

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia de Telecomunicações
e Controle

ISSN 1517-3550

BT/PTC/0006

**Uma Técnica de Imposição de
Zeros para Auxílio em Projeto de
Sistemas de Controle**

Paulo Sérgio Pierri
Roberto Moura Sales

O presente trabalho é um resumo da tese de doutorado apresentada por Paulo Sérgio Pierri, sob orientação do Prof. Dr. Roberto Moura Sales.: "Uma Técnica de Imposição de Zeros para Auxílio em Projeto de Sistemas de Controle", defendida em dezembro de 1999, na Escola Politécnica.

A íntegra da tese encontra-se à disposição com o autor e na Biblioteca de Engenharia de Eletricidade da Escola Politécnica/USP.

FICHA CATALOGRÁFICA

Pierri, Paulo Sérgio

Uma técnica de imposição de zeros para auxílio em projeto de sistemas de controle / P.S. Pierri, R.M. Sales. — São Paulo : EPUSP, 2000.

12 p. — (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, BT/PTC/0006)

1. Imposição de zeros I. Sales, Roberto Moura II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle III. Título IV. Série

ISSN 1517-3550

CDD 621.3981

UMA TÉCNICA DE IMPOSIÇÃO DE ZEROS PARA AUXÍLIO EM PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE

A ZERO PLACEMENT TECHNIQUE TO AID CONTROL SYSTEM DESIGN

Paulo Sérgio Pierri & Roberto Moura Sales

Resumo: O presente trabalho visa o estudo de sistemas SISO com controladores que estabilizam internamente uma planta dada, derivados da parametrização de Youla desenvolvida a partir de conceitos da teoria de variáveis de estado. Dentre estes controladores, existe um sub-conjunto particular cuja principal característica é fazer com que os pólos de todas as funções de transferência de malha fechada sejam iguais. Assim sendo, os infinitos controladores deste sub-conjunto afetarão apenas os zeros do sistema em malha fechada. Utilizando este fato, são desenvolvidas ferramentas que possibilitam escolher de forma sistemática um conjunto destes zeros, uma vez determinados os pólos de malha fechada através de um controlador previamente projetado. Desta forma, procura-se obter um melhor desempenho do sistema ou alguma característica desejada para o controlador.

Abstract: In this work SISO controllers, which internally stabilize a given plant, derived from Youla parametrization using state space variables approach, are studied. Among these controllers there is a sub-set for which the main feature is to provide equal system closed loop poles. Therefore, the controllers included in this sub-set will only change the system closed loop zeros. Tools are developed in order to allow controller designers to choose in a systematic way the closed loop zeros considering a system for which the closed loop poles were established by a previously proposed controller design. In this way, an improved system performance or some desired controller characteristics may be attained.

1 - Introdução

Em quase todos os métodos de síntese de controladores, sob determinadas condições, o projetista de controle possui recursos que permitem que os pólos de malha fechada sejam posicionados, teoricamente, em qualquer lugar do semi-plano complexo esquerdo. Os zeros de malha fechada são, em geral, decorrentes desta imposição de pólos e muitas vezes podem não satisfazer às especificações de transitórios do sistema em malha fechada, criar cancelamentos de pólos com zeros que podem vir a comprometer a robustez (HANG [8], CLARK [10], SCHMIDT & BENSON [12]) ou gerar controladores de difícil implementação. Os textos clássicos de controle como OGATA [1], D'AZZO & HOUPIS [3] e SHINNERS [4] entre outros, dedicam poucas páginas à questão dos zeros de malha fechada, mesmo quando abordam métodos como o do lugar das raízes.

Uma das poucas propostas de imposição de zeros é encontrada em SCHMIDT & BENSON [12], onde é usada uma variação da síntese LQG/LTR. De uma forma indireta, pela escolha dos zeros do controle, TU & LIN [11] selecionam os zeros de malha fechada visando minimizar o esforço de controle no problema de *tracking* (seguidor de referência). Já MOORE & BHATTACHARYYA [9], aplicam uma técnica de otimização via programação linear visando minimizar o *overshoot* pela escolha do posicionamento ideal dos zeros de malha fechada.

Desta forma, o desenvolvimento de uma ferramenta que permita visualizar todos os zeros de malha fechada possíveis para todos os controladores admissíveis (mantendo

fixos os pólos de malha fechada, previamente selecionados), proporcionará ao projetista melhores condições de obter um sistema com as características desejadas ou especificadas, em muito menor tempo e de uma forma mais direta e sistemática.

2 - Zeros de malha fechada

Definição 1: Sistema generalizado.

Seja $\mathbf{R}_p^{q \times m}(s)$ o conjunto de todas as possíveis matrizes de transferência de sistemas lineares, causais e invariantes no tempo. Uma decomposição do vetor de entrada, $\mathbf{u}(s)$, e do vetor de saída, $\mathbf{y}(s)$, de um sistema $\mathbf{G}(s) \in \mathbf{R}_p^{q \times m}(s)$ sempre pode ser feita, de modo que se possa escrever $\mathbf{G}(s)$ na forma de um sistema generalizado, ou seja

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}(s) & \mathbf{G}_{12}(s) \\ \mathbf{G}_{21}(s) & \mathbf{G}_{22}(s) \end{bmatrix}, \text{ com } \mathbf{G}_{i,j}(s) \in \mathbf{R}_p^{q_i \times m_j}, \quad i, j = 1, 2. \quad (1)$$

Definição 2: Sistema generalizado na forma de estado.

