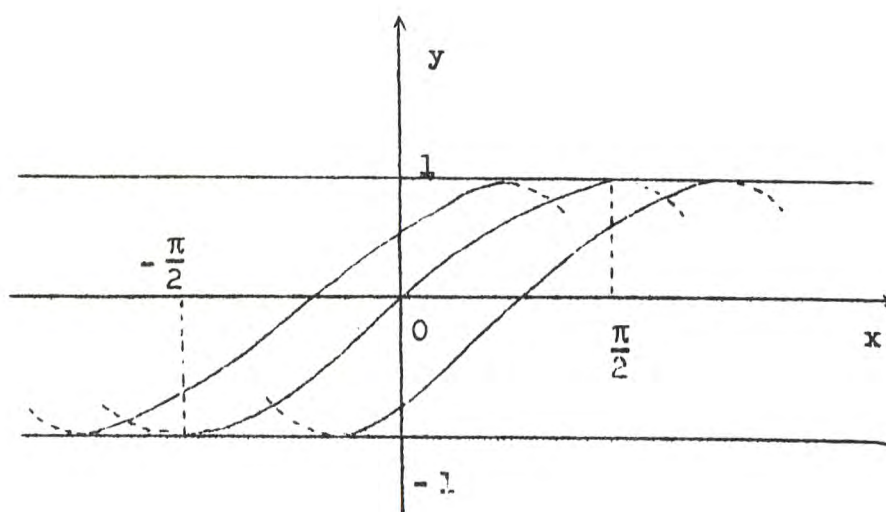
$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx \quad \text{ou} \quad \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dx + c$$

ou $\arcsen y = x + c$ que, na forma explícita nos dá $y = \sen(x + c)$. Dada a constante c , esta função só será solução da equação nos intervalos em que $y' \geq 0$ e, portanto, nos intervalos

$$(2k - \frac{1}{2})\pi \leq x + c \leq (2k + \frac{1}{2})\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Os arcos pontilhados, descritos pelas mesmas funções nos intervalos que eliminamos, são as soluções da equação diferencial

$$y' = -\sqrt{1 - y^2}$$



Temos ainda as soluções $y = 1$ e $y = -1$ que são as retas - nas quais

$$g(y) = \sqrt{1 - y^2} = 0.$$

Observa-se, então, um fato diferente dos precedentes: embora nos pontos internos à faixa $|y| < 1$, tenhamos uma e única curva solução (se consideramos somente as curvas soluções da equação

$$y' = \sqrt{1 - y^2},$$

desenhadas com linha cheia na figura), pelos pontos das retas $y = \pm 1$ passam sempre duas soluções. Além disso, se quisermos que a cada ponto (x_0, y_0) do interior da faixa corresponda um único valor de c , devemos restringir a constante a um intervalo $0 \leq c < 2\pi$.

Já temos agora exemplos suficientes para ilustrar a definição de solução geral de uma equação diferencial de 1ª ordem sob forma normal. Dada a equação diferencial $y' = f(x, y)$, onde f é definida no aberto D (eventualmente mais a fronteira, o que ficará sub-entendido daqui por diante), uma família de curvas $y = y(x, c)$, dependendo de um parâmetro c , diz-se solução geral da equação (I.4) quando, e só quando, goza das seguintes propriedades:

SG 1. a curva da família correspondente ao valor c do parâmetro é solução da equação (I.4), para todo c ;

SG 2. por todo ponto de D passa uma, e uma só, curva da família.

Esta última condição é equivalente à seguinte:

SG 2'. é possível resolver a equação da família em relação a c , obtendo-se $c = c(x, y)$.

De fato, se vale SG 2 a função $c(x,y)$ é aquela que ao ponto $(x,y) \in D$ faz corresponder o valor c relativo à curva da família que passa por (x,y) . Reciprocamente, se SG 2' está satisfeita, dado um ponto $(x_0, y_0) \in D$, consideramos a curva da família correspondente ao valor c_0 do parâmetro dado por $c_0 = c(x_0, y_0)$ e esta curva passará pelo ponto (x_0, y_0) satisfazendo SG 2.

Uma equação diferencial pode admitir soluções excepcionais que não estejam incluídas na solução geral como foi visto no caso da equação

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

em que, além da solução geral $y = \sin(x + c)$, com $0 \leq c < 2\pi$, apareciam as soluções $y = 1$ e $y = -1$.

I.4.2 - EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS: uma equação diferencial do tipo (I.4) $y' = f(x,y)$ diz-se homogênea se $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$, para todo $\lambda > 0$.

São exemplos de equações homogêneas as equações da forma: $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$ - aliás, na realidade, todas as equações homogêneas são deste tipo, pois se fizermos $\lambda = \frac{1}{x}$, teremos

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ou ainda, equações da forma

$$y' = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \quad \text{ou} \quad M(x,y)dx - N(x,y)dy = 0,$$

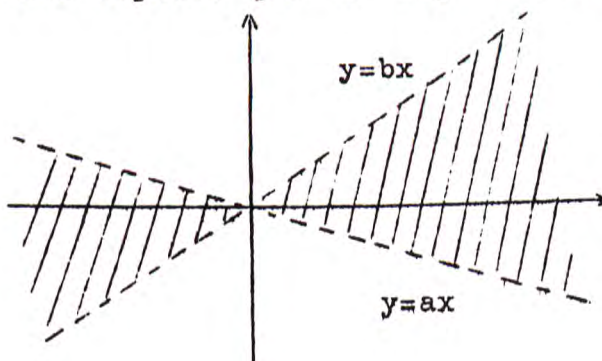
em que M e N sejam funções homogêneas de mesmo grau. Lembramos que uma função M diz-se homogênea de grau r se para todo $\lambda > 0$ se tem:

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r M(x,y).$$

Para resolução, consideremos as equações homogêneas sob a forma

$$(I.13) \quad y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

onde supomos que h seja uma função contínua no intervalo $a < \frac{y}{x} < b$



(podendo ser a reta toda), o que no plano corresponde à região D interna ao ângulo formado pelas retas $y = ax$ e $y = bx$. Façamos a transformação de variáveis de (x,y) para (x,z) , em que

$$z = \frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad y = zx.$$

Como $y' = z'x + z$, a equação (I.13) se reduzirá à forma

$$(I.14) \quad z'x + z = h(z)$$

que é de variáveis separáveis, pois podemos reescrevê-la como:

$$z'x = h(z) - z \quad \text{ou}$$

$$(I.15) \quad \frac{dz}{h(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

com a ressalva, já feita em I.4.1, dos pontos z_0 tais que

$$g(z_0) = h(z_0) - z_0 = 0$$

Então, excluídos estes pontos, teremos:

$$\int \frac{dz}{h(z) - z} = \log |x| + c,$$

$$\text{ou} \quad H(z) = \log |x| + c, \quad \text{ou ainda}$$

$$(I.16) \quad H\left(\frac{y}{x}\right) = \log |x| + c,$$

que, segundo as notações introduzidas, é uma integral da equação dada.

De acordo com o que vimos em I.4.1, se z_0 é tal que, $g(z_0) = h(z_0) - z_0 = 0$, isto é, tal que $h(z_0) = z_0$, então, $z \equiv z_0$ é solução da equação (I.15) ou, o que é o mesmo, se o ponto $(x_0, y_0) \in D$ é tal que

$$h\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \frac{y_0}{x_0},$$

então a reta pela origem $\frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0}$ é solução da equação (I.13).

Vejamos alguns exemplos de equações homogêneas e sua resolução:

1. A equação $y' + \frac{x+y}{x+2y} = 0$, que tem como campo de definição o conjunto $D = \text{plano menos a reta } x + 2y = 0$, é uma equação homogênea. Podemos, então, excluídos os pontos para os quais

$$\frac{y}{x} \neq -\frac{x+y}{x+2y},$$

usar a transformação $y = zx$, obtendo

$$z'x + \frac{1 + 2z + 2z^2}{1 + 2z} = 0$$

ou

$$\frac{1 + 2z}{1 + 2z + 2z^2} dz + \frac{dx}{x} = 0$$

cujas soluções serão:

$$\frac{1}{2} \log |1 + 2z + 2z^2| + \log |x| = c'$$

ou $(1 + 2z + 2z^2)x^2 = c$, onde $c > 0$, e fazendo a substituição inversa $z = \frac{y}{x}$, tem-se:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 = c \quad (c > 0),$$

que é a integral geral da equação dada.

Voltando para verificar os pontos em que $h(\frac{y}{x}) = \frac{y}{x}$, verificamos que isto só se dá quando $(x + y)^2 + y^2 = 0$ o que se verifica somente na origem que já excluimos de D . Então, por todo ponto de D , passa uma e uma só das curvas dadas na integral geral.

2. A equação $x dy + (x \sqrt{\frac{y}{x} - 1} - y) dx = 0$ é uma equação homogênea, pois as funções

$$x \quad \text{e} \quad x \sqrt{\frac{y}{x} - 1} - y$$

são homogêneas de 1º grau. Esta equação está definida sempre que

$\frac{y}{x} - 1 \geq 0$ ou seja no semiplano D dos pontos, tais que $y \geq x$. Os pontos excepcionais para os quais

$$\frac{y}{x} = h(\frac{y}{x})$$

são aqueles para os quais

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x} - 1} - \frac{y}{x} = 0,$$

ou seja, são os pontos da reta $y = x$. Esta é, então, uma solução da equação dada e que pode não estar enquadrada na integral geral, que obtemos a seguir.

Se $y = zx$, teremos $dy = xdz + zdx$, donde a equação pode ser escrita como:

$$x^2 dz + xzdx + \left[x \sqrt{z - 1} - zx \right] dx = 0$$

ou
$$\frac{dz}{\sqrt{z - 1}} + \frac{dx}{x} = 0$$

ou
$$2 \sqrt{z - 1} + \log |x| = c,$$

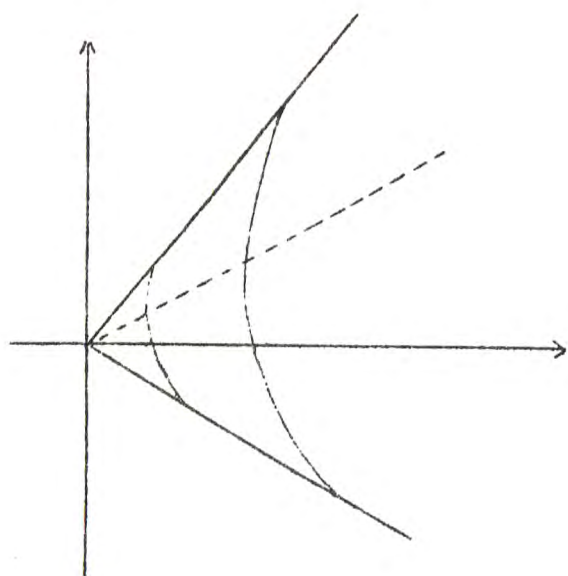
isto é,
$$2 \sqrt{\frac{y}{x} - 1} + \log |x| = c,$$

que é a integral geral da equação dada.

Aqui também temos, por todo ponto interior a D uma e única - solução da equação.

As soluções das equações homogêneas admitem uma caracterização geométrica que passamos a estudar.

De fato, sendo $H\left(\frac{y}{x}\right) = \log |x| + c$ a integral geral da equação diferencial homogênea



$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$, tomemos uma curva correspondente ao valor c_0 da constante. Consideremos a curva homotética a esta em relação à origem e de razão $\lambda \neq 0$, então esta segunda curva terá equação

$$H\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \log |\lambda x| + c_0,$$

ou seja,

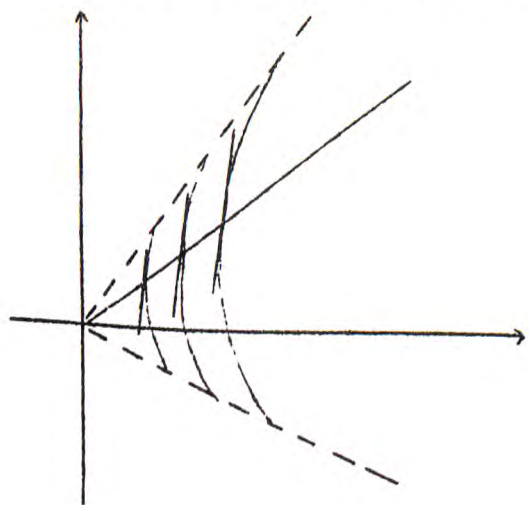
$$H\left(\frac{y}{x}\right) = \log |x| + (c_0 + \log |\lambda|)$$

que é uma outra solução da equação, correspondente ao valor $c_0 + \log |\lambda|$ do

parâmetro. Reciprocamente, pelas mesmas expressões, vê-se que duas soluções quaisquer destas equações são homotéticas uma da outra em relação à origem.

Vejamos que esta é uma característica das soluções de equações homogêneas verificando que é verdadeiro o seguinte fato, recíproco - do anterior: dado um ângulo com vértice na origem e, neste ângulo, uma família de curvas diferenciáveis, homotéticas entre si em relação à origem de tal modo que uma semireta pela origem, contida neste ângulo, encontre cada uma das curvas da família num só ponto, então a equação diferencial destas curvas é uma equação homogênea.

De fato, sendo as curvas homotéticas, nos pontos de uma reta



pela origem, todas as curvas da família terão tangentes paralelas, isto é, o coeficiente angular y' no ponto (x, y) depende da reta a que ele pertence e, portanto, depende da razão $\frac{y}{x}$, isto é,

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right),$$

isto é, a equação diferencial das curvas é homogênea.

EXERCÍCIO - O leitor pode verificar como exercício que a resolução de uma equação diferencial do tipo:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right),$$

em que $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, pode se reduzir à resolução duma equação homogênea nas variáveis (X, Y) dadas pelas transformações:

$$x = X + r$$

$$y = Y + s$$

em que r e s são soluções do sistema

$$\begin{cases} ar + bs + c = 0 \\ a'r + b's + c' = 0 \end{cases}$$

I.5 - ENUNCIADO DE UM TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Interrompamos aqui a exposição de métodos de resolução da equação $y' = f(x, y)$ para estudar o problema de existência de soluções.

Nos exemplos que temos visto, com algumas exceções, vimos que por todo ponto de D passava uma e uma única solução. Concluimos isto, no entanto, diante de todas as soluções da equação.

Existem, porém, alguns teoremas que, em determinados casos, garantem a priori a existência e a unicidade de soluções. Em capítulos vindouros, daremos alguns destes enunciados com demonstrações. Como ilustração apenas, vejamos agora, um destes teoremas numa forma bem simples embora perdendo um pouco em sua generalidade:

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE I: | Se a função f , definida num conjunto D , for derivável em relação a y , com derivada contínua, então, por todo ponto de D , passa uma, e uma só, solução da equação diferencial $y' = f(x, y)$.

Voltando a analisar os exemplos vistos, verifica-se, por exemplo, que a equação

$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$

apresenta unicidade de solução nos pontos em que $|y| < 1$ embora não apresente nos pontos em que $y = \pm 1$.

De fato,

- como o teorema de existência e unicidade - e mais ainda suas demonstrações - com uma simples tradução.

Passamos, então, a usar as seguintes notações:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix},$$

$$(I.19) \quad \vec{f}(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

de acordo com a qual o sistema (I.18) toma a forma:

$$(I.20) \quad \vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

Note-se a semelhança entre o sistema (I.20) e a equação diferencial (I.4).

É de se esperar, então, que dados x_0 e o vetor

$$\vec{y}^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{pmatrix}$$

existe uma, e única, função vetorial $\vec{y}(x)$ - isto é, a função $y_1(x), \dots, y_n(x)$ - que seja solução da equação (I.20) e tal que

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}^0$$

isto é,

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \dots, \quad y_n(x_0) = y_n^0$$

Veremos que isto se dá sob condições análogas às do teorema enunciado no último parágrafo.

A importância do estudo de uma equação diferencial como (I.20) é acrescida com o fato de que qualquer equação diferencial de ordem n pode ser posta sob esta forma.

Tal sistema diz-se em forma normal se estiver resolvido em relação às derivadas de ordem m , isto é:

$$(I.25) \quad y_i^{(m)} = f_i(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(m-1)}, \dots, y_n^{(m-1)}), \quad i=1, 2, \dots, n$$

Também estes sistemas podem ser reduzidos a sistemas de equações diferenciais de 1ª ordem.

Vejamos um exemplo de sistemas do tipo (I.25) de três equações de 2ª ordem, que aparece na Dinâmica: se

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

é o vetor posição no instante t de um ponto material de massa m e se F_x , F_y e F_z são as componentes de $\vec{F}$ (campo de forças), tem-se, em forma vetorial:

$$(I.26) \quad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F},$$

que equivale a um sistema de três equações de 2ª ordem:

$$(I.27) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z \end{cases}$$

e este, por sua vez, reduz-se a um sistema de 6 equações de 1ª ordem, introduzindo-se as variáveis:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad y_1 = y, \quad y_2 = \dot{y}, \quad z_1 = z, \quad z_2 = \dot{z},$$

o sistema seria o seguinte:

$$(I.28) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ m\dot{x}_2 = F_x \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ m\dot{y}_2 = F_y \\ \dot{z}_1 = z_2 \\ m\dot{z}_2 = F_z \end{cases}$$

e temos então o seguinte resultado: sob as condições do teorema de existência e unicidade, fixados o instante t_0 , a equação no instante $t_0 : (x_0, y_0, z_0)$ e a velocidade nesse instante: $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ teremos uma única função $r(t)$ que satisfaça a equação (I.26).

I.7 - EXERCÍCIOS

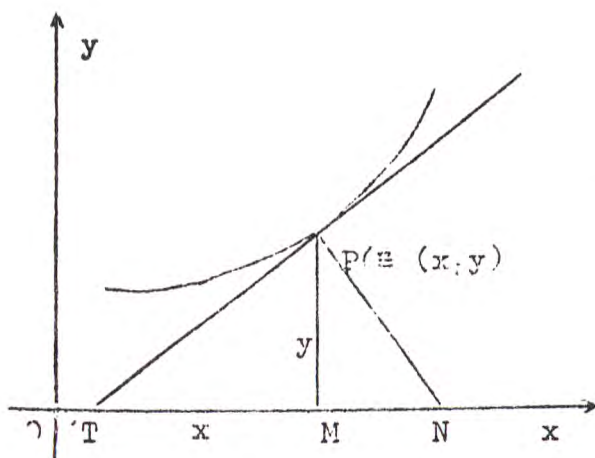
1. Mostrar que $y = c e^x + x^2 + 2x + 2$ é uma solução da equação $y' = y - x^2$.
2. Mostrar que $y = 5 e^x$, $y = \frac{1}{2} e^{-x}$, $y = 8$ são soluções da equação diferencial $y''' - y' = 0$.
3. Mostrar que $x = \frac{1}{4} (2t^2 + 6t + 7)$ satisfaz a equação diferencial $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = t^2$.
4. Mostrar que $y = A \sin(2x + B)$ é uma solução de $y'' + 4y = 0$.
5. Resolver as seguintes equações diferenciais:
 - a) $y' = \frac{xy}{x - 1}$
 - b) $e^{x^2+y} dx + \frac{y}{x} dy = 0$
 - c) $x y y' = (x + 1)(y + 1)$
6. Idem:
 - a) $y' = \frac{x^2 + y^2}{2 x^2}$
 - b) $y' = \frac{x + y}{x - y}$
 - c) $y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$
7. Determinar a equação diferencial de todas as circunferências do plano, que passam pelos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$.
8. Determinar as trajetórias ortogonais das seguintes famílias de curvas, fazendo um esboço gráfico:
 - a) $x^2 - y^2 = c$

$$b) \quad cx^2 + y^2 = 1$$

$$c) \quad 3x + 2y = c$$

9. Dada a equação $y'' = y y'$, reduzi-la a um sistema de equações de 1ª ordem.

10. Sendo P um ponto numa curva, na figura, PT é a tangente à curva em P e PN perpendicular a PT .



O segmento PT é chamado segmento da tangente à curva em P , sua projeção TM , sobre o eixo dos x , é chamada subtangente; o segmento PN diz-se segmento da normal à curva em P e sua projeção MN , sobre o eixo dos x , é a subnormal. Sendo assim, determinar as curvas tais que, em cada ponto, a subnormal tenha o valor constante a .

I.8 - MÉTODOS ELEMENTARES DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM SOB FORMA NORMAL - II

I.8.1. - EQUAÇÃO LINEAR DE 1ª ORDEM: uma equação diferencial linear de 1ª ordem é uma equação do tipo

$$(I.29) \quad y' + p(x)y = q(x),$$

que é da forma (I.4) com $f(x, y) = -p(x)y + q(x)$.

Suponhamos que as funções p e q sejam contínuas num intervalo $]a, b[$ de extremidades finitas ou não. Como, para a equação (I.29), tem-se $f'_y = -p(x)$ que é contínua na faixa $a < x < b$ e y qualquer, pelo teorema de existência e unicidade enunciado no § I.5, conclui-se que por todo ponto desta faixa passa uma, e uma só, solução da equação linear.

Vejamos três modos de determinar tais soluções:

A. Multiplicando a equação dada pela função

$$e^{\int p(x) dx},$$

que nunca se anula, teremos:

$$y' e^{\int p(x) dx} + p(x)y e^{\int p(x) dx} = q(x) e^{\int p(x) dx},$$

que pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx} \left[y e^{\int p(x) dx} \right] = q(x) e^{\int p(x) dx},$$

então

$$y e^{\int p(x) dx} = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + c,$$

donde a solução da equação:

$$(I.30) \quad y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + c \right].$$

Estas soluções têm, portanto, a seguinte forma:

$$(I.31) \quad y = c A(x) + B(x)$$

A função $A(x) = e^{-\int p(x) dx}$ nunca se anula, então se quisermos determinar qual a curva de (I.30) que passa pelo ponto (x_0, y_0) , $a < x_0 < b$, basta considerar aquela para a qual a constante c tenha o valor c_0 dado por

$$c_0 = \frac{y_0 - B(x_0)}{A(x_0)}$$

que está bem determinado, pois $A(x_0) \neq 0$. A expressão (I.3) dá-nos então a solução geral da equação (I.29). A solução geral sob a forma de Cauchy - explicitamente em termos das condições iniciais: $y(x_0) = y_0$ - será a seguinte, como se pode verificar, sem dificuldade:

$$(I.32) \quad y = e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt} \left[\int_{x_0}^x q(t) e^{\int_{x_0}^t q(s) ds} dt + y_0 \right]$$

Como exemplo, vejamos a resolução da equação diferencial

$$xy' + 2y - x^4 = 0,$$

que assume a forma de equação linear quando se escreve:

$$y' + \frac{2}{x} y = x^3$$

A região a ser considerada deve excluir $x = 0$, sendo então o plano menos o eixo dos y .

Aplicando a fórmula (I.30) em que $p(x) = \frac{2}{x}$ e $q(x) = x^3$, obtem-se, como solução geral da equação dada:

$$y = \frac{x^4}{6} + \frac{c}{x^2}$$

B. O segundo método para resolução de (I.29) explora as propriedades de linearidade desta equação. Façamos algumas considerações em torno disto. Em primeiro lugar, vejamos uma justificação para a denominação que se deu à equação (I.29). De fato, se considerarmos o funcional F que a toda função y contínua e derivável no intervalo $]a, b[$ faz corresponder a função $F[y]$ definida como:

$$(I.33) \quad F[y] = y' + p(x)y ,$$

vemos que este funcional é linear, isto é:

$$F[y_1 + y_2] = F[y_1] + F[y_2]$$

e $F[cy] = c F[y]$, em que c é uma constante.

