



Modelagem de Uma Estrutura Não Linear com Acoplamento Entre Oscilações Axiais e Transversais

Lucas José Dantas Alcântara, Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos, lucasjosedantas@usp.br

Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira, Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos, leopro@sc.usp.br

RESUMO EXPANDIDO

O desenvolvimento de modelos para descrever a oscilação não linear de vigas com condições de contorno usuais (engaste, apoio, livre etc.) é amplamente consolidado na literatura, sendo apresentado em obras de referência como a de Nayfeh and Pai (2004). Na formulação desses modelos, no entanto, são adotadas hipóteses que podem limitar sua capacidade de representar de forma precisa o comportamento experimental, como, por exemplo, a consideração de pequenas oscilações. Nesse contexto, Farokhi et al. (2022) investigaram a oscilação de uma viga vertical em balanço submetida a grandes deformações, descrevendo o modelo em função da rotação da linha neutra e estabelecendo a relação dessa grandeza com os deslocamentos axiais e transversais da viga. O modelo proposto foi validado experimentalmente, demonstrando sua eficácia na representação do sistema. Em uma aplicação de relevância aeronáutica, Colin et al. (2020) analisaram um modelo geometricamente exato de viga, incluindo ainda termos de amortecimento não lineares associados a interações fluido-estrutura, também com validação experimental de seus resultados.

Além das formulações para vigas individuais, o acoplamento entre múltiplas vigas introduz interações que modificam o comportamento dinâmico do sistema, possibilitando o surgimento de fenômenos não observados em estruturas isoladas. Esse aspecto é explorado por Cao et al. (2024), que investigaram os modos de vibrar de N vigas acopladas, comparando casos específicos, como vigas em formato de L, Z e C, com resultados obtidos por meio de simulações de elementos finitos, validando assim o modelo proposto. De forma complementar, Yu et al. (2017) deduziram as equações não lineares de uma viga em formato de L e analisaram sua dinâmica nos casos de oscilações livres não amortecidas e forçadas amortecidas, além de conduzirem uma análise de bifurcação global e caos. Sob outra perspectiva, Zang et al. (2024) também deduziram um modelo para uma viga em L, validando experimentalmente os resultados obtidos.

Uma abordagem alternativa para o desenvolvimento de modelos mais complexos é a formulação de um modelo de parâmetros concentrados, em que se determinam parâmetros equivalentes para características do sistema. Heaney and Bilgen (2019) discutiram erros de predição associados a essas técnicas, especialmente quando não linearidades são desprezadas, e, ao comparar diferentes métodos de controle de sinal, ofereceram recomendações úteis para o desenvolvimento desse tipo de modelo. De forma complementar, Wei et al. (2023) desenvolveram um modelo de parâmetros concentrados para avaliar os efeitos não lineares do amortecimento de Kelvin-Voigt.

Nesse contexto, o presente trabalho propõe o desenvolvimento do modelo de uma estrutura semelhante a uma viga em L, mas com ângulo genérico entre as vigas (vide Fig. (1)) A estrutura apresenta oscilações acopladas nas direções axial e transversal, de modo que uma excitação em uma direção pode induzir movimento na outra. Para modelar o sistema, é desenvolvido um modelo analítico das vigas a partir da formulação de Euler-Lagrange, e as equações obtidas são projetadas em coordenadas modais, resultando em equações diferenciais ordinárias (EDOs) que descrevem o movimento do sistema, apresentadas a seguir.

$$\ddot{\eta}_{u1} + k_1\eta_{u1} + k_2\eta_{w1}^2 + A_1 \cos(\Omega t) = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{\eta}_{w1} + k_3\eta_{w1} + k_4\eta_{w1}^3 + k_5\eta_{w1}\eta_{u1} + A_2 \cos(\Omega t) = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{\eta}_{u2} + k_6\ddot{\eta}_{u2}\eta_{w1}^2 + k_7\ddot{\eta}_{u1} + k_8\ddot{\eta}_{u1}\eta_{w1} + k_9\ddot{\eta}_{w1} + k_{10}\ddot{\eta}_{w1}\eta_{w2} + k_{11}\ddot{\eta}_{w1}\eta_{w1} + k_{12}\eta_{w2}^2 + k_{13}\eta_{u2} + k_{14}\eta_{u2}\dot{\eta}_{w1}^2 + k_{15}\dot{\eta}_{w1}^2 + k_{16}\dot{\eta}_{w1}\dot{\eta}_{w2} + k_{17}\eta_{w1} \cos(\Omega t) + A_3 \cos(\Omega t) = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{\eta}_{w2} + k_{18}\ddot{\eta}_{w2}\eta_{w1}^2 + k_{19}\ddot{\eta}_{w1} + k_{20}\ddot{\eta}_{w1}\eta_{u2} + k_{21}\ddot{\eta}_{w1}\eta_{w1}^2 + k_{22}\ddot{\eta}_{w1}\eta_{w1} + k_{23}\ddot{\eta}_{u1} + k_{24}\ddot{\eta}_{u1}\eta_{w1} + k_{30}\dot{\eta}_{w1}\dot{\eta}_{w2} + k_{31}\eta_{w2}\dot{\eta}_{w1}^2 + k_{32}\eta_{u2}\eta_{w2} + k_{33}\eta_{w2} + k_{34}\eta_{w2}^3 + k_{35}\eta_{w1} \cos(\Omega t) + A_4 \cos(\Omega t) = 0 \quad (4)$$