Seja $\mathbf{G}(s) \in \mathbf{R}_p^{q \times m}(s)$. Denota-se uma realização de $\mathbf{G}(s)$ pela quádrupla de matrizes na forma tabular

$$\mathbf{G}_s = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(n+q) \times (n+m)},$$

e $\mathbf{G}(s) \Leftrightarrow \mathbf{G}_s$ se $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$. Para o sistema generalizado (1), supondo as realizações $\mathbf{G}_{i,j}(s)$ dadas por

$$(\mathbf{G}_{i,j})_s = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_j \\ \hline \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_{i,j} \end{array} \right], \text{ tem-se a seguinte notação para a realização de } \mathbf{G}(s):$$

$$\mathbf{G}_s = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right], \quad (2)$$

Definição 3: Conexão em *feedback* para sistemas na forma de espaço de estados $\bar{\mathbf{F}}(*,*)$. Supondo $\det(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{22}\mathbf{D}_K) \neq 0$, a FTMF (função de transferência de malha fechada) entre a saída $\mathbf{y}_1(s)$ e a entrada $\mathbf{u}_1(s)$, conforme o diagrama da fig. 1, é dada por (as dimensões de todas as matrizes devem ser compatíveis):

$$\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{G}_s, \mathbf{K}_s) = \left[\begin{array}{c|c} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \hline \bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{D}} \end{array} \right], \text{ onde}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_K (I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & B_2 C_K + B_2 D_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{22} C_K \\ B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & A_K + B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{22} C_K \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \\ B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} D_K (I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 \\ D_{12} C_K + D_{12} D_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{22} C_K \end{bmatrix}^T \text{ e}$$

$$\bar{D} = D_{11} + D_{12} D_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21}.$$

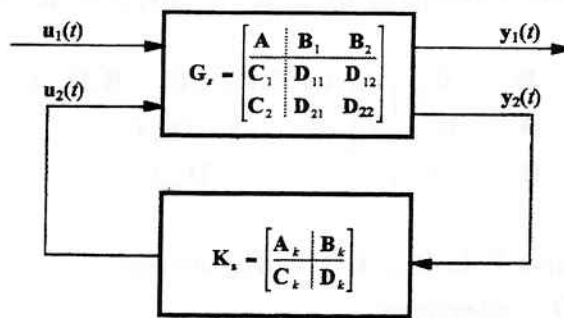


Fig. 1 - Conexão em feedback para sistemas na forma de espaço de estados.

Definição 4: Realização internamente estável.

A realização (não necessariamente mínima) $G_s = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ é dita uma realização internamente estável se a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é estável, ou seja, os autovalores de A têm parte real negativa.

Definição 5: Controlador admissível.

O controlador K_s é dito admissível ($K_s \in \mathcal{A}(G_s)$), se estabilizar internamente a planta G_s conforme o diagrama da fig. 1, ou seja, se a matriz $\bar{A}$ obtida da conexão $\bar{F}(G_s, K_s)$ for estável.

Seja agora o seguinte sistema em malha fechada dado pelo diagrama da fig. 2:

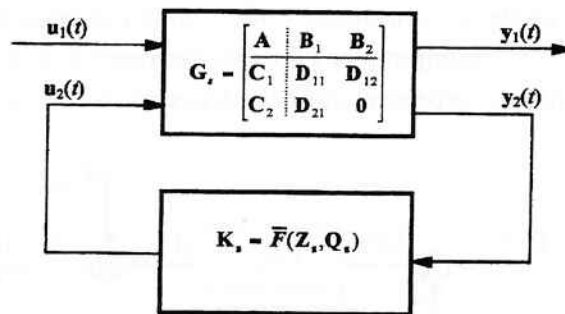


Fig. 2 - Sistema generalizado em malha fechada.

Na planta $G(s)$, a restrição $D_{22}=0$ pode ser assumida sem perda de generalidade [6], sendo que esta simplificação garante que o sistema é bem definido para qualquer controlador próprio $K(s)$. Além disto é suposto que $Q_s = \begin{bmatrix} A_\varrho & B_\varrho \\ C_\varrho & D_\varrho \end{bmatrix}$ é uma realização internamente estável e (A, B_2, C_2) é estabilizável e detectável.

Para este sistema, são demonstrados os seguintes resultados (ISHIHARA & SALES [6] e ISHIHARA [7]):

R1: Controladores admissíveis para planta G_s .

Considerando o sistema da fig. 2, $K_s \in \mathcal{A}(G_s) \Leftrightarrow K_s = \bar{F}(Z_s, Q_s)$, tendo

$$Z_s = \begin{bmatrix} A_z & B_{1z} & B_{2z} \\ C_{1z} & D_{11z} & D_{12z} \\ C_{2z} & D_{21z} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 F + L C_2 - B_2 D_{11z} C_2 & B_2 D_{11z} - L & B_2 D_{12z} \\ F - D_{11z} C_2 & D_{11z} & D_{12z} \\ -D_{21z} C_2 & D_{21z} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

para quaisquer F, L, D_{11z}, D_{12z} e D_{21z} tais que:

- i) D_{11z} e D_{21z} inversíveis;
- ii) $A + B_2 F$ estável e
- iii) $A + L C_2$ estável.

Observação: Z_s é comumente denominado na literatura como “controlador central”. Assim pode-se dizer que a família de controladores admissíveis definida por $K_s = \bar{F}(Z_s, Q_s)$ é “centrada” no controlador Z_s e parametrizada em Q_s .

R2: Os autovalores do sistema em malha fechada.