Uma solução da equação (I.29) será, então, uma função y tal que $F[y] = q(x)$.

Como F é linear, podemos estabelecer uma analogia com as equações lineares da álgebra e tentar aqui o mesmo que se faz lá, resolvendo, inicialmente, a equação homogênea $F[y] = 0$.

É o que faremos. Antes, porém, façamos uma observação: a solução geral da equação (I.29) pode ser obtida como soma da solução geral da equação homogênea $F[y] = 0$, com uma solução particular da equação dada.

Começemos, então, pela equação linear homogênea

$$(I.34) \quad y' + p(x)y = 0 ,$$

que é uma equação de variáveis separáveis e cuja solução geral pode ser encontrada como foi visto em I.4.1.

Escreve-se:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx ,$$

donde

$$\log |y| = - \int p(x)dx + c'$$

ou

$$|y| = c e^{-\int p(x)dx} , \quad c > 0$$

ou

$$y = c e^{-\int p(x)dx} , \quad c \neq 0 .$$

Como $g(y) = y$, a reta $y = 0$ é também solução e podemos escrever, como solução geral da equação linear homogênea (I.34):

$$(I.35) \quad y = c e^{-\int p(x) dx},$$

c constante real qualquer.

Neste ponto, se fôr conhecida uma solução particular $\bar{y}$ da equação dada (I.29), a solução geral será $y + \bar{y}$, onde y é dado em (I.35). Caso contrário, usaremos o processo da variação das constantes para determinar a solução geral procurada. Este processo consiste no seguinte: em (I.35), admitamos que c seja uma função $c(x)$ e procuremos as soluções de (I.29) dentre as funções da forma:

$$(I.36) \quad y = c(x) e^{-\int p(x) dx}$$

De fato, para que uma tal função seja solução de (I.29), devemos ter:

$$c'(x) e^{-\int p(x) dx} - c(x)p(x) e^{-\int p(x) dx} + p(x)c(x) e^{-\int p(x) dx} = q(x),$$

ou:

$$c'(x) = q(x) e^{\int p(x) dx},$$

donde:

$$c(x) = \int q(x) e^{\int p(x) dx} + c,$$

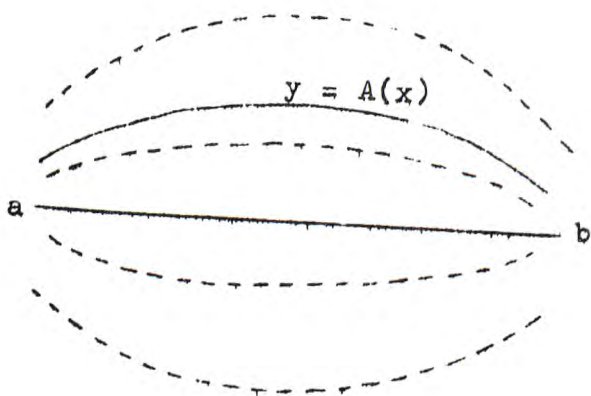
que, substituída em (I.36), reproduz a fórmula (I.30) da solução geral de (I.29).

Usando as notações de (I.31), podemos ver como são estas curvas, geomêtricamente. As soluções da equação homogênea (I.34) serão as curvas $y = c A(x)$.

Reciprocamente, dada uma função $A(x)$ derivável em $]a, b[$ e que nunca se anule, as curvas

$$y = c A(x)$$

serão soluções de uma equação diferencial linear homogênea de 1ª ordem. De fato, seguindo o que se viu no § I.3 a equação diferencial da família de curvas $y = c A(x)$ é obtida pela eliminação do parâmetro c entre as equações:



$$y = c A(x) \quad \text{e} \quad y' = c A'(x) ,$$

então

$$c = \frac{y}{A(x)} \quad \text{e} \quad y' - \frac{A'(x)}{A(x)} y = 0 \quad \text{é a equação da família ,}$$

que é uma equação diferencial de 1ª ordem linear homogênea.

As soluções da equação linear com 2º membro (I.29), são obtidas das anteriores $y = c A(x)$, somando a cada uma delas a função $B(x)$.

Também aqui, dadas as funções $A(x)$ e $B(x)$ deriváveis em $]a, b[$ de modo que $A(x)$ nunca se anule, a família de curvas

$$y = c A(x) + B(x)$$

tem como equação diferencial a equação

$$y' - \frac{A'(x)}{A(x)} y = - \frac{A'(x)}{A(x)} B(x) + B'(x) ,$$

que é uma equação diferencial linear de 1ª ordem.

Deve-se ainda observar que, em cada um dos casos acima, dados x_0 : $a < x_0 < b$ e y_0 qualquer, existe sempre uma curva da família que passa pelo ponto (x_0, y_0) e esta curva é única.

C. O terceiro método para resolução da equação (I.29), consiste em fazermos a introdução de duas variáveis dependentes u e v tomando y como seu produto:

$$(I.37) \quad y = uv$$

A equação (I.29) ficará então:

$$uv' + u'v + p(x) uv = q(x) ,$$

ou

$$uv' + v [u' + p(x)u] = q(x) ,$$

e esta pode ser decomposta em duas equações diferenciais, a saber:

$$(I.38) \quad u' + p(x)u = 0$$

e

$$(I.39) \quad uv' = q(x) ,$$

onde em (I.39) u é uma solução particular não nula de (I.38). As equações (I.38) e (I.39) são ambas de variáveis separáveis. A equação (I.38) é a mesma (I.34) e podemos tomar em (I.35) a solução correspondente a $c = 1$:

$$(I.40) \quad u = e^{-\int p(x) dx}$$

Substituindo esta em (I.39) temos:

$$v' = q(x) e^{\int p(x) dx}$$

donde

$$(I.41) \quad v = \int q(x) e^{\int p(x) dx} + c .$$

A solução será obtida levando-se (I.40) e (I.41) em $y = uv$ e teremos, novamente (I.30).

O leitor pode verificar diretamente, que nada se obtém de novo, se considerarmos uma outra solução particular de (I.38) ao invés daquela escolhida (I.40).

I.8.2 - EQUAÇÃO DE BERNOULLI : é a equação diferencial de 1ª ordem, do tipo

$$(I.42) \quad y' + p(x)y = q(x) y^{\alpha} , \quad \alpha \neq 0, 1 ,$$

em que α é um número real qualquer, não nos interessando os casos em que $\alpha = 0$ (a equação seria linear) ou $\alpha = 1$ (a equação seria linear homogênea).

Vamos resolver esta equação, reduzindo-a a uma equação linear.

Antes disso porém, suponhamos, como em I.8.1, as funções p e q contínuas no intervalo $[a, b[$ e determinemos o campo de definição da equação (I.42). Como estamos considerando somente valores reais de y^{α} temos que distinguir certos casos:

1º se α é um inteiro ≥ 2 : y^{α} está definido para qualquer y e o domínio D de definição da equação será a faixa do plano (como na equação linear): $a < x < b$, y qualquer;

2º se α é um inteiro < 0 : o domínio D será $a < x < b$ e $y \neq 0$;

3º se $\alpha > 0$ é um real não inteiro: y^{α} só estará definido para $y \geq 0$, logo D será dado por: $a < x < b$, $y \geq 0$;

4º se $\alpha < 0$ é um real não inteiro: então D será dado por $a < x < b$, $y > 0$.

Vejamos, agora, o problema da existência e unicidade de soluções, aplicando à equação (I.42) o teorema do § I.5, em que

$$f(x, y) = - p(x)y + q(x) y^{\alpha}$$

logo, $f'_y(x, y) = -p(x) + \alpha q(x) y^{\alpha-1}$

A função f'_y estará definida e será contínua nos pontos (x, y) tais que $a < x < b$ e $y^{\alpha-1}$ esteja definida.

No 1º, 2º e 4º casos vistos acima esta derivada está definida e é contínua em todos os pontos do campo de definição. No 3º caso, porém, é preciso fazer uma ressalva: se $\alpha > 1$ a derivada é contínua também em todos os pontos de D , mas se $0 < \alpha < 1$, temos que excluir de D os pontos para os quais $y = 0$ para poder aplicar o teorema de existência e unicidade.

Para resolver a equação (I.42), tomemos como nova variável dependente a função $z = y^{1-\alpha}$. Teremos, então, $y = z y^\alpha$ e, como

$$z' = (1 - \alpha) y^{-\alpha} y' ;$$

$$y' = \frac{1}{1 - \alpha} z' y^\alpha$$

Substituindo na equação original (I.42):

$$\frac{1}{1 - \alpha} z' y^\alpha + p(x) z y^\alpha = q(x) y^\alpha ,$$

que admite a solução $y = 0$ sempre que esta curva estiver no domínio D . Supondo, então, $y \neq 0$ a equação se escreverá:

$$(I.43) \quad \frac{1}{1 - \alpha} z' + p(x) z = q(x)$$

que é a equação linear a que se reduz a equação de Bernoulli.

EXEMPLOS:

1. Resolver a equação diferencial $y' - y = (1 + x) y^2$.

Neste caso, $\alpha = 2$ e as funções $p(x) = -1$; $q(x) = 1 + x$ estão definidas e são contínuas em toda a reta. Logo o domínio de definição da equação dada é todo o plano e o teorema de existência e unicidade se aplica a qualquer ponto (x_0, y_0) .

Façamos $z = y^{-1}$ e, portanto: $y = z y^2$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$
logo, $y' = -z' y^2$ então: $-z' y^2 - z y^2 = (1 + x) y^2$
que, além da solução $y = 0$, admite as soluções da equação diferencial linear: $-z' - z = 1 + x$.

Resolvamos esta pelo método C de I.8.1, fazendo $z = uv$:

$$-uv' - u'v - uv = 1 + x$$

ou

$$-uv' - v(u' + u) = 1 + x$$

Uma solução particular de $u' + u = 0$ é $u = e^{-x}$.

Resta ainda resolver a equação $-e^{-x} v' = 1 + x$ ou $v' = -e^x(1+x)$, donde $v = -xe^x + c$.

Fazendo as substituições, obtemos as soluções da equação dada:

$$y = 0 \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{c e^{-x} - x}$$

2. Quais as curvas do plano tais que, em cada ponto P , a tangente à curva corta o eixo dos y num ponto de ordenada igual ao quadrado da ordenada de P ?

De acôrdo com as notações da figura, devemos ter $OB = y^2$.

A equação da tangente à curva no ponto $P \equiv (x, y)$ é:

$$Y = y + y'(X - x),$$

donde, fazendo $X = 0$, se tira a ordenada de B :

$$Y = OB = y - xy'.$$

As curvas que respondem à questão proposta serão, portanto, soluções da equação diferencial: $y - xy' = y^2$, ou, para $x \neq 0$ e y qualquer, a equação diferencial

$$y' - \frac{1}{x}y = -\frac{y^2}{x},$$

que é uma equação de Bernoulli, com $\alpha = 2$. Devemos resolvê-la, pondo $z = y^{-1}$. Com as mesmas substituições do exemplo anterior, vemos que as soluções são $y = 0$ e as soluções da equação linear:

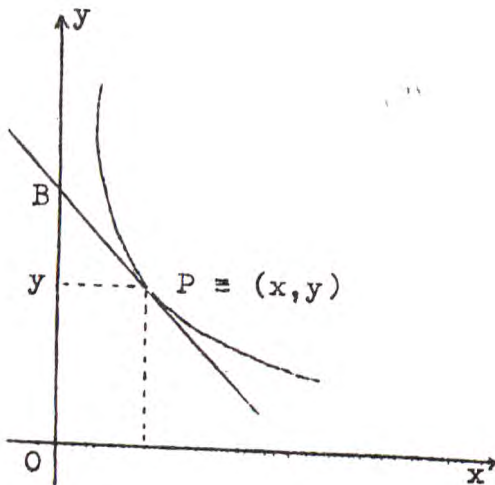
$$z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}$$

Resolvendo esta, pelo processo B de I.8.1, tem-se:

A equação linear homogênea

$$z' + \frac{1}{x}z = 0$$

tem como solução geral: $z = \frac{c}{x}$, c real qualquer,



Tomemos então na equação linear com 2º membro $z = \frac{c(x)}{x}$ e, então,

$$z' = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2}$$

e teremos a equação diferencial para $c(x)$: $c'(x) = 1$ ou $c(x) = x + c$.

Temos, então, sucessivamente: $z = \frac{x + c}{x}$ e $y = \frac{x}{x + c}$. Nesta solução, não está incluída a reta $y = 0$ obtida anteriormente. Se escrevêssemos a solução geral como $y = \frac{kx}{kx + 1}$ k constante qualquer, a solução $y = 0$ corresponderia ao valor $k = 0$, mas estaríamos perdendo a reta $y = 1$, que, acima, corresponderia ao valor $c = 0$.

I.9 - EXERCÍCIOS

1. Mostrar que, se uma família de curvas, a um parâmetro, tem uma equação diferencial uma equação diferencial homogênea (I.13), a equação diferencial de suas trajetórias ortogonais é também homogênea.

2. Mostrar que uma equação diferencial homogênea (I.13) se reduz a uma equação a variáveis separáveis quando se consideram coordenadas polares.

3. Resolver as seguintes equações diferenciais:

a) $\sec^2 x \operatorname{tg} y \, dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x \, dy = 0$

b) $\frac{dy}{(\cos y)^2} = \frac{dx}{1 + x^2}$

c) $(x^2 y + xy^2) dx - x^3 dy = 0$

d) $y' \cos y + \frac{\operatorname{sen} y}{x} = \operatorname{sen} 2x$ (sugestão: $w = \operatorname{sen} y$)

e) $y' + \frac{y^2}{x^2 - x^3} + \frac{x - 2}{x - x^2} y = 0$

f) $y' = x^2 + 2 - y$

g) $y' = \frac{2y}{x} + x^4$

h) $y' - y + (x^2 + x + 1)y^3 = 0$

4. Dadas três soluções particulares y, y_1 e y_2 de uma equação linear, mostrar que a razão

$$\frac{y_2 - y}{y - y_1}$$

independe de x .

5. Dar a equação das curvas tais que, em cada um de seus pontos, o segmento da tangente (v. exercício 10 do § I.7) é igual à distância do ponto $(0, a)$ ao ponto em que esta tangente corta o eixo dos x .

I.10 - MÉTODOS ELEMENTARES DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM SOB FORMA NORMAL - III

I.10.1 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL EXATA - Consideremos uma equação diferencial de 1ª ordem sob a forma (I.8)

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0,$$

em que as funções X e Y sejam definidas e contínuas num aberto D do plano. Uma tal equação diz-se uma equação diferencial exata quando existir uma função F definida e diferenciável no aberto D e cuja diferencial seja o 1º membro de (I.8), isto é:

$$(I.44) \quad dF(x, y) = X(x, y)dx + Y(x, y)dy.$$

Isto equivale a dizer que F é continuamente diferenciável e

$$(I.45) \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = X(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Y(x, y).$$

Neste caso, $F(x, y) = c$ representa uma integral geral da equação diferencial original (I.8), pois $dF(x, y) = 0$ implica $F(x, y) = c$.

EXEMPLO: a equação $y' = -\frac{x}{y}$ (v. § I.1, exemplo 1), escrita sob a forma $x dx + y dy = 0$ é uma equação diferencial exata, pois,

$$x dx + y dy = d \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right],$$

logo, sua integral geral será $x^2 + y^2 = c$, com $c > 0$.

À vista disto, apresentam-se dois problemas:

1º) Dados X e Y , achar uma condição necessária e suficiente para que a forma $X dx + Y dy$ seja exata.

2º) Sabendo que essa forma é exata, determinar a função

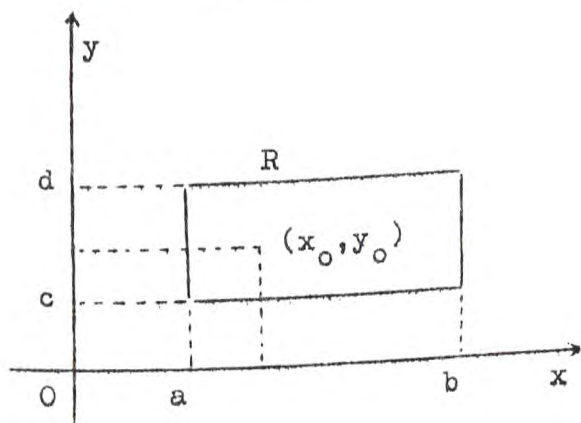
$F(x,y)$ tal que $dF(x,y) = X(x,y)dx + Y(x,y)dy$. Essa função, evidentemente, é determinada a menos de uma constante aditiva.

A resposta a estas duas questões é dada pelo teorema que segue:

TEOREMA I.2 - Suponhamos que as funções X e Y e suas derivadas

$$\frac{\partial X}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Y}{\partial x}$$

sejam definidas e contínuas no retângulo: $R: a < x < b, c < y < d$.



Uma condição necessária e suficiente para que a equação diferencial
(I.8) $X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$
seja exata é que se tenha

$$(I.46) \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Além disso, nas condições acima, a
função F pode ser determinada a
partir dos coeficientes da equação
do seguinte modo:

(I.47)

$$F(x,y) = \int_{x_0}^x X(x,y) dx + \int_{y_0}^y Y(x_0,y) dy,$$

em que (x_0, y_0) é um ponto qualquer de R .

Demonstração: Vejamos que a condição (I.46) é necessária. De fato, suponhamos que a equação (I.8) seja exata, isto é, que exista uma função F satisfazendo as condições (I.45). Então, estando definidas e sendo contínuas as derivadas:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x},$$

pelo teorema de Schwartz, elas são iguais e está verificada a condição (I.46).

Vamos demonstrar a condição suficiente construindo uma função F que satisfaça as condições (I.45) relativamente à equação (I.8), admitindo válidas a condição (I.46). Veremos que esta função F é aquela dada em (I.47) e estará também provada a segunda parte do teorema I.2. Com

efeito, se F deve ser tal que $\frac{\partial F}{\partial x} = X(x,y)$ então deve ter a forma:

$$(I.48) \quad F(x,y) = \int_{x_0}^x X(x,y) dx + c(y) ,$$

em que x_0 é tal que $a < x_0 < b$. Como se deseja também que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Y(x,y) ,$$

calculemos $\frac{\partial F}{\partial y}$ para F dada em (I.48), tem-se:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) dx + c'(y) ,$$

que, levando em conta (I.46), escreve-se:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) dx + c'(y) = Y(x,y) - Y(x_0,y) + c'(y)$$

e teremos $\frac{\partial F}{\partial y} = Y$ se $c'(y) = Y(x_0,y)$, isto é:

$$c(y) = \int_{y_0}^y Y(x_0,y) dy , \quad c < y_0 < d ,$$

ou qualquer outra função que difira desta por uma constante aditiva. Substituindo esta expressão para $c(y)$ em (I.48), reproduz-se (I.47) e obtém-se, então uma função F cujas derivadas em relação a x e y são, respectivamente, X e Y e a equação diferencial (I.8) é exata.

OBSERVAÇÕES:

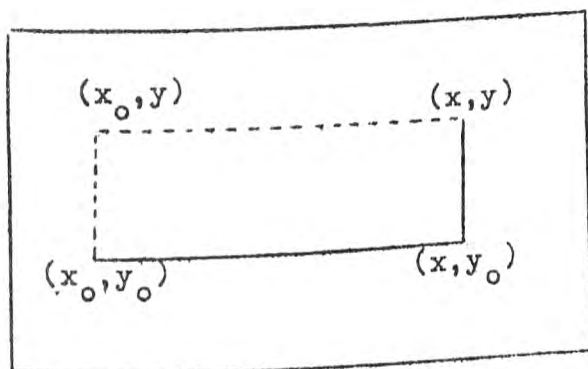
1) O cálculo que se fez é simétrico em relação a x e y , logo, se trocarmos x e y entre si e X e Y , teremos uma outra maneira de determinar uma integral geral da equação dada:

$$(I.49) \quad F(x,y) = \int_{x_0}^x X(x,y_0) dx + \int_{y_0}^y Y(x,y) dy$$

2) O ponto $(x_0, y_0) \in R$ é arbitrário, pois se tomássemos outro qualquer para o cálculo, obteríamos uma função diferindo desta por uma constante aditiva. Isto não altera, pois, uma integral geral da equa

ção é dada por $F(x,y) = c$, podendo F , portanto, ser determinada a menos de constantes aditivas.

3) As expressões (I.47) e (I.49) podem ser consideradas como integrais curvilíneas da forma diferencial $Xdx + Ydy$, entre os pontos (x_0, y_0) e (x, y) sobre os caminhos:



$$(x_0, y_0) \rightarrow (x_0, y) \rightarrow (x, y)$$

e

$$(x_0, y_0) \rightarrow (x, y_0) \rightarrow (x, y)$$

respectivamente.

Na realidade, levando em conta o teorema de Green, poderíamos ter tomado outro caminho qualquer entre estes dois pontos contido em R . Lembremos o Teorema de Green: "Numa região simplesmente conexa R , tomado um caminho fechado γ , cujo interior seja a região G , (γ é orientado de modo a deixar G à esquerda), tem-se:

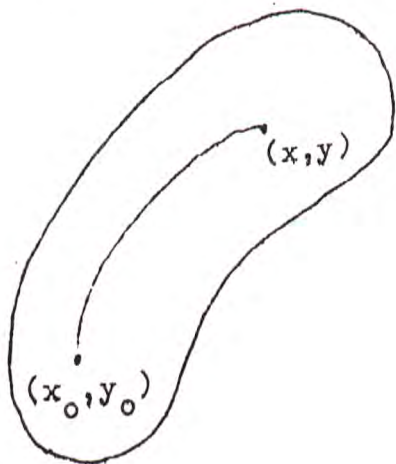
$$\oint_{\gamma} X dx + Y dy = \iint_G \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy$$

onde as funções X , Y , $\frac{\partial Y}{\partial x}$, e $\frac{\partial X}{\partial y}$ são definidas e contínuas em R ". Ora, sendo assim, se $Xdx + Ydy$ for uma diferencial exata, teremos

$$\oint_{\gamma} X dx + Y dy = 0,$$

ou, a integral curvilínea de $Xdx + Ydy$, sobre caminhos de R , só depende dos pontos inicial e final destes caminhos.

Em vista disso, o teorema I.2 é válido quando R for uma região simplesmente conexa qualquer, desde que se substitua (I.47) por:



$$(I.50) \quad F(x,y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} X dx + Y dy$$

onde a integral é estendida a um caminho qualquer de R com extremos (x_0, y_0) e (x, y) .

4) A importância da hipótese de que R seja uma região simplesmente conexa pode ser ilustrada no seguinte exemplo: a equação diferencial,

$$\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0 ,$$

tem coeficientes definidos em R (plano menos a origem), deriváveis e com derivadas contínuas nessa região e satisfazendo as condições (I.46). Não existe, porém, uma função F definida em toda a região R e cuja diferencial seja o 1º membro da equação dada. Isto acontece porque R não é simplesmente conexa. Se considerarmos uma região simplesmente conexa contida em R , então poderemos determinar uma integral geral da equação dada. De fato, se considerarmos a região simplesmente conexa dada por R menos uma semireta pela origem, podemos considerar nesta região como $F(x,y)$ um ramo da função $\arctg \frac{y}{x}$.