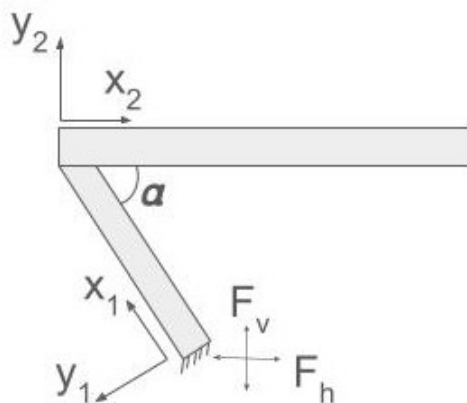


Figura 1. Estrutura proposta, composta de duas vigas acopladas em uma extremidade com um ângulo α entre elas. O sistema é considerado sujeito a forças harmônicas tanto na vertical (F_v) quanto na horizontal (F_h).

As Equações (1-4) representam as EDOs que descrevem as oscilações das vigas acopladas. Nelas, observa-se a presença de não linearidades que não aparecem comumente em modelos de vigas não lineares típicos, geralmente descritos por um oscilador de Duffing. Também é possível identificar termos de excitação paramétrica, nos quais um movimento em uma direção induz oscilações em outra. Diferentes métodos podem ser empregados para resolver essas equações, incluindo abordagens analíticas, como múltiplas escalas e balanço harmônico, ou métodos numéricos baseados na solução direta do sistema de EDOs.

Por fim, observa-se que o sistema proposto apresenta certo grau de acoplamento entre suas oscilações, assim como não linearidades não comumente observadas. Como perspectiva futura, sugere-se a obtenção de uma solução analítica do modelo, ou de uma versão reduzida, e a validação de seus resultados por meio de estudos numéricos e experimentais.

REFERÊNCIAS

- Cao, D.-X., Zhou, Y.-W., and Guo, X.-Y. (2024). In-plane free vibration analysis of multi-folded beam structures. *Engineering Structures*, 302:117437.
- Colin, M., Thomas, O., Grondel, S., and Cattan, É. (2020). Very large amplitude vibrations of flexible structures: Experimental identification and validation of a quadratic drag damping model. *Journal of Fluids and Structures*, 97:103056.
- Farokhi, H., Xia, Y., and Erturk, A. (2022). Experimentally validated geometrically exact model for extreme nonlinear motions of cantilevers. *Nonlinear Dynamics*, 107(1):457–475.
- Heaney, P. and Bilgen, O. (2019). System identification of lumped parameter models for weakly nonlinear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 450:78–95.
- Nayfeh, A. and Pai, P. (2004). *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc.
- Wei, D., Aniyarov, A., Zhang, D., Spitas, C., Nurakhmetov, D., and Amrin, A. (2023). Kelvin-voigt lumped parameter models for approximation of the power-law euler-bernoulli beams. *Alexandria Engineering Journal*, 78:246–255.
- Yu, T.-J., Zhang, W., and Yang, X.-D. (2017). Nonlinear dynamics of flexible l-shaped beam based on exact modes truncation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 27(3):1750035.
- Zang, J., Liu, L., Song, X.-Y., Zhang, Z., Zhang, Y.-W., and Chen, L.-Q. (2024). Dynamics control of l-shaped composite structure in electric aircraft: Theoretical analysis and experimental validation. *Composite Structures*, 334:117929.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), através dos processos 2018/15894-0, 2021/05510-3 e 2024/22736-3. O último autor também agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), através do processo 303901/2021-7.

RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.