O conjunto dos autovalores de $\bar{A}$ (resultante da conexão $\bar{F}(G_s, K_s)$) é dado por:

$$\lambda(\bar{A}) = \lambda(A + B_2 F) \cup \lambda(A + L C_2) \cup \lambda(A_\varrho). \quad (4)$$

Observação: $\lambda(\bar{A})$ não depende das matrizes D_{11z}, D_{12z} e D_{21z} .

Seja agora o sistema SISO em malha fechada, sendo $I(s)$ um sinal de referência aplicado à entrada do controlador e $W(s)$ uma perturbação externa aplicada à entrada da planta $G(s) \in R_{sp}$ (conjunto das funções racionais com variáveis complexas estritamente própria), conforme representado pelo diagrama de blocos da fig. 3.

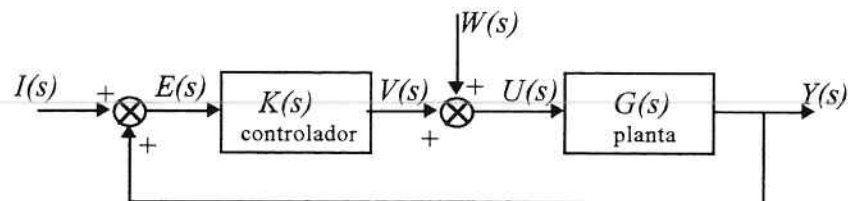


Fig. 3 - Sistema SISO com realimentação unitária.

$$e \ G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} = \frac{c_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + c_2 s + c_1}{s^n + a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \dots + a_2 s + a_1},$$

$$\text{ou na forma de estado } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \\ y = \mathbf{c}\mathbf{x} \end{cases}, \text{ com } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \text{ e } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Conforme **R1**, os controladores admissíveis para $G(s)$ podem ser escritos como

$$\mathbf{K}_s = \bar{F}(\mathbf{Z}_s, \mathbf{Q}_s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_k & \mathbf{b}_k \\ \hline \mathbf{c}_k & d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f} + \mathbf{l}\mathbf{c} - d\mathbf{b}\mathbf{c} & d\mathbf{b} - \mathbf{l} \\ \hline \mathbf{f} - d\mathbf{c} & d \end{array} \right], \quad (5)$$

considerando $\mathbf{Q}_s = \mathbf{0}$, com $d \in \mathbb{R}$ e os vetores $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]$ e $\mathbf{l} = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]^T$ que correspondem aos vetores de retroação e do observador de estado, respectivamente, tais que $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f}$ e $\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c}$ sejam estáveis.

Desta forma, de (5), obtém-se a função de transferência do controlador

$$K(s) = \mathbf{c}_k [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_k]^{-1} \mathbf{b}_k + d$$

$$\text{e utilizando-se a relação (ver [2]): } \mathbf{c} [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{b} = \frac{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{c}] - \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]},$$

$$\text{resulta } K(s) = \frac{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_k + \mathbf{b}_k \mathbf{c}_k] + (d-1)\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_k]}{\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}_k]}. \quad (6)$$

Da realização dos controladores admissíveis $\mathbf{K}_s$ dados por (5) e do resultado **R2** podem-se citar facilmente algumas propriedades interessantes tanto para o controlador $\mathbf{K}_s$ quanto para o sistema em malha fechada:

Propriedade dos pólos fixos da FTMF.

De (4), resulta imediatamente que os pólos de malha fechada para todo $d \in \mathbb{R}$ são dados por $\lambda(\bar{\mathbf{A}}) = \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f}) \cup \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{l}\mathbf{c})$.

Propriedade do controlador com d nulo

O controlador obtido no caso de $d=0$ é similar a um regulador de estado que usa o vetor $\mathbf{f}$ como o vetor de retroação de estado e vetor $\mathbf{l}$ como o vetor de ganhos para o observador de estado. De fato, fazendo $d=0$ em (5), obtém-se

$$(\mathbf{K}_o)_s = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_k & \mathbf{b}_k \\ \hline \mathbf{c}_k & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f} + \mathbf{l}\mathbf{c} & -\mathbf{l} \\ \hline \mathbf{f} & 0 \end{array} \right], \text{ cuja função de transferência correspondente é}$$

$$K_O(s) = \frac{N_O(s)}{D_O(s)} = \mathbf{c}_k [s\mathbf{I} - \mathbf{A}_k]^{-1} \mathbf{b}_k = -\mathbf{f} [s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f} + \mathbf{l}\mathbf{c})]^{-1} \mathbf{l}$$

$$K_O(s) = \frac{N_O(s)}{D_O(s)} = \frac{\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f} + \mathbf{l}\mathbf{c} + \mathbf{l}\mathbf{f})] - \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f} + \mathbf{l}\mathbf{c})]}{\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{f} + \mathbf{l}\mathbf{c})]}. \quad (7)$$

Fazendo uma analogia ao que foi dito anteriormente, com relação ao controlador $\mathbf{K}_s = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}_s, \mathbf{Q}_s)$, à $\mathbf{Z}_s$ e $\mathbf{Q}_s$, pode-se dizer que a família de controladores $K(s)$ definidos por (6) é “centrada” no controlador $K_O(s)$ e parametrizada pelo escalar d .

Manipulando-se algebricamente as equações (6) e (7), usando propriedades básicas de determinantes e levando em conta que os pólos de malha fechada independem de d , chega-se a

$$K(s) = \frac{N_O(s) \pm dD_P(s)}{D_O(s) + dN_P(s)}, \quad (8)$$

que é a função de transferência parametrizada em d de todos os controladores admissíveis para a planta $G(s) \in R_{sp}$ com $\mathbf{Q}_s = \mathbf{0}$. O sinal entre os dois termos do numerador acompanha o sinal usado na realimentação.