EXEMPLOS:

1. A equação $y' = \frac{2x + 3x^2y}{3y^2 - x^3}$, escrita sob a forma (I.8)

$$(2x + 3x^2y) dx + (x^3 - 3y^2) dy = 0$$

é exata, pois $\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2y) = 3x^2 = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2)$, em todo o plano.

Logo, sua integral geral é dada por $F = c$, onde F se calcula por (I.47):

$$F(x,y) = \int_0^x (2x + 3x^2y) dx - \int_0^y 3y^2 dx = x^2 + x^3y - y^3$$

2. A equação diferencial $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$ é exata em todo o plano, pois:

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^{-y}) = -e^{-y} = \frac{\partial}{\partial x}(-2y - xe^{-y}) ,$$

então, fazendo em (I.47), $(x_0, y_0) = (0,0)$ tem-se:

$$F(x,y) = \int_0^x e^{-y} dy - \int_0^y 2y dy = xe^{-y} - y^2$$

Logo, a integral geral da equação dada é

$$xe^{-y} - y^2 = c ,$$

RETOMEMOS AS OBSERVAÇÕES:

5) Suponhamos que a equação diferencial (I.8) esteja definida e seja exata numa região R . Seja $F(x,y) = c$ sua integral geral. Tome mos, em R , um ponto (x_1, y_1) no qual $Y(x_1, y_1) \neq 0$. Vamos mostrar que numa vizinhança de x , é possível definir uma, e uma única, função $y = \varphi(x)$ que satisfaça a equação diferencial dada, e tal que $y_1 = \varphi(x_1)$. Isto é,

$$(I.51) \quad X[x, \varphi(x)] + Y[x, \varphi(x)] \varphi'(x) \equiv 0$$

numa vizinhança de x_1 e $\varphi(x_1) = y_1$.

Em outras palavras, é possível explicitar a solução.

De fato, se $c_1 = F(x_1, y_1)$, consideremos a função

$$f(x, y) = F(x, y) - c_1.$$

Para f , estão satisfeitas as condições:

$$f(x_1, y_1) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1) = Y(x_1, y_1) \neq 0,$$

então, pelo teorema das funções implícitas, conclui-se que existe uma, e uma única função $y = \varphi(x)$, definida e derivável numa vizinhança de x_1 , e tal que:

$$y_1 = \varphi(x_1) \quad \text{e} \quad f[x, \varphi(x)] \equiv 0$$

nesta vizinhança de x_1 . Ou seja: $y_1 = \varphi(x_1)$ e $F[x, \varphi(x)] \equiv c_1$ donde, por diferenciação, obtém-se (I.51).

Suponhamos, por um momento, que existisse uma outra função $y = \psi(x)$ definida numa vizinhança de x_1 e satisfazendo as condições:

$$y_1 = \psi(x_1) \quad \text{e}$$

$$(I.52) \quad X[x, \psi(x)] + Y[x, \psi(x)] \psi'(x) \equiv 0,$$

nesta vizinhança.

$$\text{Ora,} \quad X[x, \psi(x)] + Y[x, \psi(x)] \psi'(x) = \frac{d}{dx} F[x, \psi(x)]$$

donde (I.52) significa $F[x, \psi(x)] = \text{constante}$, isto é,

$$F[x, \psi(x)] \equiv F[x_1, \psi(x_1)] \equiv F(x_1, y_1) = c_1.$$

Tem-se então que: $f(x, \psi(x)) \equiv 0$ no intervalo em que ψ está definida, então, pela unicidade garantida no teorema das funções implícitas, conclui-se que $\varphi(x) = \psi(x)$.

Tudo o que foi feito nesta observação é simétrico em relação a x e y , portanto, se num ponto $(x_2, y_2) \in R$, tem-se $X(x_2, y_2) \neq 0$, podemos considerar y como variável independente, x como variável dependente e obtemos, numa vizinhança de y_2 uma solução da equação: $x = \varphi(y)$.

6) Suponhamos que a equação diferencial (I.8)

$$X(x, y) dx + Y(x, y) dy = 0$$

seja, simultaneamente homogênea e exata. Isto é, X e Y são funções homogêneas de grau α e satisfazem (I.46). Suponhamos, ainda $\alpha \neq -1$. Nestas condições, a integral geral da equação diferencial dada é

$$(I.53) \quad xX + yY = c$$

Para demonstrar isto, é preciso verificar que

$$\frac{\partial}{\partial x} (xX + yY) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} (xX + yY)$$

são proporcionais a X e Y (com coeficiente de proporcionalidade constante). É o que veremos.

Lembramos, antes, que, se X e Y são funções homogêneas de grau α , o Teorema de Euler diz que:

$$(I.54) \quad x \frac{\partial X}{\partial x} + y \frac{\partial X}{\partial y} = \alpha X \quad \text{e} \quad x \frac{\partial Y}{\partial x} + y \frac{\partial Y}{\partial y} = \alpha Y$$

Calculando:

$$\frac{\partial}{\partial x} (xX + yY) = X + x \frac{\partial X}{\partial x} + y \frac{\partial Y}{\partial x},$$

levando (I.46) em conta:

$$\frac{\partial}{\partial x} (xX + yY) = X + x \frac{\partial X}{\partial x} + y \frac{\partial X}{\partial y} = (\alpha + 1)X, \quad \text{por (I.53)}.$$

Analogamente, demonstra-se que $\frac{\partial}{\partial y} (xX + yY) = (\alpha + 1)Y$ o que comprova o dito.

EXEMPLO:

A equação diferencial $2xy dx + (x^2 + y^2) dy = 0$ é exata e homogênea, com $\alpha = 2$. Sua integral geral é, então, dada por (I.53):

$$3x^2y + y^3 = c.$$

I.10.2 - FATÔRES INTEGRANTES - Consideremos, ainda, a equação (I.8)

$$X(x,y) dx + Y(x,y) dy = 0 ,$$

supondo que ela não seja exata, isto é: $\frac{\partial X}{\partial y} \neq \frac{\partial Y}{\partial x}$. Pode acontecer que, multiplicada esta equação por uma função conveniente $m(x,y)$ a equação se torne exata, isto é, que seja exata a equação diferencial

$$(I.55) \quad m(x,y) X(x,y) dx + m(x,y) Y(x,y) dy .$$

Quando isto se der, a função $m(x,y)$ diz-se um fator integrante da equação diferencial (I.8).

A resolução da equação diferencial (I.8) quando seja conhecido um fator integrante $m(x,y)$ pode ser feita em três etapas, a saber:

- determinar uma integral geral $F(x,y) = c$ da equação diferencial exata (I.55);

- as curvas definidas por $F(x,y) = c$ satisfazem a uma das duas equações: $Xdx + Ydy = 0$ ou $m(x,y) = 0$ e nós só estamos interessados naquelas que satisfaçam a equação (I.8). Deve-se então, verificar se a curva $m(x,y) = 0$, que é uma integral da equação (I.55), é ou não integral da equação diferencial (I.8). No caso de não ser, devemos excluí-la da família $F(x,y) = c$.

- por outro lado, sendo F tal que $dF = mXdx + mYdy$, tem-se

$$X(x,y) dx + Y(x,y) dy = \frac{1}{m(x,y)} dF(x,y)$$

Sendo assim, as curvas eventualmente definidas por

$$\frac{1}{m(x,y)} = 0$$

satisfazem também a equação (I.8) devendo ser incluídas entre as integrais anteriormente determinadas.

EXEMPLO:

A equação de variáveis separáveis (I.4.1) pode ser escrita sob a seguinte forma:

$$(I.56) \quad A(x) B(y) dx + C(x) D(y) dy = 0$$

Em (I.4.1) resolvemos tal equação transformando-a na equação de variáveis separadas:

$$(I.57) \quad \frac{A(x)}{C(x)} dx + \frac{D(y)}{B(y)} dy = 0$$

A passagem de (I.56) para (I.57) faz-se por intermédio do fator integrante $m(x,y) = \frac{1}{B(y) C(x)}$. As soluções de (I.57) serão também soluções de (I.56), já que $m(x,y) = 0$ não define curva alguma. As soluções de (I.56) devem, ainda, ser acrescentadas as curvas:

$$\frac{1}{m(x,y)} = B(y) C(x) = 0$$

Vimos, de fato, em (I.4.1) que se y_0 é tal que $B(y_0) = 0$ a reta $y = y_0$ é uma solução de (I.56) não obtida em (I.57). Simetricamente, as soluções $x = x_0$, onde $C(x_0) = 0$ são soluções de (I.56) onde se toma y como variável independente.

Infelizmente, o problema de achar um fator integrante, em geral, é bastante difícil. De fato, se m é fator integrante de (I.8), isto é, se (I.55) é uma equação diferencial exata, seus coeficientes devem satisfazer a condição (I.46), donde se conclui:

$$(I.58) \quad \frac{\partial m}{\partial y} X + m \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial m}{\partial x} Y + m \frac{\partial Y}{\partial x},$$

que é uma equação de derivadas parciais de 1ª ordem, cuja natureza é bem mais complexa do que estas que estamos estudando. Em geral, a equação (I.58) não pode ser resolvida por meio de quadraturas. Há, porém, certos casos particulares em que se pode achar um fator integrante. Perguntemos, por exemplo, quais as equações diferenciais que admitem um fator integrante que dependa somente de uma variável. No caso da equação diferencial (I.8) admitir um fator integrante $m(x)$ que só depende de x , a relação (I.58) satisfeita por $m(x)$ se simplifica dando a seguinte:

$$m(x) \frac{\partial X}{\partial y}(x,y) = \frac{dm}{dx}(x) Y(x,y) + m(x) \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y)$$

ou:

$$(I.59) \quad \frac{1}{m(x)} \frac{dm}{dx}(x) = \frac{1}{Y(x,y)} \left[\frac{\partial X}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Y}{\partial x}(x,y) \right],$$

isto é, a função do segundo membro da relação acima seria uma função somente de x . Reciprocamente, se a função

$$(I.60) \quad \frac{1}{Y} \left[\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right]$$

depende só de x a equação diferencial (I.59) pode ser integrada e determinamos um fator integrante da equação diferencial (I.8) que depende só de x , a saber:

(I.61)

$$m(x) = \exp \int \frac{1}{Y} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dx$$

A condição de que (I.60) seja função somente de x é, portanto, uma condição necessária e suficiente para que a equação diferencial (I.8) admita um fator integrante dependendo só de x .

Novamente, o que se fez aqui é simétrico em x e y e podemos dizer que uma condição necessária e suficiente para que a equação diferencial (I.8) admita um fator integrante dependendo só de y é que a função

$$(I.62) \quad \frac{1}{x} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)$$

seja função só de y . Neste caso, um fator integrante da equação (I.8) é dado pela expressão:

$$(I.63) \quad m(y) = \exp \int \frac{1}{x} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dy$$

EXEMPLOS:

1. Dada a equação diferencial

$$(3x + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 3xy)dy = 0,$$

sendo $\frac{\partial X}{\partial y} = 6x + 6y$ e $\frac{\partial Y}{\partial x} = 4x + 3y$, ela não é uma equação diferencial exata. Tem-se, no entanto, que a função (I.60):

$$\frac{1}{y} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) = \frac{1}{x}$$

depende só de x . A equação diferencial admite, portanto, um fator integrante dependendo só de x , dado por (I.61):

$$m(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

Resolvemos, então, a equação diferencial exata:

$$(3x^2 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0$$

que tem como integral geral $F(x,y) = c$, onde:

$$F(x,y) = \int_0^x (3x^2 + 6x^2y + 3xy^2)dx = x^3 + 2x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2$$

Verifica-se que a curva $m(x) = x = 0$ é também solução da equação original não precisando, portanto, ser retirada da integral geral da nova equação. Como $\frac{1}{m(x)} = 0$ não define curva no plano, a integral

geral da equação dada é:

$$x^3 + 2x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2 = c.$$

2. A equação diferencial $y(1 + xy) dx - x dy = 0$ não é exata, pois

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 1 + 2yx \quad \text{e} \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -1.$$

Como $\frac{1}{X} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = -\frac{2}{y}$, esta equação admite o fator integrante:

$$m(y) = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = \frac{1}{y^2}$$

Resolvamos, então a equação diferencial exata:

$$\left(\frac{1}{y} + x\right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

Sua integral geral será dada por:

$$\int_0^x \left(\frac{1}{y} + x\right) dx = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y} = c$$

As integrais da equação dada serão estas: $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y} = c$ mais a solução $y = 0$ proveniente de $\frac{1}{m(y)} = 0$. Não foi preciso excluir soluções da nova equação, pois $m(y) \neq 0$.

3. O leitor pode verificar que a equação diferencial linear de 1.^a ordem (I.29): $y' + p(x)y = q(x)$ escrita sob a forma (I.8), $[q(x) - p(x)y] dx - dy = 0$ admite como fator integrante a função de x :

$$m(x) = \exp \int p(x) dx.$$

Em I.8.1 o método A para resolução desta equação consistiu, exatamente, na utilização deste fator integrante.

4. Fica como exercício para o leitor mostrar que se a equação diferencial (I.8) é uma equação homogênea, ela terá, então, um fator integrante dado por:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xX + yY}$$

I.11 - EXERCÍCIOS

1. Verificar que as seguintes equações diferenciais são exatas e resolvê-las:

$$a) (y^2 - 3x^2y + 1)dx + (2xy - x^3 - 1)dy = 0$$

$$b) y(y + \cos xy)dx + x(2y + \cos xy)dy = 0$$

$$c) \frac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3} dx + \frac{8y^2 - x^2}{4x^3 - x^2y} dy = 0$$

2. Resolver, dentre as seguintes equações diferenciais, aquelas que são exatas:

$$a) dx + dy + y(y \sin x dx - e \cos x dy) = 0$$

$$b) (xy + 2y^2)dx + x^2 dy = 0$$

$$c) 3 \cos 3t \cos 2\theta dt - 2 \sin 3t \sin 2\theta d\theta = 0$$

3. Demonstrar que, se $AD - BC \neq 0$, a equação diferencial

$$x^p (Ay dx + Bx dy) + y^q (Cy dx + Dy dy) = 0$$

admite um fator integrante da forma $x^r y^s$

4. Achar um fator integrante e as soluções das equações diferenciais:

$$a) x(y dx + x dy) + 2y^2 dx = 0$$

$$b) (2y^2 - 3x^2y)dx + x^3 dy = 0$$

I.12 - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO PARA ALGUMAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM, NÃO NECESSÁRIAMENTE EM FORMA NORMAL.

Consideremos equações diferenciais de 1ª ordem na forma (I.3):

$$F(x, y, y') = 0 .$$

Tem-se agora que, para um mesmo ponto (x_0, y_0) , pode haver nenhum, um ou mais de um valor para y' tal que $F(x_0, y_0, y') = 0$.

Vejamos alguns casos em que se pode estabelecer um roteiro para a resolução da equação diferencial (I.3).

I.12.1 - Quando a equação diferencial (I.3) pode ser reduzida, trivialmente a uma ou mais equações diferenciais sob forma normal.

Por exemplo, se a função F admite a seguinte decomposição:

$$F(x, y, y') = [y' - f_1(x, y)] [y' - f_2(x, y)] \dots [y' - f_n(x, y)] ,$$

a resolução da equação diferencial (I.3) fica reduzida à resolução das n equações diferenciais sob forma normal: $y' = f_i(x, y)$, $i=1, \dots, n$.

EXEMPLOS

1. A equação $-y^2 = (x + y)^2$ pode ser escrita como

$$(y' - x - y)(y' + x + y) = 0 ,$$

e esta equivale às equações diferenciais em forma normal:

$$y' = x + y$$

$$y' = -x - y$$

cujas soluções são, respectivamente, as duas famílias de curvas:

$$y = c e^x - x - 1 \quad \text{e} \quad y = c e^{-x} - x + 1$$

2. A equação diferencial $y'^2 + y^2 = 1$, dada no exemplo 2 do § I.1, que pode ser escrita como

$$\left| y' - \sqrt{1 - y^2} \right| \left| y' + \sqrt{1 - y^2} \right| = 0 ,$$

equivale às equações diferenciais em forma normal:

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \quad \text{e} \quad y' = -\sqrt{1 - y^2} ,$$

que já foram estudadas em I.4.1 e cujas soluções são as curvas da família $y = \sin(x + c)$, e as retas $y = 1$ e $y = -1$.

I.12.2 - Quando a equação diferencial (I.3) tem a forma

$$(I.64) \quad y = f(y') .$$

Neste caso introduzimos o parâmetro $p = y'$ e temos:

$$(I.65) \quad y = f(p)$$

e $\frac{dy}{dx} = p$, donde se tem $dx = \frac{dy}{p}$, logo

$$(I.66) \quad x = \int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y}{p^2} dp = \frac{f(p)}{p} + \int \frac{f(p)}{p^2} dp + c .$$

As equações (I.65) e (I.66) dão-nos a expressão paramétrica da família de curvas soluções de (I.64):

$$\begin{cases} x = \frac{f(p)}{p} + \int \frac{f(p)}{p^2} dp + c \\ y = f(p) \end{cases}$$

Podemos reescrever as equações acima, fazendo $p = t$:

$$(I.67) \quad \begin{cases} x = \frac{f(t)}{t} + \int \frac{f(t)}{t^2} dt + c \\ y = f(t) \end{cases}$$

onde, para cada valor de c , as equações (I.67) descrevem uma curva solução.

No caso em que seja possível eliminar o parâmetro t , entre as equações (I.67) teremos uma família de integrais $O(x,y,c) = 0$ da equação diferencial (I.64).

O termo "integral geral" ou "solução geral" da equação diferencial (I.3) não foi definido e deixamos de fazê-lo pois para isto seria necessária uma análise mais profunda de tais equações.

EXEMPLO:

Resolvamos a equação diferencial $y = y'^2 + 2y'^3$.

Fazendo $y' = p$, como vimos acima, teremos $y = p^2 + 2p^3$.

Quando a função $f(p)$ é derivável, o que se fez acima para determinar x como função de p , corresponde a derivar a relação acima, como faremos a seguir:

$$y' = p = 2p \frac{dp}{dx} + 6p^2 \frac{dp}{dx}$$

que nos dá $p = 0$ e a equação diferencial em x e p :

$$dx = (2 + 6p) dp ,$$

cuja solução geral é:

$$x = 2p + 3p^2 + c$$

Temos assim a família de soluções em forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + c \\ y = p^2 + 2p^3 \end{cases}$$

ou, tomando t como parâmetro:

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2 + c \\ y = t^2 + 2t^3 \end{cases}$$

e a reta $y = 0$, obtida, por substituição, de $p = 0$.

I.12.3 - Quando a equação diferencial (I.3) tem a forma

$$(I.68) \quad x = f(y')$$

Também aqui fazemos $y' = p$ e temos:

$$(I.69) \quad x = f(p)$$

e $\frac{dy}{dx} = p$, donde $dy = p dx$ ou

$$(I.70) \quad y = \int p dx = px - \int x dp + c = pf(p) - \int f(p) dp + c$$

De (I.69) e (I.70), temos uma representação paramétrica para as soluções de (I.68):

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = pf(p) - \int f(p) dp + c \end{cases}$$

ou, chamando de t o parâmetro p :

$$(I.71) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = tf(t) - \int f(t) dt + c \end{cases}$$

que, para cada valor de c , representa uma curva solução de (I.68). Se, em (I.71), fôr possível eliminar t , obtendo-se $\phi(x, y, c) = 0$ esta será uma família de integrais de (I.68).

EXEMPLO:

Resolvamos a equação diferencial $x = y' \operatorname{sen} y'$.

Fazendo $y' = p$, como vimos acima, teremos: $x = p \operatorname{sen} p$ e, como em (I.70):

$$y = px - \int x dp + c = p^2 \operatorname{sen} p - \int p \operatorname{sen} p dp + c,$$

donde

$$y = p^2 \operatorname{sen} p + p \operatorname{cosp} - \operatorname{sen} p + c$$

e a família de soluções em forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = t \operatorname{sen} t \\ y = t^2 \operatorname{sen} t + t \operatorname{cosp} - \operatorname{sen} t + c \end{cases}$$

Na realidade, o caso I.12.3 podia ser incluído no caso I.12.2. De fato, na equação (I.68) se tomarmos y como variável independente e x como variável dependente e trocarmos p por $q = \frac{1}{p}$, teremos:

$$x = f\left(\frac{1}{x'}\right) = g(x')$$

donde, fazendo $q = x'$ e repetindo o que se fez em (I.12.2), teremos a família de soluções em forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = g(q) \\ y = \frac{g(q)}{q} + \int \frac{g(q)}{q} dq + c \end{cases}$$

ou, voltando ao parâmetro $p = \frac{1}{q}$:

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = p f(p) - \int f(p) dp + c \end{cases},$$

que, escrita em termos do parâmetro $t = p$, reproduz (I.71).

I.12.4 - EQUAÇÃO DE CLAIRAUT - é uma equação da forma

(I.72)

$$y = xy' + g(y')$$

onde g é uma função de classe c^1 (isto é, g é derivável e com derivada contínua em toda a reta ou num intervalo $[a, b[$).

Admitamos que a solução $y = y(x)$ de (I.72) seja duas vezes continuamente derivável e derivemos a equação (I.72). Obtém-se

$$y' = y' + xy'' + g'(y')y''$$

ou
$$y'' [x + g'(y')] = 0 ,$$

que dá lugar a duas equações diferenciais:

$$(I.73) \quad y'' = 0 \quad e$$

$$(I.74) \quad x + g'(y') = 0$$

A equação (I.73), dá-nos $y' = c$. Este valor substituído em (I.72), leva-nos a uma família de retas

$$(I.75) \quad y = cx + g(c) ,$$

soluções da equação dada.

É claro que se a família (I.75) admitir uma envoltória, esta envoltória será ainda uma solução da equação diferencial original. Procuramos, portanto, a envoltória das retas (I.75), lembrando que, a envoltória de uma família de curvas $F(x,y,c) = 0$ é obtida pela eliminação de c entre as equações

$$(I.76) \quad \begin{cases} F(x,y,c) = 0 \\ F'_c(x,y,c) = 0 \end{cases}$$

As equações (I.76) podem também ser tomadas como representação paramétrica da envoltória, onde se toma, $t = c$. Relativamente à família (I.75) as equações (I.76) são as seguintes:

$$\begin{cases} y = cx + g(c) \\ x + g'(c) = 0 \end{cases}$$

que definem a envoltória das retas (I.75), em termos do parâmetro $t = c$, pelas equações:

$$(I.77) \quad \begin{cases} x = -g'(t) \\ y = -tg'(t) + g(t) \end{cases}$$

Esta é, também, uma solução da equação de Clairaut.

Vemos agora que, consideradas a segunda equação diferencial (I.74), obtida por derivação, e a equação original (I.72) e eliminando y' entre estas duas, isto é, se considerarmos $y' = p$ (ou t) como parâmetro nas equações (I.72) e (I.74) obtemos, novamente, (I.77). Isto mostra que a solução de (I.74) que satisfaz também a (I.72) é exatamente a envoltória das retas (I.75).

