INFORMAÇÕES SOBRE O $\bar{x}$ DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Thomas Logan Ritchie

Orientadores: *Ana Catarina Pantone Hellmeister*

Cláudio Possani

Seja $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, derivável em $[a,b]$. Pelo teorema do valor médio (TVM), temos que para qualquer intervalo $[c,d]$ contido em $[a,b]$, existe $\bar{x}$ em (c,d), tal que $f'(\bar{x}) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$.

Suponhamos ainda que exista $f''(a)$ e que $f''(a) \neq 0$.

Decorre da fórmula de Taylor (aplicada ao ponto a) que:

$$\lim_{x \to a_+} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)}{x-a} = \frac{f''(a)}{2}. \tag{1}$$

Por outro lado (aplicando o TVM ao intervalo $[a,x]$), segue que:

$$\lim_{x \to a_+} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)}{x-a} = \lim_{x \to a_+} \frac{f'(\bar{x}) - f'(a)}{x-a},$$

onde $\bar{x} \in (a,x)$. Mas por (1) temos que:

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f'(\bar{x}) - f'(a)}{x-a} = \lim_{x \to a_+} \frac{f'(\bar{x}) - f'(a)}{\bar{x}-a} \cdot \frac{\bar{x}-a}{x-a} = \frac{f''(a)}{2}.$$

Como $\displaystyle\lim_{x \to a_+} \frac{f'(\bar{x}) - f'(a)}{\bar{x}-a} = \lim_{\bar{x} \to a_+} \frac{f'(\bar{x}) - f'(a)}{\bar{x}-a} = f''(a) \neq a,$

segue que $\displaystyle\left(\lim_{\bar{x} \to a_+} \frac{\bar{x}-a}{x-a}\right) \cdot f''(a) = \frac{1}{2} f''(a)$ e, portanto, $\displaystyle\lim_{x \to a_+} \frac{\bar{x}-a}{x-a} = \frac{1}{2}$. c.q.d.

Suponhamos agora $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ de classe C^2, com $f''(a) \neq 0$. De $f(\bar{x}) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, segue que $\bar{x}(x) = f'^{(-1)}\left[\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$. A função $\bar{x}$ estará bem definida numa vizinhança de a na qual f' seja inversível, o que sempre é possível nas hipóteses consideradas ($f''(a) \neq 0$ nos assegura que f' seja injetora numa vizinhança conveniente de a).

Calculemos o quociente

$$\frac{\overline{x}(x) - a}{x - a} = \frac{f'^{(-1)}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] - a}{x - a}. \tag{2}$$

Como a função $\overline{x}(y) = f'^{(-1)}\left[\frac{f(y) - f(a)}{y - a}\right]$ é contínua em $[a, x]$ (definimos $\overline{x}(a) = a$) e derivável em (a, x), podemos aplicar o TVM ao quociente (2) para obter:

$$\frac{\overline{x}(x) - \overline{x}(a)}{x - a} = \overline{x}'(\overline{y}), \quad \text{onde } \overline{y} \in (a, x).$$

Mas $\overline{x}'(\overline{y}) = \dfrac{1}{f''\left[f'^{(-1)}\left[\frac{f(\overline{y})-f(a)}{\overline{y}-a}\right]\right]} \cdot \dfrac{f'(\overline{y}).(\overline{y} - a) - [f(\overline{y}) - fa)]}{(\overline{y} - a)^2}$,

ou seja,
$$\overline{x}'(\overline{y}) = \frac{1}{f''\left[f^{(-1)}\left[\frac{f(\overline{y})-f(a)}{\overline{y}-a}\right]\right]} \cdot \frac{f'(\overline{y}) - \frac{f(\overline{y})-f(a)}{\overline{y}-a}}{\overline{y} - a} \tag{3}$$

Passemos agora ao limite:

$$\lim_{x \to a_+} \frac{\overline{x}(x) - a}{x - a} = \lim_{x \to a_+} \overline{x}'(\overline{y}), \quad \text{onde } \overline{y} \in (a, x)$$

$$\lim_{x \to a_+} \overline{x}'(\overline{y}) = \lim_{\overline{y} \to a_+} \overline{x}'(\overline{y}).$$

Utilizando a identidade (3), temos que:

$$\lim_{\overline{y} \to a_+} \overline{x}'(\overline{y}) = \lim_{\overline{y} \to a_+} \left\{ \frac{1}{f''\left[f'^{(1)}\left[\frac{f(\overline{y})-f(a)}{\overline{y}-a}\right]\right]} \cdot \frac{f'(\overline{y}) - \frac{f(\overline{y})-f(a)}{\overline{y}-a}}{\overline{y} - a} \right\} =$$

$$\lim_{\overline{y} \to a_+} \frac{1}{f''\left[f'^{(-1)}\left[\frac{f(\overline{y})-f(a)}{\overline{y}-a}\right]\right]} \cdot \lim_{\overline{y} \to a_+} \left\{ \frac{f'(\overline{y}) - f'(a)}{\overline{y} - a} + \frac{f'(a) - \frac{f(\overline{y})-f(a)}{\overline{y}-a}}{\overline{y} - 1} \right\} =$$

$$\frac{1}{f''(a)} \cdot \left\{ f''(a) - \frac{f''(a)}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$

Concluímos, portanto, que

$$\overline{x}'(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{\overline{x}(x) - a}{x - a} = \lim_{y \to a_+} \overline{x}'(y) = \frac{1}{2}. \qquad \text{c.q.d.}$$

Este resultado nos mostra que o ponto $\overline{x}$ do TVM tende a dividir o intervalo (a, x) em duas partes iguais, à medida em que x tende a "a".

A segunda versão da demonstração deste resultado é menos geral que a primeira, pois exige a continuidade de f'', o que nos permite definir e manipular a função $\overline{x}(x)$, dando à demonstração um caráter mais formal e rigoroso. Tal fato, entretanto, não invalida a 1a. versão, onde o resultado permanece válido mesmo sem ser possível definir a função $\overline{x}(x)$ devido a sua eventual multivalência.