Utilizando-se álgebra de diagrama de blocos, prova-se que a equação (8) é válida para qualquer controlador $K_O(s)$ que estabilize internamente a planta $G(s)$, e não apenas para aqueles obtidos por retroação de estado. Sendo assim, a restrição inicialmente imposta de $\mathbf{Q}_s = \mathbf{0}$, para a obtenção de (5), desaparece, tendo em vista que qualquer controlador $K_O(s)$ que estabilize a planta $G(s)$ pode ser escrito como $\mathbf{K}_s = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}_s, \mathbf{Q}_s)$, com $\mathbf{Z}_s$ satisfazendo (3) e para um adequado $\mathbf{Q}_s \neq \mathbf{0}$, internamente estável.

Com a função de transferência dada em (8), pode-se expressar as FTMFs para o sistema SISO da fig. 3, em função de $N_P(s)$, $D_P(s)$, $N_O(s)$, $D_O(s)$ e do escalar d . Serão considerados quatro casos: as FTMFs $P(s) = Y(s)/W(s)$ e $T(s) = Y(s)/I(s)$, com realimentação unitária positiva (conforme a fig. 3) e também com realimentação unitária negativa.

	Realimentação Positiva	Realimentação Negativa
$P(s)$	$\frac{N_P(s)(D_O(s) + dN_P(s))}{D_P(s)D_O(s) - N_P(s)N_O(s)}$	$\frac{N_P(s)(D_O(s) + dN_P(s))}{D_P(s)D_O(s) + N_P(s)N_O(s)}$
$T(s)$	$\frac{N_P(s)(N_O(s) + dD_P(s))}{D_P(s)D_O(s) - N_P(s)N_O(s)}$	$\frac{N_P(s)(N_O(s) - dD_P(s))}{D_P(s)D_O(s) + N_P(s)N_O(s)}$

Tabela 1 - Pólos e zeros das FTMFs parametrizados em d .

Nota-se que todos os numeradores das quatro FTMFs possuem o termo $N_P(s)$, multiplicando $N_O(s)$ ou $D_O(s)$. Isto implica que todos os zeros da planta, raízes de $N_P(s)$, estão presentes em todas as FTMFs, como esperado. Já os outros polinômios do numerador estão na forma $M(s) = L(s) + kJ(s)$ onde, em termos da determinação dos zeros da função (denotado por $\rho[M(s)]$), é equivalente escrever:

$$M(s) = 0, \text{ ou } L(s) + kJ(s) = 0, \text{ ou } 1 + k \frac{J(s)}{L(s)} = 0.$$

Nesta última forma são classicamente colocados os problemas de determinação do lugar das raízes (*root locus*) de $M(s)$ com a variação do parâmetro k (OGATA [1], D'AZZO [3] e SHINNERS [4]). Normalmente nestas análises, $J(s)/L(s)$ corresponde à malha aberta do sistema e k corresponde ao ganho, apesar de o método do lugar das raízes ser geral e poder ser usado para analisar a influência da variação de qualquer parâmetro do sistema. Assim pode-se resumir na tabela 2 o conjunto de pólos e zeros das FTMFs para todos os casos. Com isto pode-se colocar sobre o plano complexo os pólos e os zeros fixos da FTMF (estes últimos correspondendo aos zeros da planta) e em seguida esboçar, usando as regras usuais de lugar de raízes ou programas de computador, o lugar dos zeros restantes para $d \in \mathbb{R}$, com $-\infty \leq d \leq +\infty$.

	Realimentação Positiva	Realimentação Negativa
Zeros de $P(s)$	$\rho(N_p(s)) \cup \rho\left(1 + d \frac{N_p(s)}{D_o(s)}\right)$	$\rho(N_p(s)) \cup \rho\left(1 + d \frac{N_p(s)}{D_o(s)}\right)$
Zeros de $T(s)$	$\rho(N_p(s)) \cup \rho\left(1 + d \frac{D_p(s)}{N_o(s)}\right)$	$\rho(N_p(s)) \cup \rho\left(1 - d \frac{D_p(s)}{N_o(s)}\right)$
Pólos de $P(s)$ e $T(s)$	$\rho(D_p(s)D_o(s) - N_p(s)N_o(s))$	$\rho(D_p(s)D_o(s) + N_p(s)N_o(s))$

Tabela 2 - Pólos e zeros das FTMFs parametrizados em d .

Pela equação (8) pode-se verificar que, de uma forma geral, o controlador tem seus pólos e seus zeros alterados em função do parâmetro d . Estas alterações podem fazer com que o controlador $K(s)$ deixe de ter alguma característica do controlador $K_o(s)$ que possa ser considerada interessante ou necessária pelo projetista. Tais características estão normalmente ligadas à especificações de erro de regime e à limitação de banda passante para o sistema em malha fechada e resultam respectivamente em pólos de $K_o(s)$ próximos à origem ou na origem (integradores) e em filtros passa-baixa ou filtros rejeita-faixa (*notch-filter*). Dessa forma, em muitas situações seria conveniente que se obtivesse uma família de controladores admissíveis para a planta $G(s)$, centrados no controlador $K_o(s)$, onde algumas dessas estruturas pertencentes a $K_o(s)$ fossem preservadas. Com esse objetivo, seja a planta $G(s) \in R_p$ (conjunto das funções racionais com variáveis complexas próprias) e o controlador

$$K_o(s) = \bar{K}_o(s) \tilde{K}_o(s) = \frac{N_o(s)}{D_o(s)}, \quad (9)$$

$$\text{tal que } K_o(s) \in \mathcal{A}(G(s)) \text{ e onde } \bar{K}_o = \frac{\bar{N}_o(s)}{\bar{D}_o(s)} \text{ e } \tilde{K}_o = \frac{\tilde{N}_o(s)}{\tilde{D}_o(s)}. \quad (10)$$