EXEMPLO:

A equação de Clairaut $y = xy' + y' + y'^2$, tem como soluções a família de retas:

$$y = cx + c - c^2$$

e sua envoltória, que pode ser obtida pela eliminação de c entre as equações:

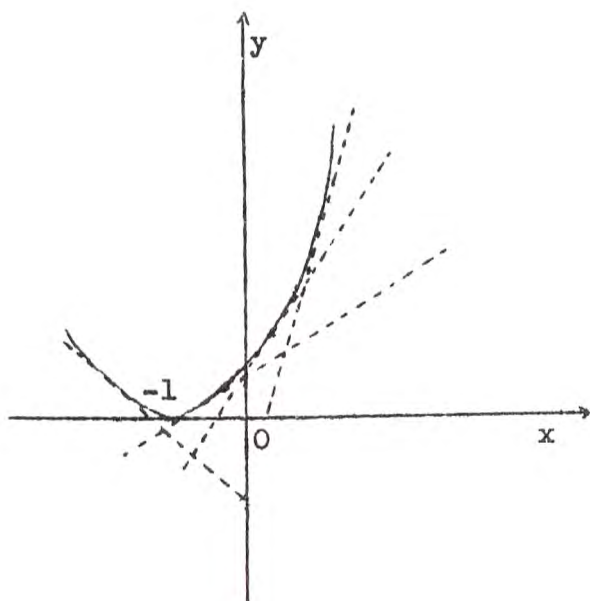
$$\begin{cases} y = cx + c - c^2 \\ x + 1 - 2c = 0 \end{cases}$$

Levando na 1ª equação o valor

$$c = \frac{x+1}{2}$$

obtido na 2ª chegamos à equação da envoltória:

$$y = \frac{(x+1)^2}{4}$$



As soluções da equação dada são a parábola e suas tangentes. Verifica-se então que por todo ponto (x_0, y_0) da região "externa" à parábola, isto é, tal que

$$y_0 < \frac{(x_0 + 1)^2}{4}$$

passam duas retas soluções. Por todo ponto sobre a parábola passam duas soluções com a mesma tangente: a parábola e a reta que lhe é tangente no referido ponto. Pelos pontos "internos" à parábola, isto é, da região

$$y > \frac{(x+1)^2}{4},$$

não passa nenhuma solução. De fato, a equação dada é uma equação do 2º grau em relação a y' cujo discriminante é: $\Delta = (1+x)^2 - 4y$. Logo, para que haja valores reais de y' é necessário que

$$y \leq \frac{(1+x)^2}{4}$$

I.12.5 - EQUAÇÃO DE LAGRANGE OU D'ALEMBERT - é uma equação da forma

$$(I.78) \quad y = f(y')x + g(y'),$$

em que f e g são funções de classe C^1 e $f(y') \neq y'$, pois, do contrário, a equação diferencial (I.78) seria uma equação de Clairaut.

Admitamos, novamente que a solução $y = y(x)$ de (I.78) seja duas vezes continuamente derivável e derivemos a equação (I.78). Obtem-se, fazendo $y' = p$:

$$(I.79) \quad y' = p = f(p) + x f'(p) + g'(p) p ,$$

que é uma equação diferencial nas variáveis x e p . Se tomarmos p como variável independente e x como função de p , a equação (I.79) escreve-se como:

$$(I.80) \quad [p - f(p)] \frac{dx}{dp} = x f'(p) + g'(p) ,$$

que é uma equação diferencial linear de 1ª ordem e está definida nos pontos em que $p - f(p) \neq 0$. De acordo com (I.31), a solução geral da equação (I.80) é da forma

$$(I.81) \quad x = c A(p) + B(p) .$$

Fazendo, na equação original (I.78) $y' = p$ e substituindo x por sua expressão (I.81), tem-se

$$y = c f(p) A(p) + f(p) B(p) + g(p) ,$$

que, juntamente com (I.81), dá a representação paramétrica de uma família de soluções: ($p = t$)

$$(I.82) \quad \begin{cases} x = c A(t) + B(t) \\ y = c f(t) A(t) + f(t) B(t) + g(t) \end{cases}$$

Observe-se que se p_0 é tal que $p_0 - f(p_0) = 0$, então

$$(I.83) \quad y = p_0 x + g(p_0)$$

é também uma solução - esta não está contida na família (I.82). Verifica-se que (I.83) é solução de (I.78) por substituição.

EXEMPLO:

A equação diferencial $y'^3 - y + x = 0$, é uma equação de Lagrange. Façamos $y' = p$: $p^3 - y + x = 0$ e derivêmo-la:

$$3p^2 \frac{dp}{dx} - p + 1 = 0 ,$$

que é uma equação a variáveis separáveis em x e p , que se resolve, como em I.4.1, pondo:

$$dx = \frac{3p^2}{p-1} dp ,$$

quando $p - 1 \neq 0$, logo:

$$x = 3 \left[\log |p-1| + p + \frac{p^2}{2} \right] ,$$

que, junto com a equação de partida, lá a representação paramétrica de - uma família de soluções:

$$\begin{cases} x = 3 \left[\log |t-1| + t + \frac{t^2}{2} \right] \\ y = t^3 + 3 \left[\log |t-1| + t + \frac{t^2}{2} \right] \end{cases}$$

Analiseemos agora o que acontece quando $p - 1 = 0$. Então , $p = 1$ e temos, substituindo na equação dada: $y = x + 1$, que é realmente, solução da equação diferencial e corresponde à solução (I.83).

I.12.6 - Tudo o que precede é caso particular do seguinte programa para resolução da equação diferencial (I.3):

$$F(x,y,y') = 0 .$$

Introduzimos a variável $p = y'$ e derivamos a equação (I.3) em relação a x . Obtemos, assim uma relação nas variáveis x , y , p e p' :

$$(I.84) \quad G(x,y,p,p') = 0$$

Se fôr possível resolver a equação diferencial (I.84) em relação a p , seja

$$(I.85) \quad H(x,y,p,c) = 0$$

uma família de integrais de (I.84).

Temos, agora, um sistema formado por (I.3) e (I.85)

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ H(x,y,p,c) = 0 \end{cases}$$

do qual, sendo possível, tiraríamos uma família de soluções em forma paramétrica:

$$(I.86) \quad \begin{cases} x = f(p,c) \\ y = g(p,c) \end{cases}$$

ou, eventualmente - se fôsse possível eliminar p entre estas - teríamos uma família de integrais da equação diferencial (I.3):

$$(I.87) \quad \phi(x,y,c) = 0 .$$

Em geral, porém, não é possível integrar a equação diferencial (I.84).

OBSERVAÇÃO: tudo o que fizemos acima, valeria, por simetria, se considerássemos y como variável independente, fizéssemos $y' = \frac{1}{q}$ e derivássemos a equação obtida em relação a y , etc.

Vejamos um caso em que se aplica o programa acima. Tentemos resolver a equação diferencial

$$(I.88) \quad y = f(x, y')$$

Seguindo os passos do programa exposto, temos que derivar em relação a x a relação: $y = f(x, p)$, o que dá:

$$p = f'_x(x, p) + f'_p(x, p) \frac{dp}{dx}$$

ou, nos pontos em que $f'_p \neq 0$:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - f'_x}{f'_p}$$

A equação diferencial acima é um caso simples da equação (I.84), pois não aparece, explicitamente, a variável y . Suponhamos que $H(x, p, c) = 0$ seja integral geral desta equação diferencial. Se, de $H = 0$, pudermos tirar $p = h(x, c)$, substituindo na equação diferencial original teremos a família de soluções $y = f(x, h(x, c))$.

Se, ao invés disto, de $H = 0$, pudermos tirar $x = \varphi(p, c)$, teremos, juntamente com a equação diferencial original, uma família de soluções em forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = \varphi(p, c) \\ y = f(\varphi(p, c), p) = \psi(p, c) \end{cases},$$

ou, tomando como parâmetro $t = p$:

$$\begin{cases} x = \varphi(t, c) \\ y = \psi(t, c) \end{cases}$$

EXEMPLO:

Resolver a equação diferencial $y = y'^2 + 2xy' + \frac{x^2}{2}$

Sigamos o programa exposto, começando por fazer $y' = p$ na equação dada e derivando esta em relação a x :

$$p = 2p'p' + 2p + 2xp + x$$

ou $(p + x)(2p' + 1) = 0$, que nos dá duas equações diferenciais:

$$p + x = 0 \quad \text{e} \quad 2 \frac{dp}{dx} + 1 = 0$$

A primeira destas equações, $\frac{dy}{dx} + x = 0$ nos dá

$$y = -\frac{x^2}{2} + c$$

que, substituída na equação diferencial de partida, determina para a constante c o valor zero. Tem-se, então, a solução

$$y = -\frac{x^2}{2}$$

A segunda das equações diferenciais obtidas, $2 \frac{dp}{dx} + 1 = 0$, tem como solução geral $p = -\frac{x}{2} + c$ que substituída na equação diferencial dada nos leva à família de soluções:

$$y = -\frac{x^2}{4} + cx + c^2$$

Esta família não engloba a solução $y = -\frac{x^2}{2}$ achada anteriormente, mas sua envoltória é, justamente esta curva, como o leitor pode verificar, sem dificuldade.

I.13 - EXERCÍCIOS

1. Resolver as seguintes equações de Clairaut:

a) $y'^2 - xy' + y = 0$

b) $y = xy' + ky'^2$, onde k é uma constante

c) $y = xy' + e^{-y'}$

2. Resolver as seguintes equações de Lagrange:

a) $y = y'^3 + 2xy'$

b) $y = y'^2 - xy'$

c) $2y = y'^2 + 2y'^2$

d) $2y = xy' + 2y'^3$

3. Resolver as seguintes equações diferenciais:

a) $xy'^2 = 1$

b) $yy'^2 = 1$

c) $y' = y \sqrt{1 + y'^2}$

d) $y' = x \sqrt{1 + y'^2}$

e) $xy'^3 - yy'^2 + 1 = 0$

f) $y'(xy' - y + k) + a = 0$, onde a e k são constantes.

CAPÍTULO II - TEOREMAS DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

II.1 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE 1ª ORDEM EM FORMA NORMAL

No capítulo I, vimos alguns casos em que a equação diferencial (I.4), $y' = f(x,y)$, podia ser integrada elementarmente, ou seja, era possível determinar a família de suas soluções por meio de funções elementares ou de primitivas destas funções. Isto, no entanto, está longe de ser válido em geral. Pelo contrário, equações bastante simples não admitem um tal tratamento, como, por exemplo, a equação diferencial

$$y' = 1 + xy^2$$

Vimos também, no § I.5, o enunciado de um teorema de existência e unicidade das soluções da equação diferencial $y' = f(x,y)$. Neste parágrafo enunciaremos e demonstraremos um teorema um pouco mais geral que aquele. Antes, porém, daremos uma equação diferencial que não apresenta unicidade de soluções.

De fato, se procurarmos a solução da equação diferencial

$$y' = y^{2/3}$$

que passe pela origem, isto é, tal que $y(0) = 0$, chegamos a duas soluções:

$$y(x) = 0$$

$$y(x) = \frac{x^3}{27}$$

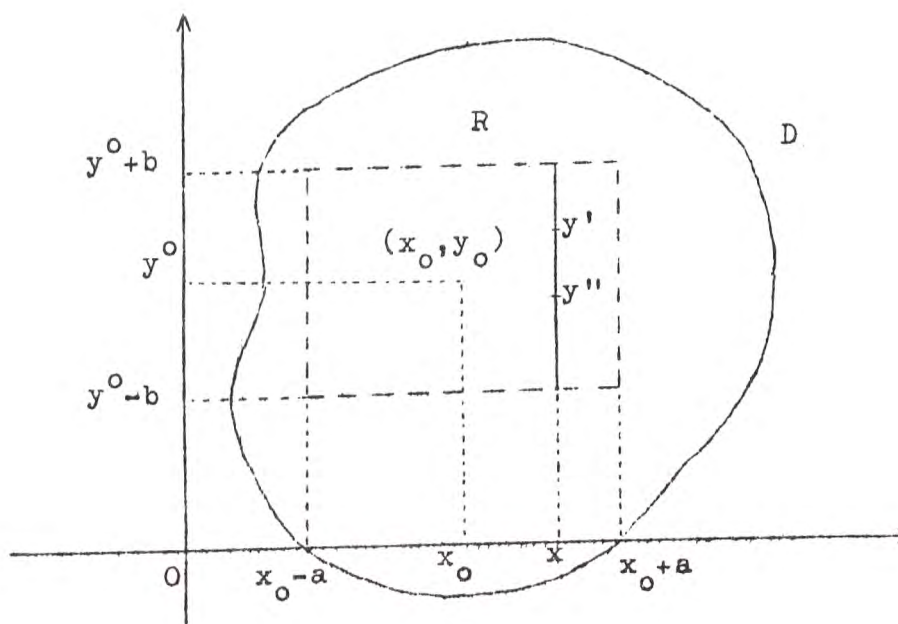
Façamos algumas considerações necessárias ao enunciado do teorema. Suponhamos que a equação diferencial (I.4) seja dada num aberto conexo D do plano, isto é, seja f definida em D . Tomamos um ponto $(x_0, y^0) \in D$ e perguntamos se existe solução no (I.4) por este ponto, isto é, tal que $y(x_0) = y^0$. E, no caso de existir, se esta é única. Podemos considerar um retângulo contido em D , com centro no ponto (x_0, y^0) . Isto é, tomamos a e b tais que o retângulo

$$(II.1) \quad R : \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y^0| \leq b$$

esteja contido em D .

Suponhamos que f seja contínua em R . Então f é limitada neste retângulo e seja M tal que:

$$(II.2) \quad |f(x,y)| \leq M, \quad \forall (x,y) \in R.$$



DEFINIÇÃO: Diz-se que a função f satisfaz, no retângulo R , a condição de Lipschitz (relativamente à variável y) se existir uma constante K tal que, para quaisquer $y', y'' \in [y_0 - b, y_0 + b]$, se tenha:

$$(II.3) \quad |f(x, y') - f(x, y'')| \leq K|y' - y''|, \quad x \in [x_0 - a, x_0 + a]$$

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE (II); Suponhamos que a função f seja contínua e satisfaça a condição de Lipschitz no retângulo R , de modo que

$$(II.4) \quad aK < 1 \quad \text{e} \quad aM \leq b,$$

onde a, b, M e K são definidas como em (II.1, 2, 3). Então, existe uma função $y(x)$ definida no intervalo $|x - x_0| \leq a$ que é solução da equação diferencial (I.4), isto é, tal que

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)),$$

passa pelo ponto (x_0, y_0) , isto é, $y(x_0) = y_0$, e esta solução é única.

OBSERVAÇÕES:

1. A solução $y(x)$ fica no retângulo R , isto é:
 $|y(x) - y_0| \leq b$, para todo $x : |x - x_0| \leq a$

2. As condições (II.4) não são restritivas, isto é, sendo f contínua num retângulo R e satisfazendo, em R , a condição de Lipschitz, é possível tomar um retângulo - menor do que R , se preciso fôr - de modo a que se verifiquem as condições (II.4).

3. Na equação diferencial $y' = y^{2/3}$, dada acima como contra-

-exemplo, a função $f = y^{2/3}$ não satisfaz a condição de Lipschitz em nenhum retângulo em torno da origem.

4. CONDIÇÃO DE LIPSCHITZ: Na equação linear (I.29)

$y' = -p(x)y + q(x)$, p e q contínuas numa vizinhança de x_0 , a condição de Lipschitz é facilmente verificável, em que se toma a constante K do seguinte modo:

$$K = \max_{|x-x_0| \leq a} |p(x)| ,$$

pois então:

$$|f(x, y') - f(x, y'')| = |p(x)| |y' - y''| \leq K |y' - y''| , \quad \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$$

O mais comum, no entanto, é que esta condição é de difícil verificação. Daremos, então, um critério para verificá-la, que nos servirá para as equações diferenciais abordadas neste curso. Ao mesmo tempo, estaremos ligando o Teorema de existência e unicidade I, enunciado no §I.5, ao Teorema acima enunciado, de modo que o Teorema I passa a ser uma consequência do Teorema II.

PROPOSIÇÃO II.1 - Se, no retângulo R , a função f for derivável em relação a y , com derivada contínua (basta que seja limitada), então f satisfaz a condição de Lipschitz em R . E mais, se

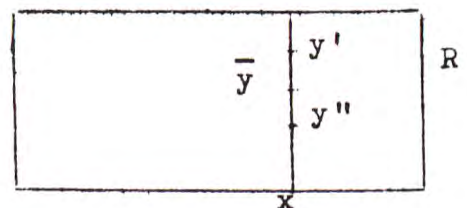
$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq K , \quad \forall (x, y) \in R ,$$

então f satisfaz a condição de Lipschitz com a mesma constante K .

Demonstração: É imediata a partir do Teorema da Média. De fato, se $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ e $y, y'' \in [y_0 - b, y_0 + b]$, temos pelo Teorema da Média:

$$f(x, y') - f(x, y'') = (y' - y'') \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}),$$

onde $\bar{y}$ é um valor compreendido entre y' e y'' .



Tem-se, portanto, tomando-se os valores absolutos:

$$|f(x, y') - f(x, y'')| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{y}) \right| |y' - y''| \leq K |y' - y''|$$

A proposição II.1 fornece uma condição suficiente para que a função satisfaça a condição de Lipschitz. Este critério é útil, já que as funções com que lidamos são, em geral, deriváveis.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE EXISTÊNCIA DE UNICIDADE II: Mostremos que o problema, dito problema de Cauchy, de encontrar uma função y definida num intervalo $[\alpha, \beta]$, que seja, neste intervalo, solução da equação diferencial (I.4) e que passe pelo ponto (x_0, y^0) , $\alpha \leq x_0 \leq \beta$, isto é, tal que:

$$(II.5) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{e} \quad y(x_0) = y^0, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

é equivalente ao problema de encontrar uma solução da seguinte equação integral:

$$(II.6) \quad y(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

De fato, por integração a partir de x_0 passa-se de (II.5) a (II.6), levando em conta a continuidade das funções y e f . Reciprocamente, derivando (II.6) verifica-se que $y(x)$ é solução de (I.4) e com a substituição $x = x_0$ em (II.6) sai imediatamente $y(x_0) = y^0$.

Para demonstrar o Teorema, podemos então mostrar a existência e unicidade da solução da equação integral (II.6). É o que faremos, começando pela unicidade: sejam $y(x)$ e

$z(x)$ duas soluções da equação (II.6), definidas no intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$, sendo estas funções contínuas no intervalo fechado $[x_0 - a, x_0 + a]$, podemos tomar $\bar{x}$ um ponto em que a diferença

$$|y(x) - z(x)|$$

assuma o máximo d . Suponhamos que, $d > 0$, isto é, suponhamos que as funções $y(x)$ e $z(x)$ sejam

distintas e, portanto, que a solução de (II.6) não seja única. Ora, se $y(x)$ e $z(x)$ satisfazem a (II.6) teremos, fazendo $x = \bar{x}$ e calculando a diferença $d = |y(\bar{x}) - z(\bar{x})|$:

$$d = |y(\bar{x}) - z(\bar{x})| = \left| \int_{x_0}^{\bar{x}} \{ f[t, y(t)] - f[t, z(t)] \} dt \right|$$

Como f satisfaz a condição de Lipschitz, podemos majorar a função integranda, na expressão acima, como segue:

$$|f[t, y(t)] - f[t, z(t)]| \leq K|y(t) - z(t)| \leq Kd$$

Então:

$$d = \left| \int_{x_0}^{\bar{x}} \{f[t, y(t)] - f[t, z(t)]\} dt \right| \leq |\bar{x} - x_0| K d \leq a K d < d ,$$

pois $aK < 1$ (II.4), o que é absurdo. Logo, $d = 0$ e a solução de (II.6), se existir, é única.

Mostremos agora a existência da solução: construiremos, para isto, uma sequência de funções cujo limite será a solução procurada. A sequência de funções será definida da seguinte maneira:

$$y^0(x) = y^0 ,$$

$$y^1(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f[t, y^0(t)] dt ,$$

.....

suponhamos definida a função $y^m(x)$ e definimos

$$y^{m+1}(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f[t, y^m(t)] dt ,$$

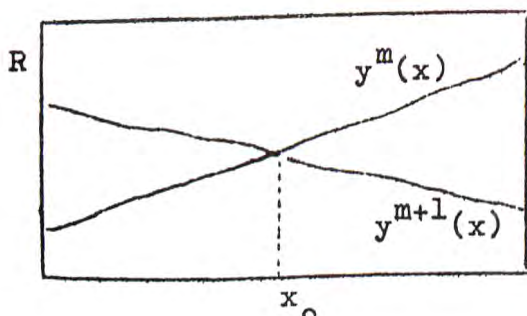
etc....

Logo após, mostraremos que a integral no 2º membro tem sentido.

Vamos mostrar: 1º que estas funções tôdas definidas no intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$; 2º que esta sequência converge uniformemente; 3º que $y(x) = \lim y^m(x)$ é solução da equação integral (II.6).

1º mostremos que as funções $y^m(x)$ estão tôdas no retângulo, isto é: $|y^m(x) - y^0| \leq b$, para $|x - x_0| \leq a$.

Mostraremos por indução.



Vejamos que se $y^m(x)$ está no retângulo, então $y^{m+1}(x)$ também estará, isto é, suponhamos que

$$|y^m(x) - y^0| \leq b ,$$

para todo x : $|x - x_0| \leq a$. Então pode-se definir

$$y^{m+1}$$

pois a função f é contínua em R

e tem-se

$$|y^{m+1}(x) - y^0| = \left| \int_{x_0}^x f[t, y^m(t)] dt \right| \leq aM \leq b ,$$

isto é, y^{m+1} também está no retângulo.

As funções $y^0(x)$, $y^1(x)$, ..., $y^m(x)$, ... estão, portanto, definidas para todo x do intervalo $|x - x_0| \leq a$.

2º Vejamos que a sequência acima definida é uniformemente convergente no intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Para isto, consideremos a série:

$$(II.7) \quad [y^1(x) - y^0] + [y^2(x) - y^1(x)] + \dots + [y^m(x) - y^{m-1}(x)] + \dots ,$$

cujas m -ésima reduzida é a função $y^m(x) - y^0$. Mostremos que a série (II.7) é uniformemente convergente (e absolutamente), por meio de uma série majorante. De fato, tem-se

$$|y^1(x) - y^0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y^0) dt \right| \leq M|x - x_0| = \frac{M}{K}K|x - x_0|$$

e veremos que, em geral tem-se:

$$(II.8) \quad |y^m(x) - y^{m-1}(x)| \leq \frac{M}{K} \frac{|K(x - x_0)|^m}{m!} , \quad m=1, 2, \dots$$

Mostremos (II.8) por recorrência. Suponhamos válida para m e calculemos a diferença para $m+1$:

$$|y^{m+1}(x) - y^m(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x \{f[t, y^m(t)] - f[t, y^{m-1}(t)]\} dt \right| ,$$

suponhamos, por enquanto, $x \geq x_0$, então podemos majorar a integral acima, levando em conta a condição de Lipschitz para f :

$$\left| \int_{x_0}^x \{f[t, y^m(t)] - f[t, y^{m-1}(t)]\} dt \right| \leq \int_{x_0}^x K|y^m(t) - y^{m-1}(t)| dt ,$$

e, levando em conta a hipótese de indução:

$$\int_{x_0}^x K|y^m(t) - y^{m-1}(t)| dt \leq K \int_{x_0}^x \frac{M}{K} \frac{|K(t - x_0)|^m}{m!} dt = \frac{M}{K} \frac{|K(x - x_0)|^{m+1}}{(m+1)!}$$

o que prova (II.8) para $x \leq x_0$. Analogamente, se faria para $x \geq x_0$.