Para que a família de controladores admissíveis mantenha os pólos e zeros de $\tilde{K}_o(s)$, será usado um artifício semelhante ao utilizado quando do projeto de controladores pela técnica LQG/LTR, na qual o projetista deseja incorporar um integrador ao controlador de modo a obter erro de regime nulo. Isto é feito pelo projeto do controlador para uma planta modificada, constituída pelo integrador que se deseja no controle em série com a planta original. Ao controlador obtido desta forma, deve-se conectar em série o integrador desejado, de modo a obter-se um controle que em malha fechada com a planta original comporte-se da mesma maneira que aquele projetado com a planta modificada. Procedendo de forma análoga com $\tilde{K}_o(s)$, obtém-se

$$K(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{N_o(s) \pm dD_p(s)\tilde{D}_o(s)\tilde{N}_o(s)}{D_o(s) + dN_p(s)\tilde{N}_o(s)\tilde{D}_o(s)}. \quad (11)$$

Observação: A expressão encontrada em (11) garante que os pólos e os zeros de $\tilde{K}_o(s)$ estarão presentes em $K(s)$ para $d \in \mathbb{R}$, a não ser em casos particulares quando $\rho(\tilde{N}_o(s) \pm dD_p(s)\tilde{D}_o(s)) \cap \rho(\tilde{D}_o(s))$ e/ou $\rho(\tilde{D}_o(s) + dN_p(s)\tilde{N}_o(s)) \cap \rho(\tilde{N}_o(s)) \neq \emptyset$, pois nestes casos ocorrerá o cancelamento de pólos e/ou zeros de $\tilde{K}_o(s)$ para algum valor de d .

Assim, pode-se expressar as FTMFs do sistema SISO, $P(s)$ e $T(s)$, utilizando-se a expressão do controlador dada por (11). A tabela 3 mostra estes resultados tanto para realimentação unitária positiva como para realimentação unitária negativa.

	Realimentação Positiva	Realimentação Negativa
$P(s)$	$\frac{N_p(s)(D_o(s) + dN_p(s)\tilde{N}_o(s)\tilde{D}_o(s))}{D_p(s)D_o(s) - N_p(s)N_o(s)}$	$\frac{N_p(s)(D_o(s) + dN_p(s)\tilde{N}_o(s)\tilde{D}_o(s))}{D_p(s)D_o(s) + N_p(s)N_o(s)}$
$T(s)$	$\frac{N_p(s)(N_o(s) + dD_p(s)\tilde{D}_o(s)\tilde{N}_o(s))}{D_p(s)D_o(s) - N_p(s)N_o(s)}$	$\frac{N_p(s)(N_o(s) - dD_p(s)\tilde{D}_o(s)\tilde{N}_o(s))}{D_p(s)D_o(s) + N_p(s)N_o(s)}$

Tabela 3 - FTMFs parametrizados em d com $K_o(s) = \bar{K}_o(s)\tilde{K}_o(s)$.

Com base nos resultados da tabela anterior e utilizando as relações dadas por (9) e (10), pode-se escrever para cada uma das FTMFs o conjunto de pólos e zeros parametrizados em d . Surgem como zeros de malha fechada as raízes do numerador (no caso de $T(s)$) ou do denominador (no caso de $P(s)$) de $\tilde{K}_o(s)$, que fazem parte da estrutura do controlador central $K_o(s)$ que foi preservada na família de controladores $K(s)$. Finalmente, deve-se observar que os demais zeros poderão ser determinados em função do parâmetro d , utilizando-se as técnicas usuais de lugar das raízes. A tabela 4 resume estes resultados.

	Realimentação Positiva	Realimentação Negativa
Zeros de $P(s)$	$\rho(N_p(s)) \cup \rho(\tilde{D}_o(s)) \cup \dots$ $\cup \rho\left(1 + d \frac{N_p(s)\tilde{N}_o(s)}{\tilde{D}_o(s)}\right)$	$\rho(N_p(s)) \cup \rho(\tilde{D}_o(s)) \cup \dots$ $\cup \rho\left(1 + d \frac{N_p(s)\tilde{N}_o(s)}{\tilde{D}_o(s)}\right)$
Zeros de $T(s)$	$\rho(N_p(s)) \cup \rho(\tilde{N}_o(s)) \cup \dots$ $\cup \rho\left(1 + d \frac{D_p(s)\tilde{D}_o(s)}{\tilde{N}_o(s)}\right)$	$\rho(N_p(s)) \cup \rho(\tilde{N}_o(s)) \cup \dots$ $\cup \rho\left(1 - d \frac{D_p(s)\tilde{D}_o(s)}{\tilde{N}_o(s)}\right)$
Pólos de $P(s)$ e $T(s)$	$\rho(D_p(s)D_o(s) - N_p(s)N_o(s))$	$\rho(D_p(s)D_o(s) + N_p(s)N_o(s))$

Tabela 4 - Pólos e zeros das FTMFs parametrizados em d com $K_o(s) = \tilde{K}_o(s)\tilde{K}_o(s)$.