Tem-se, então, para a série (II.7):

$$\begin{aligned} & \left| [y^1(x) - y^0] + [y^2(x) - y^1(x)] + \dots + [y^m(x) - y^{m-1}(x)] + \dots \right| \leq \\ & \leq \sum_{m=1}^{\infty} |y^m(x) - y^{m-1}(x)| \leq \frac{M}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|K(x-x_0)|^m}{m!} = \\ & = \frac{M}{K} (e^{K|x-x_0|} - 1) \leq \frac{M}{K} (e^{aK} - 1) \end{aligned}$$

Donde a série (II.8) converge uniformemente no intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$, ou seja, a sequência $y^m(x) - y^0$, e portanto a sequência $y^m(x)$ converge uniformemente no intervalo $|x - x_0| \leq a$.
Seja $y(x) = \lim y^m(x)$.

3º Vejamos que $y(x)$ é solução da equação integral (II.6).
Dizer que $y(x)$ é o limite (uniforme) de $y^m(x)$ equivale a dizer que, dado $\varepsilon > 0$, existe um índice m_0 tal que, para $m \geq m_0$ se tenha:
 $|y^m(x) - y(x)| \leq \varepsilon$, para todo $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.

Partindo daqui, verifiquemos os seguintes fatos:

i. a sequência de funções $f[x, y^m(x)]$ converge uniformemente para a função $f[x, y(x)]$ no intervalo $|x - x_0| \leq a$. Verificação evidente, pois f satisfaz a condição de Lipschitz; de fato:

$$\begin{aligned} \left| f[x, y^m(x)] - f[x, y(x)] \right| & \leq K |y^m(x) - y(x)| \leq K \varepsilon, \\ & \text{para } m \geq m_0 \text{ e } |x - x_0| \leq a \end{aligned}$$

ii. lembramos também que, se num intervalo qualquer $[\alpha, \beta]$ a sequência de funções $h^m(x)$ converge uniformemente para a função $h(x)$, então tem-se também que a sequência de funções

$$g^m(x) = \int_{x_0}^x h^m(t) dt, \quad \alpha \leq x, \quad x_0 \leq \beta,$$

converge uniformemente em $[\alpha, \beta]$ para a função

$$g(x) = \int_{x_0}^x h(t) dt.$$

Fazendo $h^m(x) = f[x, y^m(x)]$, o resultado ii. nos diz que

$$\int_{x_0}^x f[t, y^m(t)] dt \longrightarrow \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt$$

uniformemente para $|x - x_0| \leq a$. Somando y^0 às funções acima, temos:

$$y^0 + \int_{x_0}^x f[t, y^m(t)] dt \longrightarrow y^0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt$$

uniformemente em $|x - x_0| \leq a$, ou seja,

$$y^0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt$$

é o limite (uniforme) da sequência

$$y^{m+1}(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f[t, y^m(t)] dt$$

e este limite nos já o chamáramos de $y(x)$, donde:

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt,$$

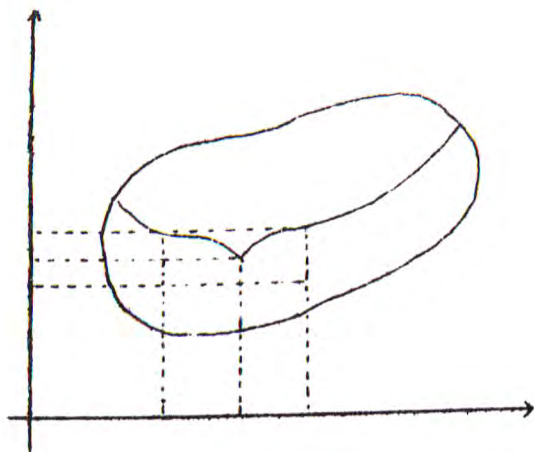
isto é, $y(x)$ é a solução da equação (II.6).

OBSERVAÇÕES:

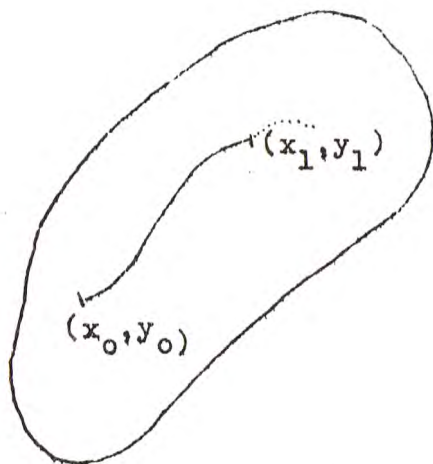
1. Suponhamos que a função f seja contínua em todo o aberto limitado D e que cada ponto de D seja centro de um retângulo em que f satisfaz a condição de Lipschitz. Nestas condições, a função construída no intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$ poderá ser prolongada até a fronteira.

Basta repetir o que se fez para o ponto (x_0, y^0) , tomando-se como ponto de partida

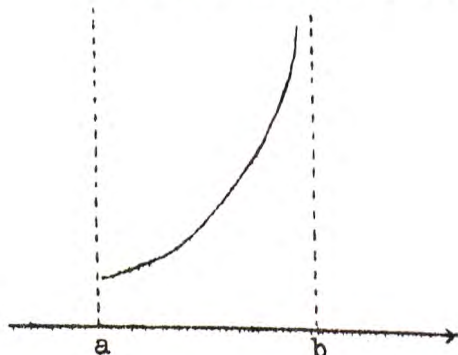
$$(x_0 + a, y(x_0 + a)).$$



Este processo pode ser aplicado até que a curva encontre a fronteira, pois ele não pode "parar" no interior de D já que, se (x_1, y_1) fôsse um ponto interno a D e de acumulação da curva construída de (x_0, y_0) , a continuidade da derivada $y' = f(x, y)$ no ponto (x_1, y_1) e a unicidade da solução que passa por esse ponto implicam que a curva que "chegou" ao ponto (x_1, y_1) coincide com a parte da solução que passa pelo ponto (x_1, y_1) .



No caso em que D seja uma faixa, $a \leq x \leq b$ e y qualquer, e se em toda faixa $a_1 \leq x \leq b_1$ ($a_1 > a$, $b_1 < b$), valer uma condição de Lipschitz com uma mesma constante k_1 , então a solução poderá ser prolongada até encontrar a fronteira ou ela tenderá assintoticamente a esta.



2. DEPENDÊNCIA CONTÍNUA DA SOLUÇÃO DO VALOR INICIAL:

Se duas soluções $y(x)$ e $z(x)$ da mesma equação diferencial $y' = f(x, y)$ estão a uma certa distância para $x = x_0$, então é possível majorar esta distância em todo retângulo R . Mais precisamente, se $|y^0 - z^0| < A$ então,

$$|y(x) - z(x)| \leq \frac{A}{1 - aK}, \quad |x - x_0| \leq a$$

De fato: verifica-se, sem dificuldade, por indução, considerando as sequências $y^m(x)$, $z^m(x)$ construídas como na demonstração do Teorema, que se tem, para todo m :

$$|y^m(x) - z^m(x)| \leq A(1 + aK + a^2K^2 + \dots + a^mK^m) < \frac{A}{1 - aK}$$

donde segue o nosso resultado fazendo $m \rightarrow \infty$.

3. Por fim observamos que o método empregado para demonstração do Teorema de existência e unicidade é o método de Piccard das aproximações sucessivas. Este método usa a condição de Lipschitz tanto para

provar a unicidade quanto para provar a existência. Existem, no entanto, meios de demonstrar a existência de solução exigindo somente a continuidade da função f .

II.2 - SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1.^a ORDEM EM FORMA NORMAL

Como vimos no § I.6, um tal sistema escreve-se na forma (I.20)

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = f(x, \vec{y}) ,$$

com a notação vetorial dada em (I.19), em que a função vetorial tem como componentes n funções definidas num aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$. Neste aberto consideramos o ponto $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$, em torno do qual, tomamos o retângulo R (ainda contido no aberto):

$$|x - x_0| \leq a , \quad |y_i - y_i^0| \leq b , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Se admitimos a convenção;

$$(II.9) \quad \|\vec{y} - \vec{y}^0\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i - y_i^0| ,$$

tomando como distância entre dois vetores a máxima distância entre suas componentes, o retângulo R pode ser descrito, como no parágrafo anterior, do seguinte modo:

$$|x - x_0| \leq a , \quad \|\vec{y} - \vec{y}^0\| \leq b .$$

Podemos, então, adaptar as condições e construções do Teorema anterior à equação (I.20), obtendo um Teorema de existência e unicidade para soluções de sistemas de equações diferenciais de 1.^a ordem, em forma normal.

Dizer que a função $\vec{f}(x, \vec{y})$ é contínua em R é dizer que - suas componentes o são. Vejamos qual seria a condição de Lipschitz para uma tal função: fazendo a analogia formal, teremos: se $\vec{y}'$ e $\vec{y}''$ são tais que $\|\vec{y}' - \vec{y}^0\| \leq b$, $\|\vec{y}'' - \vec{y}^0\| \leq b$, então devemos ter:

$$(II.10) \quad \|\vec{f}(x, \vec{y}') - \vec{f}(x, \vec{y}'')\| \leq K \|\vec{y}' - \vec{y}''\| , \quad \forall x : |x - x_0| \leq a$$

Ou seja:

$$|f_i(x, \vec{y}') - f_i(x, \vec{y}'')| \leq K \sup_{1 \leq j \leq n} |y_j' - y_j''| ,$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$

Nestas condições, enunciariamos o

TEOREMA DE EXISTÊNCIA E UNICIDADE III : Suponhamos que $\vec{f}(x, \vec{y})$ seja con-
tínua e satisfaça a condição de Lipschitz (II.10) em R , de modo que
 $ak < 1$ e $aM \leq b$, onde $M \geq \sup_R \|\vec{f}(x, \vec{y})\|$. Então, existe uma, e uma
só, função vetorial $\vec{y}(x)$, definida no intervalo $|x - x_0| \leq a$,
tomando valores em $\|\vec{y} - \vec{y}^0\| \leq b$ e satisfazendo a equação diferencial
(I.20).

A demonstração é exatamente análoga à que se fez anteriormen-
 te. Mostra-se que o problema de encontrar $\vec{y}(x)$ tal que

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}) \quad \text{e} \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}^0, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

é o mesmo que dar uma solução da equação integral

$$\vec{y}(x) = \vec{y}^0 + \int_{x_0}^x \vec{f}[t, \vec{y}(t)] dt, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

E a demonstração prossegue e sempre que se deva considerar | |
 no caso de vetores toma-se || ||.

Examinemos mais de perto a condição de Lipschitz (II.10) para
 funções vetoriais. Veremos que é suficiente que as funções f_i sejam de-
 riváveis em relação a todos os y_i e com derivadas limitadas em todo o
 retângulo.

Se todas as derivadas forem limitadas por L , então $\vec{f}$ satis-
 faz a condição (II.20) com $K = nL$. Como ilustração, tomemos uma função
 $g(x, y, z)$ derivável em relação a y e a z e de modo que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \leq L \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial g}{\partial z} \right| \leq L,$$

no retângulo R : $|x - x_0| \leq a$, $|y - y^0| \leq b$ e $|z - z^0| \leq b$. Vejamos
 que g satisfaz a condição de Lipschitz: de fato, podemos escrever:

$$\begin{aligned} |g(x, y', z') - g(x, y'', z'')| &= |g(x, y', z') - g(x, y'', z') + g(x, y'', z') - \\ &- g(x, y'', z'')| \leq |g(x, y', z') - g(x, y'', z')| + |g(x, y'', z') - g(x, y'', z'')| \\ &\leq \left| \frac{\partial g}{\partial y}(x, \bar{y}, z') \right| |y' - y''| + \left| \frac{\partial g}{\partial z}(x, y'', \bar{z}) \right| |z' - z''| \leq \\ &\leq 2L \sup \{ |y' - y''|, |z' - z''| \}, \end{aligned}$$

onde se aplicou o teorema da média uma vez em relação a y outra em rela-
 ção a z .

II.3 - Temos, então, um teorema de existência e unicidade também para soluções de uma equação diferencial de ordem n em forma normal (I.2):

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

De fato, aplicando o que se fez no parágrafo anterior ao sistema (I.23) que é equivalente à equação (I.2) temos um teorema de existência e unicidade desde que se fizem, para um ponto x_0 , os valores:

$$y(x_0), \quad y'(x_0), \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0)$$

Quanto à condição de Lipschitz, sendo a função $\vec{f}(x, \vec{y})$ no caso do sistema (I.2) dada por:

$$\vec{f}(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

as componentes $f_1 = y_2$, $\dots$, $f_{n-1} = y_n$, sendo lineares satisfazem a condição de Lipschitz (com constante 1), basta, portanto, exigir que $f_n = f$ satisfaça a condição de Lipschitz em relação às variáveis

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

* * *

CAPÍTULO III - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

III.1 - Uma equação diferencial linear de ordem n é uma equação diferencial da forma

$$(III.1) \quad A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = B(x) ,$$

onde suporemos que as funções $A_0, A_1, \dots, A_n$ e B sejam contínuas num intervalo $a < x < b$ (finito, ou não) e que $A_0(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$.

No § I.8.1, vimos um exemplo: a equação (I.29)

$$y' + p(x)y = q(x) ,$$

que é uma equação linear de 1ª ordem, com $A_0(x) \equiv 1$. Ainda na parte B de I.8.1, demos uma justificativa do termo linear aplicado à equação diferencial (I.29). Este fato se generaliza para a equação (III.1), de ordem n .

De fato, se considerarmos o espaço $\mathcal{C}^{(n)}(]a, b[)$, das funções n vezes, continuamente, diferenciáveis no intervalo $]a, b[$, podemos definir o operador L que a cada função $y \in \mathcal{C}^{(n)}(]a, b[)$ faz corresponder a função $L[y] \in \mathcal{C}(]a, b[)$, contínua no intervalo $]a, b[$, definida como:

$$(III.2) \quad L[y] = A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} y' + A_n y$$

A equação (III.1) escreve-se, então:

$$(III.3) \quad L[y] = B ,$$

e diz-se linear porque o operador L acima definido é um operador linear. De fato, se y, y_1, y_2 são funções contínuas em $]a, b[$ e c é uma constante (real ou complexa), definimos a função soma $y_1 + y_2$ e a função cy , pondo:

$$(III.4) \quad \left. \begin{aligned} (y_1 + y_2)(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ (cy)(x) &= c y(x) \end{aligned} \right\} \quad \forall x: a < x < b$$

Munidos destas operações, os espaços $\mathcal{C}^{(n)}(]a, b[)$ e $\mathcal{C}(]a, b[)$ são espaços vetoriais. O leitor pode verificar que, em cada um dos espaços, as operações definidas em (III.4) satisfazem as condições de espaço vetorial: propriedades de grupo comutativo em relação à soma, o produto por escalar é distributivo em relação à soma de funções, etc.

O operador $L : \mathcal{C}^{(n)}(]a,b[) \longrightarrow \mathcal{C}(]a,b[)$ é um operador linear, pois: $L[y_1+y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ e $L[cy] = c L[y]$, o que se conclui da definição (III.2) de $L[y]$, onde tôdas as operações envolvidas (derivação, produto por funções $A_i(x), \dots$) são lineares.

Em vista disso, aplicam-se à equação (III.1), os resultados já conhecidos em Álgebra Linear para equações lineares, como, por exemplo o seguinte:

PROPOSIÇÃO III.1 - O conjunto das soluções da equação linear homogênea

$$(III.5) \quad L[y] = 0$$

forma um espaço vetorial - sub-espaço do espaço vetorial $\mathcal{C}^{(n)}(]a,b[)$.

Em outras palavras, a soma de duas soluções da equação (III.5) é ainda solução, também o produto de uma solução por uma constante qualquer é solução da equação homogênea (III.5).

Este fato, que é de verificação direta imediata, é um caso particular de situação mais geral: se E e F são dois espaços vetoriais, $L : E \longrightarrow F$ é um operador linear, então o conjunto

$$E_0 = \{ y \in E \mid L[y] = 0 \}$$

é um sub-espaço vetorial de E .

PROPOSIÇÃO III.2 - Conhecidas as soluções da equação homogênea (III.5) $L[y] = 0$ e uma solução particular p da equação não homogênea $L[p] = B$, estão determinadas tôdas as soluções da equação não homogênea

$$(III.6) \quad L[z] = B ;$$

estas soluções são as funções $y + p$, em que y é uma solução da equação homogênea (III.5).

Este também é um fato geral da Álgebra Linear e de verificação imediata, graças à linearidade de L .

III.2 - EXISTÊNCIA E UNICIDADE DAS SOLUÇÕES

De acordo com as notações do § I.6, a equação diferencial linear (III.1) pode ser escrita, como em (I.23), sob a forma do sistema de equações diferenciais de 1ª ordem, em forma normal, do seguinte modo:

III.3 - SISTEMAS FUNDAMENTAIS DE SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO LINEAR HOMO-

GÊNEA : Recordemos algumas definições e alguns resultados referentes a espaços vetoriais antes de estudar um pouco mais o espaço vetorial das soluções da equação linear homogênea.

Num espaço vetorial E , m elementos, $y_1, y_2, \dots, y_m \in E$, dizem-se linearmente independentes se uma relação da forma

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m = 0 \quad \text{escalares (reais ou complexos),}$$

implicar

$$c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

Por exemplo, se $E = \mathcal{C}([a, b])$, os $m+1$ elementos (funções contínuas): $1, x, x^2, \dots, x^m$ são linearmente independentes, pois

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m \equiv 0 \iff c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

Se $y_1, \dots, y_m$ não são linearmente independentes, dizem-se então linearmente dependentes. Isto é, se $y_1, \dots, y_m$ são linearmente dependentes, existe uma sequência de escalares $c_1, \dots, c_m$, não todos nulos e tais que

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m = 0.$$

Uma base de um espaço vetorial é um conjunto de vetores linearmente independentes, tal que todos os vetores do espaço possam ser escritos como combinação linear destes vetores. Isto é, $y_1, \dots, y_m$ dizem-se uma base de E se são linearmente independentes e para todo $y \in E$ tem-se

$$(III.8) \quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m$$

Observe-se que se $\{y_1, \dots, y_m\}$ é uma base a expressão (III.8) para cada $y \in E$ é única.

Sabe-se que todo espaço vetorial admite uma base e que se uma base tem m elementos todas as outras terão também m elementos. Diz-se então, que a dimensão de E é m se E tem uma base com m elementos. Escreve-se $\dim E = m$. Sabe-se também que, num espaço de dimensão m , todo conjunto de m elementos linearmente independentes é uma base. Observe-se que um espaço vetorial pode ter dimensão infinita. É o que acontece com o espaço das funções contínuas $\mathcal{C}([a, b])$ cuja dimensão deve ser maior que qualquer natural m , pois como vimos anteriormente as $m+1$ funções $1, x, \dots, x^m$ são linearmente independentes. O mesmo se dá com o espaço vetorial $\mathcal{C}^{(n)}([a, b])$ pois ele contém também as funções $1, x, \dots, x^m$.

Voltando à equação linear homogênea (III.5) $L[y] = 0$, vimos na Proposição III.1, que o conjunto de suas soluções é um espaço vetorial. Demonstremos que este espaço vetorial tem dimensão n (= ordem da equação).

Para isto, é preciso construir um conjunto de n soluções linearmente independentes e das quais qualquer outra solução seja uma combinação linear.

Construiremos tais soluções usando o Teorema de Existência e Unicidade. De fato, fixemos $x_0: a < x_0 < b$ e seja y_1 a solução de (III.5) tal que $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$, ..., $y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$. A existência e unicidade de y_1 está garantida pelo Teorema de Existência, onde se toma $b_0 = 1$, $b_1 = 0$, ..., $b_{n-1} = 0$. Em seguida, tomamos $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, ..., $b_{n-1} = 0$, e construímos a solução y_2 tal que: $L[y_2] = 0$, $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$, $y_2''(x_0) = 0$, ..., $y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$. E assim por diante, até construirmos a solução y_n tal que

$$y_n(x_0) = 0, y_n'(x_0) = 0, \dots, y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

Construídas tais funções mostremos, primeiramente, que elas são linearmente independentes. De fato, sejam $c_1, c_2, \dots, c_n$ constantes tais que:

$$y(x) = x_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0,$$

têm-se então: $y(x) \equiv y'(x) \equiv \dots \equiv y^{(n-1)}(x) \equiv 0$, donde, em particular, $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Um pequeno cálculo, em que se levam em conta os valores de $y_1, \dots, y_n$ e suas derivadas no ponto x_0 , levam-nos a:

$$c_1 = y(x_0), \quad c_2 = y'(x_0), \dots, \quad c_n = y^{(n-1)}(x_0),$$

donde $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ e as funções $y_1, \dots, y_n$ são linearmente independentes.

Mostremos, agora, que qualquer outra solução pode ser escrita como combinação linear de $y_1, \dots, y_n$. De fato, se y é uma solução de $L[y] = 0$, estará definida no ponto x_0 , sejam então

$$b_0 = y(x_0), \quad b_1 = y'(x_0), \dots, \quad b_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0).$$

Consideremos a função

$$z(x) = b_0 y_1(x) + b_1 y_2(x) + \dots + b_{n-1} y_n(x),$$

que certamente é também solução da equação diferencial linear homogênea (III.5). Ora, um cálculo direto nos mostra que:

$$z(x_0) = b_0 = y(x_0), \quad z'(x_0) = b_1 = y'(x_0), \dots, z^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0)$$

isto é, em x_0 , as soluções z e y satisfazem as mesmas condições iniciais devendo, portanto, coincidir em todo o intervalo pela unicidade de soluções.

Fica, então, demonstrado que a dimensão do espaço das soluções de $L[y] = 0$ é n . Uma base de tal espaço chama-se sistema fundamental de soluções da equação linear homogênea $L[y] = 0$. É suficiente, então, conhecer um sistema fundamental de soluções, ou seja, n soluções linearmente independentes. Em geral, no entanto, é trabalhoso verificar se n funções são, ou não, linearmente independentes. Veremos como se contorna esta dificuldade, com uma condição para verificar a independência linear, chamado CrITÉrio do Wronskiano.

Em geral, dadas n funções $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{(n-1)}(]a, b[)$, define-se o determinante de Wronsky ou o Wronskiano destas funções (que se indica com $W[y_1, \dots, y_n]$ ou W simplesmente) do seguinte modo:

$$W[y_1, \dots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

PROPOSIÇÃO III.3. Se as funções $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{(n-1)}(]a, b[)$ são linearmente dependentes, então $W[y_1, \dots, y_n](x) \equiv 0$.

Demonstração: Se $y_1, y_2, \dots, y_n$ são linearmente dependentes, existem constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, não tôdas nulas tais que:

$$(1) \quad c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0$$

e, então, também, suas $n-1$ primeiras derivadas, isto é:

$$(2) \quad c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \dots + c_n y_n'(x) \equiv 0$$

.....

$$(n) \quad c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0$$

As equações (1), (2), ..., (n) formam, para cada x , não trivial e isto se dá, quando, e somente quando, o determinante da matriz -

em que $c_1, c_2, \dots, c_n$ é a solução não trivial de (III.9). A função $y(x)$ é solução da equação homogênea e mais:

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

donde, pela unicidade da solução com tais condições iniciais $y(x) \equiv 0$ (pois a função idênticamente nula é solução de $L[y] = 0$ que em x_0 assume, ela e suas $n-1$ primeiras derivadas, o valor zero). Sendo $y(x) \equiv 0$ e $y_1, \dots, y_n$ linearmente independentes, conclui-se que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ o que é uma contradição. Devemos ter sempre, portanto, $W(x) \neq 0$.

Desta demonstração conclui-se, imediatamente o seguinte:

COROLÁRIO: Se as funções $y_1, \dots, y_n$ são soluções da equação diferencial linear homogênea de ordem n e se seu Wronskiano é diferente de zero num ponto do intervalo $]a, b[$, então o Wronskiano será não nulo em todos os pontos de $]a, b[$ e as funções serão linearmente independentes.

Um resultado um pouco mais forte que este corolário é o Teorema de Liouville, que veremos a seguir e pelo qual se pode calcular o valor de W em qualquer ponto sendo conhecido seu valor num ponto de intervalo $]a, b[$.

TEOREMA DE LIOUVILLE: Sejam $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluções da equação diferencial linear homogênea $L[y] = 0$, de ordem n . Se $W = W[y_1, y_2, \dots, y_n]$, tem-se, para x_0 e x no intervalo $]a, b[$:

$$(III.10) \quad W(x) = W(x_0) \exp \left[- \int_{x_0}^x \frac{A_1(t)}{A_0(t)} dt \right].$$

Demonstração: Sendo

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

calculemos sua derivada, que será a soma de determinantes, cada um dos quais obtido de W pela derivação de uma linha. Ora, as parcelas obtidas pela derivação da 1ª, 2ª, ..., (n-1)-ésima linhas serão nulas pois se

rão determinantes com duas linhas iguais. Temos, então:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Sendo $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluções de $L[y] = 0$, podemos substituir:

$$y_i^{(n)} = -\frac{A_1}{A_0} y_i^{(n-1)} - \frac{A_2}{A_0} y_i^{(n-2)} - \cdots - \frac{A_n}{A_0} y_i,$$

e, novamente, obtemos W' como soma de n determinantes, dos quais, os $(n-1)$ últimos anulam-se por terem duas linhas proporcionais, resultando o seguinte:

$$W' = -\frac{A_1}{A_0} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

isto é, W é a solução da equação diferencial

$$W'(x) = -\frac{A_1(x)}{A_0(x)} W(x), \quad a < x < b,$$

que no ponto x_0 assume o valor $W(x_0)$. Tem-se, então, por integração, a fórmula (III.10), o que prova o Teorema.

A fórmula (III.10) prova, mais uma vez, que o wronskiano de n soluções de (III.5) ou é idênticamente nulo ou nunca se anula (neste último caso, as n soluções formam um sistema fundamental de soluções). Mais ainda, mostra que o wronskiano não depende do particular conjunto de soluções que se tome, mas apenas do valor dêste wronskiano num ponto do intervalo. Isto é, se $y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n$ são soluções de (III.5) - de modo que

$$W[y_1, \dots, y_n](x_0) = W[z_1, \dots, z_n](x_0),$$

então teremos:

$$W[y_1, \dots, y_n] \equiv W[z_1, \dots, z_n]$$

O Wronskiano nos permitirá, ainda, dizer quando é possível - construir uma equação diferencial linear homogênea de ordem n que tenha como sistema fundamental de soluções um conjunto de n funções dadas previamente. Isto faremos na proposição seguinte:

PROPOSIÇÃO III.5: Dadas n funções n vezes continuamente diferenciáveis em $]a, b[$: $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{(n)}(]a, b[)$, a condição necessária e suficiente para que exista uma equação diferencial linear homogênea de ordem n da qual as n funções acima sejam um sistema fundamental de soluções é que $W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0$, para todo x , $a < x < b$.

Demonstração: Que a condição é necessária já foi visto na proposição III.4. Vejamos que é também suficiente, supondo

$$W[y_1, \dots, y_n](x) \neq 0$$

e construindo uma equação $L[y] = 0$, de ordem n , da qual as funções $y_1, \dots, y_n$ sejam soluções e, então, pelo Corolário da Proposição III.4, elas formarão um sistema fundamental de soluções.

Definimos $L[y]$ do seguinte modo:

$$L[y] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}$$

$L[y]$ está bem definida, pois as funções $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{(n)}(]a, b[)$.

A equação diferencial linear homogênea $L[y] = 0$ é de ordem n já que, para $a < x < b$, se tem:

$$A_0(x) = W[y_1, \dots, y_n](x),$$

pois este é o coeficiente de $y^{(n)}$ no desenvolvimento de $L[y]$, e então $A_0(x) \neq 0$, $a < x < b$. Além disso, fazendo sucessivamente, no determinante que define $L[y]$: $y = y_1$, $y = y_2$, ..., $y = y_n$, tem-se que

$$L[y_1] = 0, \quad L[y_2] = 0, \quad \dots, \quad L[y_n] = 0,$$

o que demonstra completamente a proposição III.5.

EXEMPLO: as funções x e $\sin x$, que são infinitamente deriváveis, têm, como Wronskiano o determinante:

$$W = \begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = x \cos x - \sin x$$

Como $W(x) = 0$ $x = 0$, podemos construir, para $x \neq 0$, uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem da qual x , $\sin x$ são um sistema fundamental de soluções. Esta equação é:

$$\begin{vmatrix} x & \sin x & y \\ 1 & \cos x & y' \\ 0 & -\sin x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

ou:

$$(x \cos x - \sin x) y'' + (x \sin x) y' - (\sin x) y = 0$$

Qualquer solução da equação acima será, portanto, da forma:

$$y = c_1 x + c_2 \sin x$$

III.4 - ABAIXAMENTO DA ORDEM DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR HOMOGÊNEA NA SUA RESOLUÇÃO. Vimos que conhecido um sistema fundamental de soluções da equação linear homogênea $L[y] = 0$, estão conhecidas todas as suas soluções. Até aqui, no entanto, não se viu nenhum método para determinar um sistema fundamental de soluções. De fato, no caso em que os coeficientes $A_0, A_1, \dots, A_n$ não sejam constantes nem existem, mesmo, métodos elementares que resolvam o problema em sua generalidade. Tem-se, no entanto, o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO III.6: Conhecida uma solução particular y_1 da equação (III.5) $L[y] = 0$, de ordem n , por meio de uma transformação, é possível reduzir a resolução desta equação à resolução de uma equação diferencial linear homogênea de ordem $n-1$.

Demonstração: Consideramos as variáveis v e z definidas como: $y = y_1 v$ e $z = v'$, onde y_1 é a solução particular de $L[y] = 0$. Tem-se, então, por derivações sucessivas:

$$\text{de (0)} \quad y = y_1 v$$

$$(1) \quad y' = y_1' v + y_1 [z]$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y'' &= y_1'' v + l_2[z, z'] \\
 &\dots\dots\dots \\
 (n) \quad y^{(n)} &= y_1^{(n)} v + l_n[z, z', \dots, z^{(n-1)}]
 \end{aligned}$$

em que $l_1[z]$, $l_2[z, z']$, ..., $l_n[z, z', \dots, z^{(n-1)}]$ são expressões lineares em seus argumentos, com coeficientes dependendo de x . Multiplicando a relação (0) por A_n , relação (1) por A_{n-1} , (2) por A_{n-2} , etc etc..., até a relação (n) que deve ser multiplicada por A_0 , somando as relações obtidas, obtém-se:

$$L[y] = L[y_1]v + \tilde{L}[z] \quad ,$$

em que $\tilde{L}[z]$ é um operador linear envolvendo as derivadas de z até a ordem $n-1$. Tem-se então o seguinte:

$$L[y] = 0 \iff \tilde{L}[z] = 0$$

Isto é, resolve-se a equação diferencial de ordem $n-1$: $\tilde{L}[z] = 0$ e as soluções da equação $L[y] = 0$ serão da forma

$$y = y_1 \int z \, dz$$

em que z é solução de $\tilde{L}[z] = 0$.

III.5 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR HOMOGÊNEA COM COEFICIENTES CONSTANTES

Consideremos o operador

$$(III.11) \quad L[y] = A_0 y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} y' + A_n y \quad ,$$

em que $A_0, A_1, \dots, A_n$ são constantes (reais ou complexas) e $A_0 \neq 0$. A equação

$$(III.12) \quad L[y] = 0$$

será, então, uma equação diferencial linear homogênea, de ordem n , com coeficientes constantes.

Sendo $A_i(x) \equiv A_i$ constante, os coeficientes de (III.12) são funções definidas e contínuas em toda a reta. De acordo com o que foi visto no § III.2, portanto, esta equação diferencial admite soluções também definidas em toda a reta.

No caso particular em que $n = 1$, tem-se a equação de 1ª ordem

$$y' + Ay = 0$$

cula solução geral, conforme o que se viu no 1º capítulo, é da forma

$$y(x) = c e^{-Ax}$$

Inspirados neste caso, procuremos soluções de (III.12) da forma

$$(III.13) \quad y = e^{\lambda x}$$

Sendo $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$, para $k = 1, 2, \dots$, tem-se, por substituição:

$$L[e^{\lambda x}] = [A_0 \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1} \lambda + A_n] e^{\lambda x}$$

Como $e^{\lambda x} \neq 0$ para todo x , tem-se:

$$L[e^{\lambda x}] = 0 \iff A_0 \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1} \lambda + A_n = 0,$$

isto é, a função $e^{\lambda x}$ é solução da equação diferencial $L[y] = 0$ quando, e somente quando, λ for raiz do polinômio

$$(III.14) \quad L(\lambda) = A_0 \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1} \lambda + A_n,$$

obtido da equação quando se troca y por λ e ordem de derivação por expoente. O polinômio $L(\lambda)$ definido em (III.14) diz-se polinômio característico da equação diferencial $L[y] = 0$ e a equação $L(\lambda) = 0$ diz-se equação característica da equação diferencial $L[y] = 0$.

Sendo assim, conhecida uma raiz λ_0 do polinômio característico tem-se a solução $y = e^{\lambda_0 x}$ da equação diferencial (III.12). Veremos que o conhecimento de todas as raízes de $L(\lambda) = 0$ permite a construção de um sistema fundamental de soluções de $L[y] = 0$ e, conseqüentemente, ficam determinadas todas as soluções da equação dada. Distinguem-se dois casos:

III.5.1 - O polinômio característico tem n raízes distintas: Sejam, então, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ as n raízes (reais ou complexas) da equação característica $L(\lambda) = 0$, e suponhamos que sejam duas a duas distintas, isto é: $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Pelo que vimos anteriormente, as n funções

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

são soluções da equação diferencial (III.12): $L[y] = 0$. Demonstraremos

que estas funções são linearmente independentes formando, portanto, um sistema fundamental de soluções da equação (III.12). Isto encerra, neste caso, a resolução da equação diferencial $L[y] = 0$, pois teremos então que y será solução de $L[y] = 0$ se, e somente se, y fôr da forma:

$$(III.15) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

De modo mais geral, mostraremos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO III.7 : Sendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ números (reais ou complexos) tais que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, então as n funções

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

são linearmente independentes.

Daremos duas demonstrações: uma delas aplicando o critério do Wronskiano e a outra diretamente pela definição de independência linear.

1ª demonstração: calculemos o Wronskiano das funções em questão:

$$W[e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

e este último é o determinante de Vandermonde dos números $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, donde, como $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -A_1/A_0$, temos:

$$W[e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}] = e^{-\frac{A_1}{A_0}} \prod_{i>j} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0$$

já que, por hipótese $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

Pelo corolário da Proposição III.4, fica visto que as n funções

$$e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

são linearmente independentes.

2ª demonstração: façamo-la por indução sobre n . Se $n = 1$ tem-se uma única função $e^{\lambda x}$ que é linearmente independente por não ser nula.

Suponhamos a proposição demonstrada para $n-1$, isto é, se $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ são números distintos dois a dois: $\mu_i \neq \mu_j$, se $i \neq j$, então as funções

$$e^{\mu_1 x}, e^{\mu_2 x}, \dots, e^{\mu_{n-1} x}$$

são linearmente independentes. Mostremos, então, que este resultado é válido também para as n funções

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x},$$

em que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são números tais que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. De fato, suponhamos que $c_1, c_2, \dots, c_n$ sejam tais que

$$(III.16) \quad c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x} \equiv 0,$$

tem-se, então, multiplicando (III.16) por $e^{-\lambda_1 x}$:

$$(III.17) \quad c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \dots + c_n e^{(\lambda_n - \lambda_1)x} \equiv 0$$

e, por derivação:

$$(III.18) \quad (\lambda_2 - \lambda_1) c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \dots + (\lambda_n - \lambda_1) c_n e^{(\lambda_n - \lambda_1)x} \equiv 0$$

Sendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dois a dois distintos o mesmo se dará com os $n-1$ números: $\mu_1 = \lambda_2 - \lambda_1$, $\mu_2 = \lambda_3 - \lambda_1$, ..., $\mu_{n-1} = \lambda_n - \lambda_1$ e, pela hipótese de indução, as funções

$$e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}, \dots, e^{(\lambda_n - \lambda_1)x}$$

são linearmente independentes, donde, valendo (III.18), temos:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)c_2 = \dots = (\lambda_n - \lambda_1)c_n = 0$$

que nos dá, como $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$ para $i \neq 1$, $c_2 = \dots = c_n = 0$

Se, do assim, de (III.17) tiramos ainda $c_1 = 0$ donde se conclui, finalmente, que as funções

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

são linearmente independentes.

EXEMPLO: Resolvamos a equação diferencial linear de 3ª ordem:

$$y''' + y'' - 2y' = 0,$$

cujas equação característica $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0$ tem as seguintes raízes: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -2$.

A solução geral da equação diferencial dada será, portanto:

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-2x}$$

As constantes c_1 , c_2 e c_3 podem ser determinadas se exigirmos que a solução da equação diferencial satisfaça às condições iniciais: $y(x_0) = b_0$, $y'(x_0) = b_1$, $y''(x_0) = b_2$, por meio da resolução de um sistema linear de 3 equações nas 3 incógnitas c_1 , c_2 , c_3 . Esta solução, certamente, será única.

Observação para o caso em que os coeficientes $A_0, A_1, \dots, A_n$ sejam todos reais: tudo o que se fez até agora é válido tanto no caso real ou complexo, ou seja, os coeficientes da equação diferencial podem ser complexos, e suas soluções podem também assumir valores complexos. Aliás, as soluções determinadas acima, da forma $e^{\lambda x}$ são, em geral, funções com valores complexos, pois λ é raiz de um polinômio.

No caso em que a equação diferencial seja real, isto é, tenha todos os coeficientes reais, sendo preciso, é possível obter da expressão (III.15) uma outra que dê as soluções reais da equação diferencial.

Suponhamos, então, que os coeficientes $A_0, A_1, \dots, A_n$ de $L[y] = 0$ sejam todos reais e seja $\lambda_0 = a + ib$ uma raiz complexa (não real) do polinômio característico $L(\lambda)$. Vejamos que também $\overline{\lambda_0}$ é raiz de $L(\lambda)$. De fato, sendo reais os coeficientes temos $\overline{A_i} = A_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, donde concluímos:

$$0 = \overline{L(\lambda_0)} = A_0 \overline{\lambda_0}^n + A_1 \overline{\lambda_0}^{n-1} + \dots + A_{n-1} \overline{\lambda_0} + A_n = L(\overline{\lambda_0})$$

Temos, então, neste caso, duas soluções da equação diferencial:

$$y = e^{\lambda_0 x} = e^{ax+ibx}$$

e

$$\overline{y} = e^{\overline{\lambda_0} x} = e^{ax-ibx}$$

Sendo y e $\overline{y}$ soluções, qualquer combinação linear destas - duas também é solução, assim sendo, as funções Y e Z definidas abaixo, são também soluções da equação diferencial.

$$Y = \frac{1}{2} (y + \overline{y}) = e^{ax} \cos bx$$

e

$$Z = \frac{1}{2i} (y - \overline{y}) = e^{ax} \sin bx$$

As soluções Y e Z são funções com valores reais. Deixamos a cargo do leitor verificar que se um conjunto de funções que inclua as funções y e $\overline{y}$ é linearmente independente e mesmo se dá com o conjunto obtido dêste pela substituição de y e $\overline{y}$ por Y e Z .

Em resumo, se os coeficientes da equação diferencial $L[y] = 0$ são constantes reais, a cada raiz complexa λ_0 não real da equação característica $L(\lambda) = 0$ corresponde uma outra $\overline{\lambda_0}$ e as soluções complexas

$$e^{\lambda_0 x}, \quad e^{\overline{\lambda_0} x}$$

podem ser substituídas na expressão (III.15) por outras duas com valores reais, de modo a formar, ainda, um sistema fundamental de soluções.

EXEMPLO: Resolvamos a equação diferencial

$$y''' + 3y'' + 3y' - 7y = 0,$$

que tem como polinômio característico: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda - 7$, cujas raízes são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2 + i\sqrt{3}$ e $\lambda_3 = \overline{\lambda_2} = -2 - i\sqrt{3}$.

Da expressão (III.15) tem-se a solução geral:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{(-2+i\sqrt{3})x} + c_3 e^{(-2-i\sqrt{3})x}$$

Se, porém, procuramos soluções reais, devemos considerar a solução geral noutra forma, de acordo com a observação acima:

$$y = c_1 e^x + e^{-2x} (c_2 \cos \sqrt{3} x + c_3 \sin \sqrt{3} x)$$

Esta segunda forma da solução geral apresenta vantagem sobre a primeira. De fato, enquanto as constantes c_1 , c_2 e c_3 assumem valores reais na segunda forma da solução geral têm-se todas as soluções reais da equação diferencial, mas se admitirmos para c_1 , c_2 e c_3 valores complexos quaisquer teremos, novamente, todas as soluções obtidas na primeira forma.

III.5.2 - O polinômio característico tem raízes múltiplas: Sejam, então, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ as raízes de $L(\lambda) = 0$ com multiplicidades $m_1, m_2, \dots, m_r$, respectivamente. É claro que $m_1 + \dots + m_r = n$. Lembramos que λ_0 é raiz de $L(\lambda)$, com multiplicidade m se, e somente se, podemos escrever

$$(III.19) \quad L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m L_1(\lambda),$$

onde $L_1(\lambda)$ é um polinômio tal que $L_1(\lambda_0) \neq 0$. Equivalentemente, λ_0 é raiz de $L(\lambda)$ com multiplicidade m se, e somente se,

$$(III.20) \quad L(\lambda_0) = L'(\lambda_0) = \dots = L^{(m-1)}(\lambda_0) = 0 \quad \text{e} \quad L^{(m)}(\lambda_0) \neq 0$$

Sendo λ_0 uma raiz de $L(\lambda)$ com multiplicidade m , procuremos soluções de $L[y] = 0$ entre as funções da forma:

$$y = p(x) e^{\lambda_0 x}$$

Calculando as derivadas sucessivas de $y = p(x) e^{\lambda x}$ pela regra de Leibnitz temos:

$$\begin{aligned} y &= p(x) e^{\lambda x} \\ y' &= e^{\lambda x} (p' \lambda + p'') \\ y'' &= e^{\lambda x} (p'' \lambda^2 + 2p' \lambda + p''') \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n-1)} &= e^{\lambda x} [p^{(n-1)} \lambda^{n-1} + \binom{n-1}{1} p^{(n-2)} \lambda^{n-2} + \dots + p^{(n)}] \\ y^{(n)} &= e^{\lambda x} [p^{(n)} \lambda^n + \binom{n}{1} p^{(n-1)} \lambda^{n-1} + \binom{n}{2} p^{(n-2)} \lambda^{n-2} + \dots + p^{(n)}] \end{aligned}$$

que, substituídas na equação diferencial $L[y] = 0$, nos dão:

$$\begin{aligned} L[p(x) e^{\lambda x}] &= e^{\lambda x} [p(x)L(\lambda) + p'(x)L'(\lambda) + \frac{1}{2!} p''(x)L''(\lambda) + \dots + \\ &+ \frac{1}{(m-1)!} p^{(m-1)}(x)L^{(m-1)}(\lambda) + \frac{1}{m!} p^{(m)}(x)L^{(m)}(\lambda) + \dots + \frac{1}{n!} p^{(n)}(x)L^{(n)}(\lambda)] \end{aligned}$$

mental de soluções e podemos dizer que $L[y] = 0$ se, e só se, y fôr da forma:

$$(III.22) \quad y = p_1(x) e^{\lambda_1 x} + p_2(x) e^{\lambda_2 x} + \dots + p_r(x) e^{\lambda_r x},$$

em que os p_i são polinômios de grau $\leq m_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, r$.

A independência linear das soluções (III.21) ficará provada com a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO III.8 - Sendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ números (reais ou complexos) tais que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ e $p_1, p_2, \dots, p_r$ polinômios quaisquer, então

$$p_1(x) e^{\lambda_1 x} + p_2(x) e^{\lambda_2 x} + \dots + p_r(x) e^{\lambda_r x} \equiv 0$$

implica $p_1(x) \equiv 0$, $p_2(x) \equiv 0$, ..., $p_r(x) \equiv 0$.

Demonstração: Será feita por indução sobre r . De fato, para $r = 1$ a proposição é verdadeira porque

$$p(x) e^{\lambda x} \equiv 0 \iff p(x) \equiv 0.$$

Suponhamos o resultado válido para $r-1$, isto é, se $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r-1}$ são distintos dois a dois e se $q_1, q_2, \dots, q_{r-1}$ são polinômios de modo que

$$q_1(x) e^{\mu_1 x} + q_2(x) e^{\mu_2 x} + \dots + q_{r-1}(x) e^{\mu_{r-1} x} \equiv 0$$

então os polinômios $q_1, q_2, \dots, q_r$ são todos idênticamente nulos.

Mostremos então que a proposição vale para r . Sejam, portanto, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ números tais que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ e $p_1, p_2, \dots, p_r$ polinômios tais que

$$(III.23) \quad p_1(x) + p_2(x) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \dots + p_r(x) e^{(\lambda_r - \lambda_1)x} \equiv 0$$

Se s é o grau de $p_1(x)$ e se derivamos a relação (III.23) $s + 1$ vezes obtemos uma expressão da forma:

$$(III.24) \quad q_2(x) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \dots + q_r(x) e^{(\lambda_r - \lambda_1)x} \equiv 0,$$

em que $q_i = (\lambda_i - \lambda_1)^{s+1} p_i + \text{termos de grau menor que o grau de } p_i$,

porque envolvem derivadas de p_i , somente, logo q_i tem o mesmo grau que p_i . Aplicada, então, a hipótese de indução, de (III.25) concluímos que os polinômios $q_2, \dots, q_r$ são idênticamente nulos, logo também são idênticamente nulos os polinômios $p_2, \dots, p_r$. Levado este resultado em (III.24) conclui-se também que p_1 seja idênticamente nulo e está provada a Proposição III.8.