Ao se generalizar a expressão (8), para qualquer controlador, e também fixando-se parte da estrutura de $K_o(s)$ em $K(s)$ com (11), deve-se garantir que $K(s)$ seja próprio e o sistema resultante em malha fechada ser bem-posto, ou seja $G(s)$ e $K(s)$ devem ser funções racionais próprias e a FTMF de qualquer ponto escolhido como entrada para qualquer outro ponto da malha seja própria e bem definida. Assim, demonstram-se as proposições que seguem.

Proposição 1: Para $K(s)$ dado por (11), supondo $d \in \mathbb{R}$ e $G(s) \in R_p$, tem-se $K(s) \in R_p$ se for verificada uma das seguintes condições (serão omitidos os argumentos das funções, visando simplificar as expressões):

i) para $\partial[D_o] \neq \partial[N_p] + \partial[\tilde{N}_o] + \partial[\tilde{D}_o]$:

$$\max\{\partial[N_o], \partial[D_p] + \partial[\tilde{N}_o] + \partial[\tilde{D}_o]\} \leq \max\{\partial[D_o], \partial[N_p] + \partial[\tilde{N}_o] + \partial[\tilde{D}_o]\},$$

ii) para $\partial[D_o] = \partial[N_p] + \partial[\tilde{N}_o] + \partial[\tilde{D}_o] = m$:

$$\max\{\partial[N_o], \partial[D_p] + \partial[\tilde{N}_o] + \partial[\tilde{D}_o]\} \leq m \text{ e } \partial[\hat{N}_c] \leq \partial[\hat{D}_c],$$

onde $\partial[*]$ denota o grau do polinômio $*$, $\hat{N}_c$ e $\hat{D}_c$ são o numerador e o denominador de $K(s)$ dado por (11), para $d = \hat{d} = -a_m/c_m$, sendo a_m e c_m coeficientes de s^m dos polinômios D_o e do produto de $N_p\tilde{N}_o\tilde{D}_o$, respectivamente.

Proposição 2: Seja $G(s) = \frac{N_p(s)}{D_p(s)} \in R_p$ e $K(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} \in R_p$ dado pela equação (11) e

além disso $G(s)$ e $K(s) \notin R_{sp}$. O sistema em malha fechada formado por estas funções de transferência, conforme a fig. 3, é bem-posto para todo $d \in \mathbb{R}$ se $\partial[D_o D_p - N_o N_p] \geq \max\{\partial[D_o] + \partial[D_p], \partial[N_p] + \partial[D_p] + \partial[\tilde{N}_o] + \partial[\tilde{D}_o]\}$ no caso da malha ser fechada com realimentação unitária positiva, ou $\partial[D_o D_p + N_o N_p] \geq \max\{\partial[D_o] + \partial[D_p], \partial[N_p] + \partial[D_p] + \partial[\tilde{N}_o] + \partial[\tilde{D}_o]\}$, para o caso da malha ser fechada com realimentação unitária negativa.

Observação:

- a) Se $K_o(s) \in R_p$, as condições impostas pela proposição 1 aplicam-se para $d=0$.
- b) O sistema sempre será bem-posto se $G(s)$ e/ou $K(s) \in R_{sp}$ (DOYLE *et al.* [5]).
- c) Obviamente, não fixar nenhum $\tilde{K}_o(s)$ em $K(s)$, equivale a tomar $\partial[\tilde{N}_o] = \partial[\tilde{D}_o] = 0$.

3 -Exemplo de aplicação

Foi elaborado um conjunto de rotinas no *software* MATLAB, que permitem testar se o sistema em malha fechada será bem-posto e plotar o lugar dos zeros, permitindo ainda escolher-se graficamente sobre este lugar geométrico o posicionamento dos zeros de uma determinada FTMF, o que corresponderia a um determinado controlador e a um determinado valor do parâmetro d . Para estes valores selecionados de d , ainda são apresentados: as funções de transferência $T(s)$ ou $P(s)$ (conforme o caso) e as funções de transferência dos controladores $K(s)$ e seus diagramas de Bode, além dos diagramas de Bode das funções sensibilidade, sensibilidade complementar e função $R(s)$, as margens de ganho e fase, os resíduos das frações parciais das funções de transferência de malha fechada, as respostas ao impulso e ao degrau, as respectivas saídas dos controladores e as normas H^2 e H^∞ para as funções $T(s)$ ou $P(s)$.

Como exemplo, será considerado um sistema de controle do tipo regulador de saída para a planta e o controlador central, dados respectivamente por:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 0.004s + 4} \quad \text{e} \quad K_o(s) = \frac{-164.653(s^2 + 1.436s + 1.582)}{(s + 2.693)(s + 0.001)(s^2 + 9.602s + 51.68)},$$

obtido por meio de imposição de pólos por retroação de estados para a planta colocada em série com o pólo dado por $\frac{1}{s + 0.001}$, que posteriormente é incorporado ao controlador resultante. Busca-se deste modo pequenos erros de regime para perturbações do tipo degrau aplicadas à entrada da planta. Para manter este erro pequeno, o controlador será considerado como sendo dado por:

$$K_o(s) = \bar{K}_o(s) \tilde{K}_o(s),$$

$$\text{onde } \bar{K}_o(s) = \frac{-164.653(s^2 + 1.436s + 1.582)}{(s + 2.693)(s^2 + 9.602s + 51.68)} \quad \text{e} \quad \tilde{K}_o(s) = \frac{1}{s + 0.001},$$

que resulta no lugar dos zeros visto na fig. 4 que segue, juntamente com os diagramas de Bode (magnitudes em dB e fase em graus) das FTMFs $P(s)$ e dos controladores admissíveis $K(s)$, da função de sensibilidade complementar $T(s)$, da resposta ao degrau e das margens de fase e ganho, em função do parâmetro d .

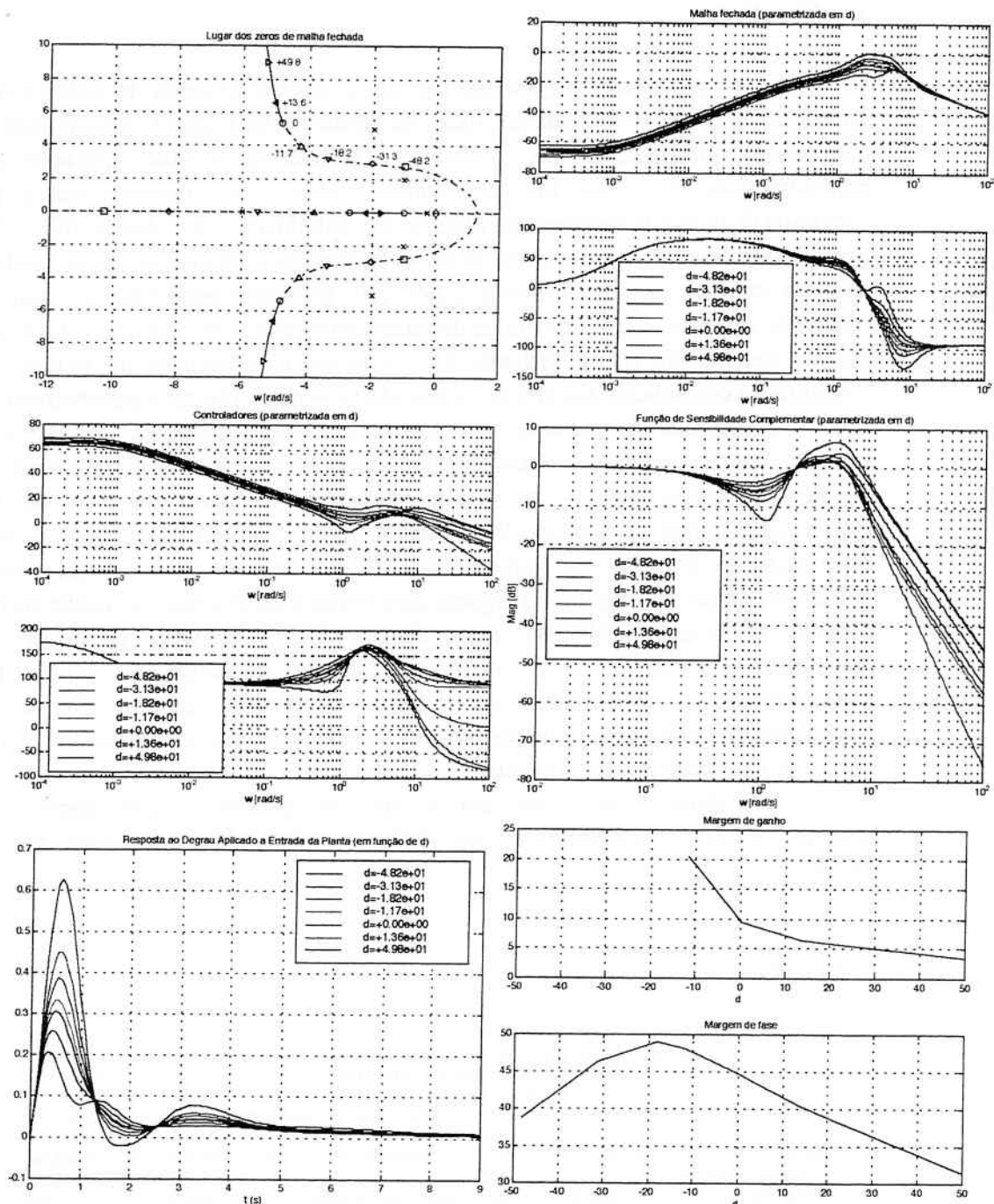


Fig. 4 – Influência dos zeros de malha fechada e do parâmetro d no desempenho do sistema

Destaca-se na fig. 4:

- menor valor de pico da resposta ao degrau, na medida que d se torna mais negativo;
- a margem de ganho que é infinita para $d \leq -18.3$ e melhora na margem de fase para d em torno de -18.3 ;
- o aumento da magnitude da função sensibilidade complementar em frequências altas, que indica uma maior sensibilidade a ruídos de sensor e a dinâmicas não modeladas.

4 – Conclusões

Foi proposta uma técnica que permite a escolha de zeros de malha fechada para um sistema SISO, mantendo-se fixos os pólos determinados inicialmente por um controlador admissível $K_O(s)$ qualquer. Esta técnica é uma aplicação direta da parametrização de Youla dos controladores admissíveis, desenvolvida a partir de conceitos da teoria de variáveis de estados por ISHIHARA & SALES, [6] e [7]. Com a parametrização dos controladores, os zeros da funções de transferência de malha fechada também resultam parametrizados e, sendo esta parametrização feita por um escalar, a utilização de técnicas usuais de lugar de raízes permite que seja obtido o lugar dos zeros para o sistema em malha fechada. Foi incorporado o recurso de fixar-se parte da estrutura do controlador $K_O(s)$ nos controladores gerados por essa parametrização.