EXEMPLO: Resolver a equação diferencial

$$y^{(4)} - y'' = 0$$

Sua equação característica, $\lambda^4 - \lambda^2 = 0$ tem as raízes: $\lambda_1 = 0$, com multiplicidade $m_1 = 2$, e as raízes simples $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. A solução geral, de acordo com (III.22) será da forma:

$$y = p_1(x) + p_2(x) e^x + p_3(x) e^{-x},$$

em que p_1 é de grau ≤ 1 , p_2 e p_3 são de grau 0, isto é, a solução geral pode ser escrita como:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 e^{-x}$$

Observação para o caso em que os coeficientes $A_0, A_1, \dots, A_n$ sejam todos reais: Cabe aqui a mesma observação feita anteriormente, pois, ainda quando a equação diferencial dada tenha coeficientes todos reais, a expressão (III.20) pode dar soluções com valores complexos. É fácil verificar que o mesmo raciocínio usado anteriormente pode ser aqui aplicado para obtermos soluções reais quando os coeficientes da equação dada foram todos reais. De fato, se $L(\lambda) = 0$ é uma equação com coeficientes reais e se $\lambda_0 = a + ib$ é raiz de $L(\lambda)$ com multiplicidade m , então vê-se imediatamente de (III.20) e porque

$$L^{(i)}(\bar{\lambda}) = \overline{L^{(i)}(\lambda)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

que $\bar{\lambda}_0 = a - ib$ será também raiz de $L(\lambda) = 0$ e com a mesma multiplicidade m . Se λ_0 é um número complexo não real, temos, então as $2m$ soluções da equação diferencial $L[y] = 0$:

$$(III.26) \quad \begin{aligned} & e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda_0 x} \\ & e^{\bar{\lambda}_0 x}, x e^{\bar{\lambda}_0 x}, \dots, x^{m-1} e^{\bar{\lambda}_0 x} \end{aligned}$$

Substituímos, análogamente ao que se fez atrás, cada par

$$x^k e^{\lambda_0 x}, \quad x^k e^{\overline{\lambda_0} x} \quad (k = 0, 1, \dots, m-1)$$

pelo par de soluções obtidas como combinações lineares das anteriores:

$$x^k e^{ax} \cos bx, \quad x^k e^{ax} \sin bx$$

Temos, então, as $2m$ soluções

$$(III.27) \quad \begin{aligned} &e^{ax} \cos bx, \quad x e^{ax} \cos bx, \dots, \quad x^{m-1} e^{ax} \cos bx \\ &e^{ax} \sin bx, \quad x e^{ax} \sin bx, \dots, \quad x^{m-1} e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

e as combinações lineares destas, com coeficientes reais, dão:

$$p(x) e^{ax} \cos bx, \quad q(x) e^{ax} \sin bx,$$

onde p e q são polinômios de grau $\leq m-1$.

Ainda aqui, se num sistema fundamental de soluções trocamos as soluções (III.26) pelas soluções (III.27) ficamos ainda com um sistema fundamental de soluções.

Repetindo o raciocínio para todo par de raízes complexas conjugadas de $L(\lambda)$ obtemos um sistema fundamental de soluções reais.

EXEMPLO: Ao resolver a equação diferencial

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0,$$

cujo polinômio característico é:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda^2 + \lambda + 1)^2$$

com duas raízes duplas:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

($m_1 = m_2 = 2$), temos a solução geral

$$y = p(x) e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})x} + q(x) e^{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})x},$$

p e q polinômios do 1º grau. A solução geral real será portanto:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left[p(x) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + q(x) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right],$$

com p e q polinômios de 1º grau, ou:

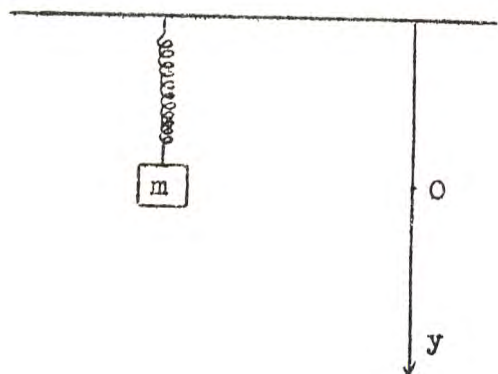
$$y = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x} \left[(c_1 + c_2x) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + (c_3 + c_4x) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right],$$

em que tomados c_1, c_2, c_3 e c_4 reais temos tôdas as soluções reais, mas admitindo para estas constantes valores complexos quaisquer temos tôdas as soluções.

III.5.3 - Em que se estuda a equação diferencial linear de 2ª ordem:

$$(III.28) \quad a y'' + b y' + cy = 0$$

homogênea, com coeficientes constantes e tais que $a > 0$, $b \geq 0$ e $c > 0$.



Esta equação diferencial aparece, por exemplo, no estudo das oscilações de um corpo suspenso por uma mola, levando-se em conta a resistência do ar. A variável $x = t$ seria o tempo, y o afastamento do corpo da posição de equilíbrio, $a = m$ a massa deste corpo, b coeficiente ligado à resistência do ar e c coeficiente ligado à elasticidade da mola.

A equação característica de (III.28) é:

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0,$$

cujas raízes são

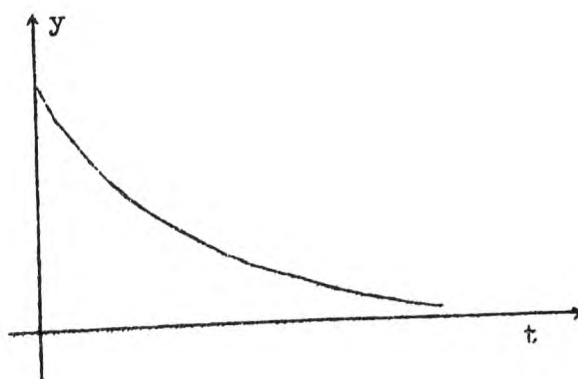
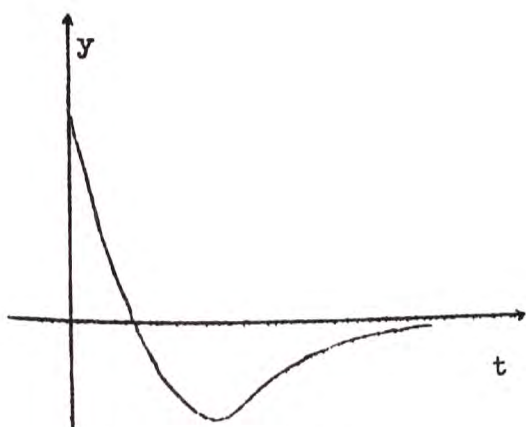
$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Façamos $h = \frac{b}{2a}$. Distinguem-se 3 casos:

1º caso: $b^2 - 4ac > 0$. Indicamos $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ com k e temos as duas raízes simples: $\lambda_1 = -h + k$ e $\lambda_2 = -h - k$. A solução geral será da forma:

$$y = c_1 e^{(-h+k)t} + c_2 e^{(-h-k)t} = (c_1 + c_2 e^{-2kt}) e^{(-h+k)t}$$

que terá uma das formas abaixo, conforme a expressão $c_1 + c_2 e^{-2kt}$ se anule, ou não, para $t \geq 0$ porque $h > k$, logo $-h + k < 0$:



ou, ainda, o simétrico destes (em relação ao eixo t).

Este caso equivale a uma resistência muito grande.

2º caso: $b^2 - 4ac = 0$. Então $\lambda_1 = \lambda_2 = -h$. A solução geral terá forma $y = (c_1 + c_2 t) e^{-ht}$, cujos gráficos são análogos aos anteriores.

3º caso: $b^2 - 4ac < 0$. Pomos $k = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ e temos as duas raízes (complexas) da equação característica:

$$\lambda_1 = -h + ik \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -h - ik$$

A solução geral real da equação diferencial (III.28) será, desta feita:

$$y = (c_1 \cos kt + c_2 \sin kt) e^{-ht}$$

Em geral, ao invés das constantes c_1, c_2 consideram-se novas constantes A e φ de modo que se tenha:

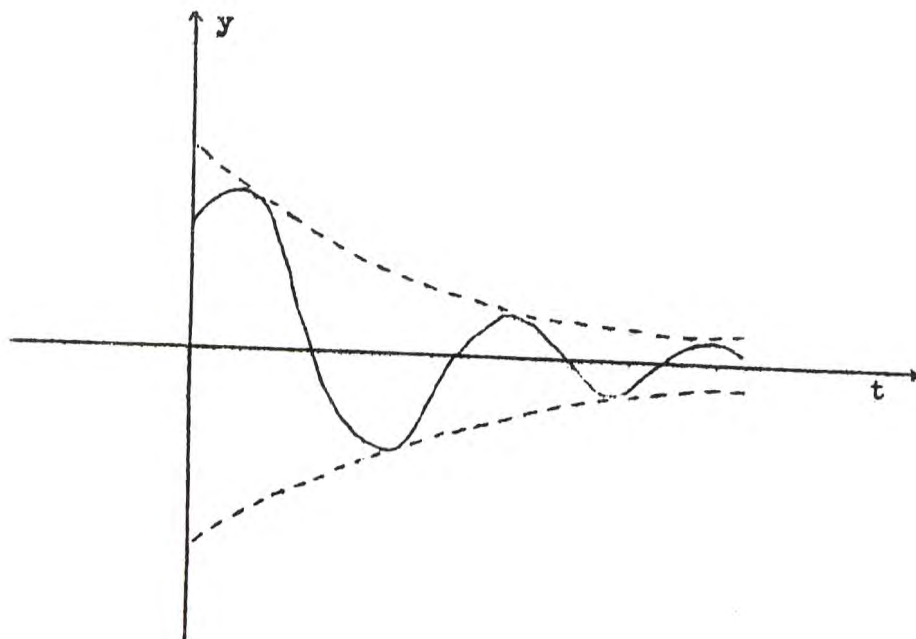
$$c_1 = A \sin \varphi$$

$$c_2 = A \cos \varphi$$

e a solução geral toma a forma:

$$y = A e^{-ht} \sin(kt + \varphi)$$

Estas soluções descrevem oscilações de período $T = \frac{2\pi}{k}$ e tendo frequência $\frac{k}{2\pi}$. O gráfico de uma destas funções tem o seguinte aspecto:



Este caso é o chamado das oscilações amortecidas ($b \neq 0$).

A equação diferencial $ay'' + cy = 0$, caso particular de (III.28), em que $b = 0$, só apresenta o 3º dos casos anteriores. Se fizermos

$$k = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

teremos $\lambda_1 = ik$, $\lambda_2 = -ik$ e a solução geral será

$$y = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$$

ou

$$y = A \sin(kt + \varphi)$$

III.6 - EXERCÍCIOS

Achar uma equação diferencial linear da qual as seguintes funções sejam um sistema fundamental de soluções:

1. 1 , x^2 , $\cos x$

2. x , e^{x^2}

3. 2 , e^x , e^{-x} , e^{-5x}

4. 5 , $\sin 2x$, $\cos 2x$, e^{3x}

Achar as soluções reais das seguintes equações diferenciais:

5. $y'' + 4y' + 5y = 0$

$$6. \quad y''' - 5y'' + 6y' = 0$$

$$7. \quad y^{(4)} + 4y^{(2)} + 3y = 0$$

$$8. \quad y^{(5)} + 5y^{(3)} + 6y' = 0$$

$$9. \quad y^{(6)} - y^{(4)} = 0$$

$$10. \quad y^{(5)} - 2y^{(3)} = 0$$

III.7 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR NÃO HOMOGÊNEA - MÉTODO DA VARIAÇÃO DAS CONSTANTES

Sendo

$$(III.29) \quad L[z] = A_0(x)z^{(n)} + A_1(x)z^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)z' + A_n(x)z,$$

passemos a considerar a equação diferencial linear com segundo membro:

$$(III.30) \quad L[z] = B(x),$$

em que supomos $A_0, A_1, \dots, A_n$, e B funções definidas e contínuas no intervalo $a < x < b$ e também $A_0(x) \neq 0$.

A equação homogênea

$$(III.31) \quad L[y] = 0$$

diz-se equação homogênea associada à equação (III.30). No início deste capítulo vimos que, como consequência da linearidade do operador L , qual quer solução de $L[z] = B$ pode ser obtida como soma de uma solução particular z_0 de (III.30) e uma solução da equação homogênea associada $L[y] = 0$. Ora, vimos também que uma equação diferencial linear homogênea de ordem n , como (III.31), admite sempre um sistema fundamental de soluções e se $y_1, y_2, \dots, y_n$ é um sistema fundamental de soluções de (III.31) tínhamos:

$$L[y] = 0 \iff y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

em que $c_1, c_2, \dots, c_n$ são constantes. Tem-se, então, que se z_0 é uma solução particular de (III.30), isto é, $L[z_0] = B$, então

$$(III.32) \quad L[z] = B \iff z = z_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

Neste e no parágrafo seguinte, exporemos métodos para obtenção de uma solução particular z_0 de (III.30).

A exemplo do que se fez na parte B de I.8.1 para a equação di

$$z''(x) = c_1(x)y_1''(x) + \dots + c_n(x)y_n''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + \dots + c_n'(x)y_n'(x) =$$

$$= c_1(x)y_1''(x) + \dots + c_n(x)y_n''(x) ;$$

$$\dots$$

$$z^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) + c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) +$$

$$+ \dots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x) ;$$

$$z^{(n)}(x) = c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n)}(x) + c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots +$$

$$+ c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \dots + c_n(x)y_n^{(n)}(x) + \frac{B(x)}{A_0(x)} ;$$

e, daqui, por substituição chegamos a:

$$L[z] = c_1 L[y_1] + \dots + c_n L[y_n] + A_0 \cdot \frac{B}{A_0} = B$$

isto é, z é uma solução de (III.30) e está provada a proposição.

EXEMPLO: Consideremos a equação diferencial linear

$$x z'' - z' = x^2$$

numa das semi-retas: $] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$, A equação homogênea associada é $x y'' - y' = 0$, ou $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$, donde $\log y' = \log x + c$, ou $y' = Cx$ ou ainda $y = c_1 + c_2 x^2$. Assim é que $1, x^2$ formam um sistema fundamental de soluções da equação homogênea. Pelo método da variação das constantes $z = c_1(x) + c_2(x) x^2$ é solução da equação dada, desde que $c_1(x)$ e $c_2(x)$ sejam tais que:

$$\begin{cases} c_1' + c_2' x^2 = 0 \\ 2c_2' x = \frac{x^2}{x} = x \end{cases}$$

ou seja, $c_1' = -\frac{x^2}{2}$ e $c_2' = \frac{1}{2}$. Donde se tira $c_1(x) = -\frac{x^3}{6} + k_1$ e $c_2(x) = \frac{x}{2} + k_2$ e, finalmente,

$$z = \left(-\frac{x^3}{6} + k_1\right)1 + \left(\frac{x}{2} + k_2\right)x^2$$

ou:

$$z = \frac{x^3}{3} + k_1 + k_2 x^2 ,$$

que é a solução geral da equação não homogênea.

O método acima exposto aplica-se a qualquer equação diferencial linear (com coeficientes constantes, ou não!) desde que seja conhecida

do um sistema fundamental de soluções da equação homogênea associada. Todavia, ele é, em geral, bastante trabalhoso dependendo da resolução de um sistema de n equações a n incógnitas e mais n quadraturas. No próximo parágrafo, veremos outros métodos que, não obstante, se apliquem a casos mais particulares são, muitas vezes, bem mais simples.

III.8 - EQUAÇÃO DIFERENCIAL LINEAR COM COEFICIENTES CONSTANTES, TENDO COMO 2º MEMBRO UM SEMI-POLINÔMIO:

Uma função diz-se semi-polinômio quando é uma soma de produtos de exponencial por polinômio, mais precisamente, um semi-polinômio é uma função da seguinte forma:

$$(III.35) \quad B(x) = \sum_{i=1}^s e^{\lambda_i x} Q_i(x)$$

em que λ_i são números quaisquer (reais ou complexos em geral) e os Q_i são polinômios.

Consideremos a equação diferencial linear

$$(III.36) \quad L[z] = B(x) ,$$

em que $B(x)$ é o semi-polinômio (III.35) e mostremos que ela admite soluções com uma forma especial podendo ser determinadas com cálculos mais simples que os do método anterior.

Vejamos antes que se $B_1 = e^{\lambda_1 x} Q_1(x)$, então, $B = B_1 + B_2 + \dots + B_s$ e, graças à linearidade de L , podemos reduzir a resolução de (III.36) à resolução das equações mais simples:

$$L[z_1] = B_1 , \quad L[z_2] = B_2 , \quad \dots , \quad L[z_n] = B_n ,$$

pois se $z_1, z_2, \dots, z_n$ são soluções, respectivamente, destas equações então $z = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ é solução de $L[z] = B$.

Assim é que nos basta achar uma solução particular de uma equação diferencial do seguinte tipo:

$$(III.37) \quad L[z] = e^{\lambda x} Q(x) ,$$

em que λ é um número complexo qualquer e Q um polinômio de grau k .

Ora, se $p \in \mathcal{C}^{(n)}(\mathbb{R})$ é uma função n vezes continuamente diferenciável e λ é um número complexo qualquer, conforme o que se calculou em III.5, tem-se:

$$(III.38) \quad L[p(x) e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} [p(x)L(\lambda) + p'(x)L'(\lambda) + \dots + \\ + \frac{1}{(m-1)!} p^{(m-1)}(x)L^{(m-1)}(\lambda) + \frac{1}{m!} p^{(m)}(x)L^{(m)}(\lambda) + \dots + \\ + \frac{1}{(n-1)!} p^{(n-1)}(x)L^{(n-1)}(\lambda) + \frac{1}{n!} p^{(n)}(x)L^{(n)}(\lambda)]$$

Vejamos se é possível encontrar para (III.37) uma solução da forma $p(x) e^{\lambda x}$. Para isto devemos distinguir dois casos:

1º caso - Se $L(\lambda) \neq 0$, isto é, se λ não é raiz da equação característica da equação homogênea associada $L[y] = 0$: neste caso, veremos que a equação diferencial (III.37)

$$L[z] = e^{\lambda x} Q(x)$$

admite uma solução da forma

$$(III.39) \quad z = p(x) e^{\lambda x},$$

em que p é um polinômio de grau k (= grau de Q). De fato, se p é um polinômio e $L(\lambda) \neq 0$, a expressão entre colchetes em (III.38):

$$(III.40) \quad p(x)L(\lambda) + p'(x)L'(\lambda) + \dots + \frac{1}{(m-1)!} p^{(m-1)}(x)L^{(m-1)}(\lambda) + \\ + \frac{1}{m!} p^{(m)}(x)L^{(m)}(\lambda) + \dots + \frac{1}{n!} p^{(n)}(x)L^{(n)}(\lambda)$$

será um polinômio de mesmo grau de p . Assim é que, se tomarmos p um polinômio de grau k :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$$

e impusermos $L[p(x) e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} Q(x)$, da identificação de $Q(x)$ com o polinômio (III.40), obtemos as $k+1$ relações necessárias à determinação dos coeficientes de p .

EXEMPLOS:

1) Consideremos a equação diferencial

$$z'' - 7z' + 12z = x,$$

que é da forma (III.37), onde $\lambda = 0$ e $Q(x) = x$. A equação característica da equação homogênea associada, $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ não admite $\lambda = 0$ como raiz. Estamos, desta feita, no caso precedente, onde $k = 1$.

Tomemos, portanto, uma solução da forma (III.39) ($\lambda = 0$,

$k = 1$):

$$z(x) = a_0 + a_1 x$$

e então $z' = a_1$, $z'' = 0$ e, por substituição, na equação dada, teremos $-7a_1 + 12a_0 + 12a_1x = x$, que nos dá as relações $-7a_1 + 12a_0 = 0$, $12a_1 = 1$ que determinam os coeficientes: $a_0 = \frac{7}{144}$, $a_1 = \frac{1}{12}$ e, então, a solução particular da equação dada:

$$z_0 = \frac{7}{144} + \frac{x}{12}$$

Como a solução geral da equação homogênea associada é

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

(calculada de acordo com o § III.5), tem-se a solução geral da equação diferencial com 2º membro:

$$z = \frac{7}{144} + \frac{x}{12} + c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$$

2) A equação diferencial de 3ª ordem: $z''' + z'' = 3x e^x$ é da forma (III.37), com $\lambda = 1$ e $q(x) = 3x$. Ora, estamos novamente no caso estudado, pois $\lambda = 1$ não é solução da equação característica $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$. Como $k = 1$, devemos tomar uma solução da forma

$$z = (a_0 + a_1 x) e^x$$

e, então, $z' = (a_0 + a_1 + a_1 x) e^x$, $z'' = (a_0 + 2a_1 + a_1 x) e^x$ e $z''' = (a_0 + 3a_1 + a_1 x) e^x$. A substituição na equação dada leva-nos a:

$$(2a_0 + 5a_1 + 2a_1 x) e^x = 3x e^x,$$

donde as relações: $2a_0 + 5a_1 = 0$ e $2a_1 = 3$ e daqui se conclui: $a_0 = -\frac{15}{4}$, $a_1 = \frac{3}{2}$. Uma solução particular é, portanto,

$$z_0 = -\frac{15}{4} + \frac{3x}{2}$$

Sendo $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$ a solução geral da equação homogênea associada (calculada segundo o § III.5), tem-se a solução geral da equação diferencial dada:

$$z = -\frac{15}{4} + \frac{3x}{2} + c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$$

2º caso - se λ é raiz da equação característica da equação homogênea associada, com multiplicidade m , isto é, se

$$L(\lambda) = L'(\lambda) = \dots = L^{(m-1)}(\lambda) = 0$$

e

$$L^{(m)}(\lambda) \neq 0$$

a expressão entre colchetes, em (III.38), fica então:

$$(III.41) \quad \frac{1}{m!} p^{(m)}(x) L^{(m)}(x) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} p^{(n-1)}(x) L^{(n-1)}(x) + \\ + \frac{1}{n!} p^{(n)}(x) L^{(n)}(x)$$

Se p é um polinômio, a expressão (III.41) será um polinômio de mesmo grau que $p^{(m)}$, isto é, m unidades menos que o grau de p . Tentando, então, uma solução de (III.37) da forma $z = p(x) e^{\lambda x}$, devemos identificar (III.41) a Q e, portanto, tomar o polinômio p de grau $m+k$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1} x^{m-1} + a_m x^m + \dots + a_n x^n$$

Em (III.41), entretanto, só estão envolvidas derivadas de p de ordem $\geq m$, isto é, os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ não aparecem e podemos, portanto, tomá-los todos nulos. A identificação de Q e (III.41) dá $k+1$ relações que determinam os demais coeficientes. Abandonando estas notações, podemos resumir dizendo que, no caso em que λ seja raiz da equação característica com multiplicidade m , devemos procurar uma solução particular de (III.37) da forma

$$(III.42) \quad z = x^m p(x) e^{\lambda x},$$

em que p é, outra vez, um polinômio de grau k ($=$ grau de Q).

EXEMPLOS:

1) Consideremos a equação diferencial

$$z^{(4)} + z^{(3)} + z^{(2)} = x + 4,$$

que é da forma (III.37) com $\lambda = 0$ e $k = 1$. A equação característica $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2$ admite $\lambda = 0$ como raiz dupla, isto é, estamos no 2º caso em que $m = 2$. Tomemos, então, uma solução da forma (III.41) ($m = 2$, $k = 1$, $\lambda = 0$):

$$z = x^2(a_0 + a_1 x) = a_0 x^2 + a_1 x^3$$

e daí: $z' = 2a_0 + 3a_1 x$, $z^{(2)} = 2a_0 + 6a_1 x$, $z^{(3)} = 6a_1$ e $z^{(4)} = 0$.

Substituindo estes dados na equação de partida teremos:

$$6a_1 x + 2a_0 + 6a_1 = x + 4$$

donde: $6a_1 = 1$, $2a_0 + 6a_1 = 4$ e, portanto, $a_0 = \frac{3}{2}$, $a_1 = \frac{1}{6}$

A solução particular será:

$$z_0(x) = x^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{x}{6} \right) ,$$

que, somada à solução geral da equação homogênea associada:

$$y = c_1 + c_2 x + e^{-\frac{x}{2}} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) ,$$

nos dá a solução geral da equação diferencial acima:

$$z = x^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{x}{6} \right) + c_1 + c_2 x + e^{-\frac{x}{2}} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

2) Consideremos a equação diferencial linear

$$z'' + 4z' + 4z = z e^{-2x}$$

também da forma (III.37), desta feita com $\lambda = -2$.