A aplicação desta técnica, afeta não somente a resposta aos transitórios do sistema, mas também características de robustez, rejeição a ruídos e esforços de controle. O lugar dos zeros depende tanto da planta quanto do controlador central, sendo de grande importância a sua escolha. Quanto mais o controlador central atender às especificações impostas ao projeto, mais facilmente a ferramenta aqui desenvolvida poderá ser usada para aprimorar alguma característica do sistema em malha fechada e do próprio controlador. Nota-se com alguma facilidade uma correlação entre o posicionamento dos zeros de malha fechada, as mudanças no controlador e as conseqüências no desempenho do sistema. Entretanto, parece não ser possível estabelecer diretrizes gerais que possam ser aplicadas a todas as infinitas combinações de plantas e controladores admissíveis.

Cabe ainda ressaltar que outros tipos de parametrizações podem vir a ser tentadas, como a parametrização por funções racionais, e a utilização em sistemas MIMO.

5- Referências bibliográficas

- [1] OGATA, K. **Modern control engineering**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970.
- [2] KAILATH, T. **Linear system**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- [3] D'AZZO, J. J.; HOUPIS, C. H. **Linear control system analysis and design**. McGraw-Hill Kogakusha LTD., 1975.
- [4] SHINNERS, S. M. **Modern control system theory and design**. John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [5] DOYLE, J. C.; FRANCIS, B. A.; TANNENBAUM, A. R. **Feedback control theory**. Macmillan Publishing Co., 1992.
- [6] ISHIHARA, J. Y.; SALES, R. M. Uma abordagem no domínio do tempo para a caracterização de "Controladores Admissíveis". **SBA Controle & Automação**, vol. 7, n° 2, maio-agosto 1996.
- [7] ISHIHARA, J. Y. **Estabilidade interna e controladores H^2 e H^∞** . São Paulo, 1996. 107p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [8] HANG, C. C. The choice of controller zeros. **IEEE Control System Magazine**, vol. 9, n° 1, (jan/1989), pag. 72-75.
- [9] MOORE, K. L.; BHATTACHARYYA, S. P. A technique for choosing zero locations for minimal overshoot. **IEEE Trans. on Automatic Control**, vol. 35, n° 3 (may/1990), pag. 577-580.
- [10] CLARK, R. N. Another reason to eschew pole-zero cancellations. **IEEE Control System Magazine**, vol. 8, n° 2, (apr/1988), pag. 87-88.
- [11] TU, M. H.; LIN, C. M. Synthesis of pole-zero assignment control law with minimum control input. **IEE Proceedings D (Control)**, vol. 139, n° 3 (may/1992), pag. 291-295.
- [12] SCHMIDT, D. K.; BENSON, D. Loop shaping and a zero-placement technique as applied to the benchmark problem. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, vol. 5 (1995), pag. 33-51.

BOLETINS TÉCNICOS - TEXTOS PUBLICADOS

- BT/PTC/9901 – Avaliação de Ergoespirômetros Segundo a Norma NBR IEC 601-1- MARIA RUTH C. R. LEITE, JOSÉ CARLOS TEIXEIRA DE B. MORAES
- BT/PTC/9902 – Sistemas de Criptofonia de Voz com Mapas Caóticos e Redes Neurais Artificiais – MIGUEL ANTONIO FERNANDES SOLER, EUVALDO FERREIRA CABRAL JR.
- BT/PTC/9903 – Regulação Sincronizada de Distúrbios Senodais – VAIDYA INÉS CARRILLO SEGURA, PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA
- BT/PTC/9904 – Desenvolvimento e Implementação de Algoritmo Computacional para Garantir um Determinado Nível de Letalidade Acumulada para Microorganismos Presentes em Alimentos Industrializados – RUBENS GEDRAITE, CLÁUDIO GARCIA
- BT/PTC/9905 – Modelo Operacional de Gestão de Qualidade em Laboratórios de Ensaio e Calibração de Equipamentos Eletromédicos – MANUEL ANTONIO TAPIA LÓPEZ, JOSÉ CARLOS TEIXEIRA DE BARROS MORAES
- BT/PTC/9906 – Extração de Componentes Principais de Sinais Cerebrais Usando Karhunen – Loève Neural Network – EDUARDO AKIRA KINTO, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PTC/9907 – Observador Pseudo-Derivativo de Kalman Numa Coluna de Destilação Binária – JOSÉ HERNANDEZ LÓPEZ, JOSÉ JAIME DA CRUZ, CLAUDIO GARCIA
- BT/PTC/9908 – Reconhecimento Automático do Locutor com Coeficientes Mel-Cepstrais e Redes Neurais Artificiais – ANDRÉ BORDIN MAGNI, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR
- BT/PTC/9909 – Análise de Estabilidade e Síntese de Sistemas Híbridos – DIEGO COLÓN, FELIPE MIGUEL PAIT
- BT/PTC/0001 – Alguns Aspectos de Visão Multiescalas e Multiresolução – JOÃO E. KOGLER JR., MARCIO RILLO
- BT/PTC/0002 – Placa de Sinalização E1: Sinalização de Linha R2 Digital Sinalização entre Registradores MFC- PHILLIP MARK SEYMOUR BURT, FERNANDA CARDOSO DA SILVA
- BT/PTC/0003 – Estudo da Técnica de Comunicação FO-CDMA em Redes de Fibra Óptica de Alta Velocidade – TULIPA PERSO, JOSÉ ROBERTO DE A. AMAZONAS
- BT/PTC/0004 – Avaliação de Modelos Matemáticos para Motoneurônios – DANIEL GUSTAVO GOROSO, ANDRÉ FÁBIO KOHN
- BT/PTC/0005 – Extração e Avaliação de Atributos do Eletrocardiograma para Classificação de Batimentos Cardíacos – ELDER VIEIRA COSTA, JOSÉ CARLOS T. DE BARROS MORAES