Sendo o polinômio característico $L(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$, tem-se que $\lambda = -2$ é uma raiz dupla ($m = 2$). Apliquemos, então, a fórmula (III.42), em que p seja um polinômio de 1º grau:

$$z = x^2 (a_0 + a_1 x) e^{-2x} = (a_0 x^2 + a_1 x^3) e^{-2x} ,$$

donde

$$z' = [2a_0 x + (3a_1 - 2a_0)x^2 - 2a_1 x^3] e^{-2x}$$

$$e \quad z'' = [2a_0 + (6a_1 - 8a_0)x + (-12a_1 + 4a_0)x^2 + 4a_1 x^3] e^{-2x}$$

que substituídos na equação nos levam à relação:

$$(6a_1 x + 2a_0) e^{-2x} = x e^{-2x} .$$

Logo, os coeficientes de p devem ser; $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{6}$.

A solução particular é, então: $z_0 = \frac{x^3}{6} e^{-2x}$.
A solução geral será (somando a z_0 a solução geral de $y'' + 4y' + 4y = 0$):

$$z = e^{-2x} \left(\frac{x^3}{6} + c_1 + c_2 x \right) .$$

Observação: Comparando os dois casos acima estudados e as expressões (III.39) e (III.42) que, em cada um dos casos, apresenta uma solução particular da expressão diferencial (III.37), vemos que eles podem ser considerados como um só. Temos assim que a equação diferencial (III.37):

$$L[z] = e^{\lambda x} Q(x)$$

(com coeficientes constantes) admite sempre uma solução particular da forma

$$(III.43) \quad z = x^m p(x) e^{\lambda x}$$

em que p é um polinômio de mesmo grau que o polinômio Q e m deve ser tomado como 0 quando λ não for raiz da equação característica (1º caso) e quando λ for raiz de $L(\lambda)$, m é a multiplicidade de λ .

III.9 - Veremos um outro caso de equação diferencial linear, com coeficientes constantes, não homogênea e cuja resolução pode ser reduzida ao caso anterior. É o caso da equação diferencial

$$(III.44) \quad L[z] = e^{ax} [Q(x) \cos bx + R(x) \sin bx],$$

onde em $L[z]$ os coeficientes $A_0, A_1, \dots, A_n$ são constantes. Usando as fórmulas

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, \quad \sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}$$

a equação (III.44) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$(III.45) \quad L[z] = e^{(a+ib)x} S(x) + e^{(a-ib)x} T(x),$$

onde S e T são os polinômios:

$$(III.46) \quad S(x) = \frac{Q(x)}{2} - i \frac{R(x)}{2}, \quad T(x) = \frac{Q(x)}{2} + i \frac{R(x)}{2}$$

A resolução da equação (III.45) pode ser desdobrada na resolução de duas equações do tipo (III.37), cada uma das quais admitindo uma solução particular do tipo (III.43), onde para k podemos tomar o maior dos graus dos polinômios Q e R .

OBSERVAÇÃO SOBRE O CASO REAL: os processos vistos nos parágrafos III.7 e III.8 para determinação de uma solução particular são tais que, sempre que a equação dada for real (coeficientes e 2º membro com valores reais), então a solução particular obtida é também real. No processo descrito neste parágrafo a solução particular obtida pode ser complexa, ainda que a equação dada seja real. Vamos mostrar que quando a equação (III.44) é real podemos achar uma solução particular real e vamos obter uma expressão para esta solução real. Suponhamos, pois, que em (III.45), os coeficientes $A_0, \dots, A_n$ sejam reais, assim como os números a, b e os polinômios Q e R , estes de grau $\leq k$.

Pondo $\lambda = a + ib$, a equação (III.45) pode ser escrita como:

$$(III.47) \quad L[z] = e^{\lambda x} S(x) + e^{\bar{\lambda}x} \overline{S(x)},$$

cujas soluções z pode ser obtida como a soma $z_1 + z_2$ de duas soluções das seguintes equações:

$$(III.48) \quad L[z_1] = e^{\lambda x} S(x)$$

$$(III.49) \quad L[z_2] = e^{\bar{\lambda}x} \overline{S(x)}$$

A equação (III.48) admite uma solução particular como em (III.43):

$$(III.50) \quad \begin{aligned} z_1 &= x^m s(x) e^{\lambda x} = x^m [u(x) + iv(x)] e^{\lambda x} = \\ &= x^m e^{ax} [(u(x) \cos bx - v(x) \sin bx) + \\ &\quad + i(u(x) \sin bx + v(x) \cos bx)] \end{aligned}$$

em que o grau de s é, no máximo, k e portanto, o grau de u e de v é também $\leq k$.

Ora, sendo os coeficientes de $L[z]$ reais, tem-se:

$$L[\overline{z_1}] = \overline{L[z_1]} = \overline{e^{\lambda x} S(x)} = e^{\bar{\lambda}x} \overline{S(x)}$$

isto é, se z_1 é solução de (III.48) então $\overline{z_1}$ será solução de (III.49) e $z = z_1 + \overline{z_1}$ (= dôbro da parte real de z_1) será solução de (III.47) e, portanto, da equação diferencial dada (III.44). De (III.50), vemos que $z = z_1 + \overline{z_1}$ é da forma:

$$(III.51) \quad z_0(x) = x^m e^{ax} [p(x) \cos bx + r(x) \sin bx],$$

em que p e q são polinômios de grau $\leq k$ (k = máximos dos graus de Q e R), e m deve ser tomado como 0 quando $\lambda = a + ib$ não fôr - raiz do polinômio característico $L(\lambda)$, e, quando, $\lambda = a + ib$ fôr raiz de $L(\lambda)$, m é a multiplicidade desta raiz.

EXEMPLOS:

- 1) Determinar a solução geral da equação diferencial

$$z' + z = x \cos x$$

Esta é uma equação (real) do tipo (III.44), em que $a = 0$, $b = 1$, $k = 1$. O polinômio característico $\lambda + 1$ não admite $\lambda = i$ como raiz, de modo que devemos procurar uma solução do tipo (III.51) com $m = 0$:

$$z = (a_0 + a_1 x) \cos x + (b_0 + b_1 x) \sin x$$

Donde $z' = (a_1 + b_0 + b_1 x) \cos x + (b_1 - a_0 - a_1 x) \sin x$. Substituindo estes dados na equação tem-se:

$$[a_0 + a_1 + b_0 + (a_1 + b_1)x] \cos x + [b_0 + b_1 - a_0 + (b_1 - a_1)x] \sin x = x \cos x$$

Identificando os polinômios coeficientes de $\cos x$ e $\sin x$ e os coeficientes destes polinômios têm-se, finalmente:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + b_0 &= 0 \\ b_0 + b_1 - a_0 &= 0 \\ b_1 - a_1 &= 0 \\ a_1 + b_1 &= 1 \end{aligned}$$

Daqui tiramos: $a_0 = 0$, $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$ e $b_0 = -\frac{1}{2}$, donde a solução particular

$$z_0(x) = \frac{x}{2} \cos x + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \sin x$$

e a solução geral, obtida da soma de z_0 com a solução geral de $y' + y = 0$:

$$z(x) = \frac{x}{2} \cos x + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \sin x + c e^{-x}$$

Observe-se que esta equação, sendo de 1ª ordem, poderia ser resolvida por um dos processos vistos em I.8.1. Lá, no entanto, seria preciso calcular uma integral não imediata, enquanto aqui a resolução, conquanto trabalhosa, depende só de processos algébricos.

2) Determinar a solução geral da equação diferencial:

$$z'' + z = x e^{-x} \sin x$$

Esta é uma equação (real) do tipo (III.44), em que $a = -1$, $b = 1$, $k = 1$. O polinômio característico $\lambda^2 + 1$, não admite $\lambda = a + ib = -1 + i$ como raiz ($m = 0$). Devemos, portanto, procurar uma solução da forma:

$$z = [(a_0 + a_1 x) \cos x + (b_0 + b_1 x) \sin x] e^{-2x}$$

3) Determinar a solução geral de $z'' + 4z = x \cos 2x$. Aqui temos: $a = 0$, $b = 2$ e $k = 1$. O polinômio característico $L(\lambda) = \lambda^2 + 4$ tem $\lambda = 2i$ como raiz simples. Então $m = 1$ e devemos procurar uma solução da seguinte forma:

$$z = x [(a_0 + a_1 x) \cos 2x + (b_0 + b_1 x) \sin 2x]$$

III.10 - EXERCÍCIOS

Dar a solução geral real de cada uma das equações diferenciais seguintes:

1. $z'' - 9z = e^x$
2. $z'' + 4z = e^{2x}$
3. $z'' + 2z' + z = 5$
4. $z'' + 2z' + z = e^{-x} + e^{+x} + 5$
5. $z''' + z' + z = e^{3x}$
6. $z'' + 2z' + z = x + e^{4x} + x^2 e^{-x}$
7. $z^{(4)} - z^{(3)} + z' - z = e^x + 3x - 2$
8. $z'' + z = \sin x$
9. $z'' + 2z' + z = \cos x$
10. $z''' + z' + z = \cos 2x + 3$
11. $z'' + 4z = 5 \sin 3x + \cos 3x$
12. $z'' + z = e^{-x} \sin x$
13. $z'' + z = x e^x \cos x$
14. $z' = e^{az} \sin bx$ (nos exercícios 15 e 14, a e b
15. $z' = x^2 e^{ax} \cos bx$ são constantes reais)

III.11 - EQUAÇÃO DE EULER - passamos a estudar a equação de Euler, que é a equação diferencial linear homogênea, de ordem n , $L[y] = 0$, em que o operador L tem a seguinte forma:

$$(III.51) \quad L[y] = A_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y, \quad ,$$

em que $A_0 \neq 0$, $A_1, \dots, A_n$ são constantes.

Esta equação deve ser considerada, como equação de ordem n , numa das duas semi-retas: $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, pois aí o coeficiente de $y^{(n)}$: $A_0 x^n$ não se anula.

A equação de Euler, que não é de coeficientes constantes, pode ser transformada numa equação com coeficientes constantes, por uma mudança da variável independente, conforme será demonstrado a seguir.

PROPOSIÇÃO III.10 - Na semi-reta $]0, +\infty[$, a transformação:

$$(III.52) \quad x = e^s, \quad s = \log x$$

reduz a equação de Euler a uma equação com coeficientes constantes.

OBSERVAÇÃO: Na semi-reta $]-\infty, 0[$ deveríamos considerar a se

guinte mudança de variáveis:

$$(III.52') \quad x = -e^s, \quad s = \log(-x)$$

Demonstração: Com efeito, calculemos as derivadas de y em relação à variável s :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dx} x & \therefore x \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{ds} ; \\ \frac{d^2y}{ds^2} &= \frac{d^2y}{dx^2} x^2 + \frac{dy}{dx} x & \therefore x^2 \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} ; \end{aligned}$$

do mesmo modo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^3y}{ds^3} &= \frac{d^3y}{dx^3} x^3 + \frac{d^2y}{dx^2} 3x^2 + \frac{dy}{dx} x & \therefore \\ x^3 \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d^3y}{ds^3} - 3 \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \end{aligned}$$

e assim por diante, teremos, em geral:

$$(III.53) \quad x^k \frac{d^k y}{dx^k} = \frac{d^k y}{ds^k} + c_1 \frac{d^{k-1} y}{ds^{k-1}} + \dots + c_{k-1} \frac{dy}{ds}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

onde os números $c_1, \dots, c_{k-1}$ são inteiros.

Efetuada em (III.51) esta substituição, teremos uma equação da forma

$$(III.54) \quad B_0 \frac{d^n y}{dx^n} + B_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + B_{n-1} \frac{dy}{ds} + B_n y = 0,$$

em que $B_0 = A_0 \neq 0$, $B_1, \dots, B_{n-1}$ são constantes, o que prova a proposição.

A equação (III.54), sendo de coeficientes constantes, admite um sistema fundamental de soluções, cuja forma nós já estudamos no § III.5. Assim é que, utilizando a proposição III.10, poderemos também deduzir a forma da solução geral da equação de Euler. De fato, se λ é uma raiz da equação característica de (III.54) com multiplicidade m ,

$$(III.55) \quad B_0 \lambda^n + B_1 \lambda^{n-1} + \dots + B_{n-1} \lambda + B_n = 0,$$

temos as soluções (linearmente independentes) da equação diferencial linear homogênea com coeficientes constantes (III.54):

$$(III.56) \quad p_{m-1}(s) e^{\lambda s}, \quad p_{m-1}(s) = \text{polinômio de grau } m-1 \text{ ou}$$

$$(III.56') \quad e^{\lambda s}, \quad s e^{\lambda s}, \dots, s^{m-1} e^{\lambda s}$$

Fazendo a substituição (III.52) teremos, correspondendo à raiz λ (da equação característica de (III.54), as soluções da equação de Euler:

$$(III.57) \quad p_{m-1}(\log x) x^\lambda \quad \text{ou}$$

$$(III.57') \quad x^\lambda, \log x, x^\lambda, \dots, (\log x)^{m-1} x^\lambda$$

No caso em que a equação dada fôr real - isto é, no caso em que os coeficientes $A_0, A_1, \dots, A_n$ de (III.51) forem reais - a equação (III.54) também o será - pois cada B_j é combinação dos A_i com coeficientes inteiros - será, então, possível tomar somente as soluções reais e é nisto que estamos interessados. Assim é que se a raiz λ de (III.55), com multiplicidade m , fôr complexa $\lambda = a + bi$, teremos as soluções de (III.54):

$$\begin{aligned} &e^{as} \cos bs, \quad e^{as} \sen bs, \quad s e^{as} \cos bs, \quad s e^{as} \sen bs, \dots, \\ &s^{m-1} e^{as} \cos bs, \quad s^{m-1} e^{as} \sen bs, \quad \text{ou} \\ &e^{as} [p_{m-1}(s) \cos bs + q_{m-1}(s) \sen bs], \end{aligned}$$

p_{m-1} e q_{m-1} polinômios de grau $m-1$. Novamente, com a transformação (III.52), teremos, a partir destas, as soluções reais de Equação de Euler (real):

$$(III.58) \quad x^a [p_{m-1}(\log x) \cos(b \log x) + q_{m-1}(\log x) \sen(b \log x)]$$

ou

$$(III.58') \quad x^a \cos(b \log x), \quad x^a \sen(b \log x), \quad x^a \log x \cos(b \log x), \\ x^a \log x \sen(b \log x), \dots, \quad x^a (\log x)^{m-1} \cos(b \log x), \\ x^a (\log x)^{m-1} \sen(b \log x).$$

A proposição III.10 fornece-nos um modo de resolver a Equação de Euler. Na prática, entretanto, não é preciso efetuar a transformação (III.52), basta observar em (III.57') que a equação de Euler admite soluções da forma x^λ em que λ é raiz de uma certa equação algébrica. Para achar esta equação algébrica, substituímos, $y = x$, diretamente na equação de Euler e obtemos:

$$(III.59) \quad A_0 \lambda (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1) + \dots + A_{n-1} \lambda + A_n = 0$$

EXEMPLOS:

1) Consideremos a equação diferencial

$$x^2 y'' - xy' + y = 0,$$

que é uma equação de Euler de 2ª ordem. Relativamente a esta, a equação (III.59) é a seguinte:

$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 ,$$

cujas raízes são $\lambda = 1$ com multiplicidade $m = 2$. A solução geral da equação dada é, portanto:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x \log x = x(c_1 + c_2 \log x)$$

2) Também a equação diferencial $x^2 y'' + 3xy' + 2y = 0$ é uma equação de Euler de 2ª ordem. A equação (III.59), é, neste caso, a seguinte:

$$\lambda(\lambda - 1) + 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 , \quad \text{cujas}$$

raízes são $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -1 - i$, ambas simples ($m_1 = m_2 = 1$). Temos, então, a solução geral:

$$y(x) = \frac{1}{x} [c_1 \cos \log x + c_2 \operatorname{sen} \log x]$$

III.12 - O exemplo anterior, da equação de Euler que, por meio de uma mudança de variáveis, reduz-se a uma equação com coeficientes constantes, sugere que se proceda dêste modo também com outras equações de coeficientes não constantes. A êsse respeito, tem-se o resultado seguinte:

PROPOSIÇÃO III.11 - Se existir uma transformação de variáveis

$$(III.60) \quad s = g(x) ,$$

que reduza a equação diferencial linear homogênea (coeficientes não constantes)

$$(III.61) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + A_n(x) y = 0 ,$$

é equação com coeficientes constantes:

$$(III.62) \quad \frac{d^n y}{ds^n} + B_1 \frac{d^{n-1} y}{ds^{n-1}} + \dots + B_{n-1} \frac{dy}{ds} + B_n y = 0 ,$$

esta transformação terá, necessariamente, a forma

$$(III.63) \quad s = c \int \sqrt[n]{A_n(x)} dx .$$

Demonstração: De fato, suponhamos que a equação (III.61) se reduza à equação de coeficientes constantes (III.62), por meio da transformação $s = g(x)$, e seja $x = f(s)$ a transformação inversa desta, isto é:

$$f[g(x)] \equiv x \quad \text{e} \quad g[f(s)] \equiv s$$

São, portanto, válidas as seguintes relações:

$$(III.64) \quad ds = g'(x) dx \quad e \quad f' = \frac{1}{g'}$$

Calculando, sucessivamente, as derivadas de y em relação a s têm-se:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dx} \frac{1}{g'} \quad ;$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2y}{dx^2} f'^2 + \frac{dy}{dx} f'' = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{1}{g'^2} + \dots \quad ;$$

do mesmo modo:

$$\frac{d^3y}{ds^3} = \frac{d^3y}{dx^3} \frac{1}{g'^3} + \dots \quad ,$$

e assim por diante, até:

$$\frac{d^ny}{ds^n} = \frac{d^ny}{dx^n} \frac{1}{g'^n} + \dots \quad ,$$

os termos não escritos envolvem somente derivadas de y em relação a x de ordem sempre menor que o primeiro.

Substituindo estas derivadas na equação (III.62), temos:

$$\frac{1}{g'^n} \frac{d^ny}{dx^n} + \dots + B_n y = 0 \quad ,$$

os termos não escritos envolvem as derivadas $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \dots, \frac{dy}{dx}$ somente.

Esta equação escreve-se também como:

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \dots + B_n g'^n y = 0$$

e esta deve ser a equação (III.61), donde se tira:

$$A_n(x) = B_n g'^n \quad , \quad \text{ou, pondo} \quad c = \sqrt[n]{\frac{1}{B_n}} \quad (\text{constante}):$$

$$g' = c \sqrt[n]{A_n(x)} \quad e \text{ como} \quad ds = g'(x) dx \quad (\text{v. (III.64)}) \quad ,$$

tem-se finalmente, $ds = c \sqrt[n]{A_n(x)} dx$ e :

$$s = c \int \sqrt[n]{A_n(x)} dx \quad , \quad \text{o que prova a proposição.}$$

OBSERVAÇÃO: Note-se que a proposição III.11 dá uma condição necessária para que uma mudança de variáveis transforme a equação (III.61) numa equação a coeficientes constantes, esta não é uma condição suficiente!

EXEMPLOS:

1) Equação de Euler - o que se fez no § III.11 para a equação de Euler foi aplicar a transformação (III.63). De fato, na forma (III.61), a equação de Euler escreve-se como:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{A_1}{A_0} \frac{1}{x} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{A_0} \frac{1}{x^n} y = 0$$

e (III.63) fica:

$$s = c \int \sqrt[n]{\frac{A_n}{A_0} \frac{1}{x^n}} dx = c_1 \int \frac{dx}{x} = c_1 \log x$$

2) Consideremos a equação diferencial

$$y'' - \frac{1}{x} y' + 4x^2 y = 0$$

Se existir uma transformação que a reduza a coeficientes constantes será da seguinte forma:

$$s = c \int \sqrt{4x^2} dx = c \int 2x dx = c x^2$$

Tomemos $c = 1$ e façamos a mudança de variáveis: $s = x^2$

Temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} 2x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{ds^2} 4x^2 + 2 \frac{dy}{ds}$$

que, substituídas na equação dada, nos dão:

$$\frac{d^2 y}{ds^2} 4s + 4sy = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 y}{ds^2} + y = 0,$$

que é de coeficientes constantes e cuja solução geral é:

$$y(s) = c_1 \cos s + c_2 \sin s,$$

donde, na variável x :

$$y(x) = c_1 \cos x^2 + c_2 \sin x^2$$

III.13 - Consideremos a equação linear de 2ª ordem

$$y'' + A_1(x) y' + A_2(x) y = 0,$$

e vejamos que a mudança de variáveis (dependentes):

$$(III.65) \quad y = uv, \text{ em que } v(x) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int A_1(x) dx \right],$$

reduz a equação dada numa equação da forma:

$$(III.66) \quad u'' + B(x) u = 0$$

(em que não mais aparece a derivada primeira).

De fato, de $y = uv$ têm-se: $y' = u'v + uv'$ e
 $y'' = u''v + 2u'v' + uv''$, e a equação dada toma a forma:

$$u''v + u'[2v' + A_1v] + u[v'' + A_1v' + A_2v] = 0,$$

e em (III.65), a função v foi tomada como solução de $2v' + A_1v = 0$, de modo a anular o coeficiente de u' e tal que $v \neq 0$ podemos, então, escrever a equação acima do seguinte modo:

$$u'' + \frac{v'' + A_1v' + A_2v}{v} u = 0,$$

e esta é da forma (III.66).

Esta transformação, em geral, de nada adianta para a resolução da equação pois, nem sempre se conhece um sistema fundamental de soluções de (III.66). Contudo, na impossibilidade (ou dificuldade) de determinar as soluções de uma equação diferencial, procuramos conhecer-lhes propriedades qualitativas. Para êste estudo qualitativo das soluções, a equação sob a forma (III.66) pode ser mais conveniente.

Isto se generaliza para ordem n , na seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO III.12 - Dada a equação linear homogênea, de ordem n (III.61):

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + A_n(x) y = 0,$$

a transformação:

$$(III.67) \quad y = uv, \quad \text{com} \quad v = \exp \left[-\frac{1}{n} \int A_1(x) dx \right]$$

reduz a equação dada a uma equação da forma:

$$u^{(n)} + B_2(x)u^{(n-2)} + B_3(x)u^{(n-3)} + \dots + B_n(x)u = 0,$$

em que não aparece a derivada $u^{(n-1)}$.

A demonstração fica a cargo do leitor.

EXEMPLO:

Consideremos a equação diferencial

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0 \quad (x \neq 0)$$

Se fizermos $y = uv$, com

$$v(x) = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{2}{x} dx} = \frac{1}{x}$$

a equação ficará reduzida à seguinte:

$$\frac{u''}{x} + u \left[\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right] = 0$$

ou $u'' + u = 0$. Por coincidência (não é fato feral!), esta é uma equação com coeficientes constantes e sua solução geral é:

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Logo, a solução geral da equação dada é:

$$y(x) = c_1 \frac{\cos x}{x} + c_2 \frac{\sin x}{x}$$

III.14 - EXERCÍCIOS

1. Achar a solução geral, real das seguintes equações de Euler:

a. $x^2 y'' - xy' + 5y = 0$

b. $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$

c. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

d. $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$

2. Achar a solução geral real da equação diferencial

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \left(2 + \frac{2}{x^2}\right) y = 0 \quad \text{(sugestão: usar (III.67))}$$

* * * * *