

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia de Telecomunicações
e Controle

ISSN 1517-3550

BT/PTC/0103

Algoritmos de Filtragem e Previsão
em Modelos de Volatilidade

Fernando Lovisotto
Oswaldo L. V. Costa

São Paulo – 2001

O presente trabalho é um resumo da dissertação de mestrado apresentada por Fernando Lovisotto, sob orientação do Prof. Dr. Oswaldo L. V. Costa.: "Algoritmos de Filtragem e Previsão em Modelos de Volatilidade", defendida em 01/12/00, na Escola Politécnica.

A íntegra da dissertação encontra-se à disposição com o autor e na Biblioteca de Engenharia Elétrica da Escola Politécnica/USP.

FICHA CATALOGRÁFICA

Lovisotto, Fernando

Algoritmos de filtragem e previsão em modelos de volatilidade / F. Lovisotto, O.L.V. Costa. – São Paulo : EPUSP, 2001.

13 p. – (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, BT/PTC/0103)

1. Algoritmos 2. Volatilidade 3. Filtros de Kalman I. Costa, Oswaldo Luiz do Valle II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle III. Título IV. Série

ISSN 1517-3550

CDD 511.8

519.55

621.3815324

Algoritmos de Filtragem e Previsão em Modelos de Volatilidade

Fernando Lovisotto

Oswaldo L. V. Costa

Departamento de Engenharia de
Telecomunicações e Controle –
Universidade de São Paulo – CEP
05508-900 – SP – Brasil

Resumo

A estimação da volatilidade de ativos financeiros tem sido um assunto de grande interesse nos últimos tempos, seja pelo seu uso na previsão de riscos, seja pelo seu uso no apreamento de ativos. O presente trabalho tem por objetivo testar alguns modelos de estimação, verificando, de acordo com os critérios adotados, quais os melhores para as séries escolhidas. Inicialmente apresentaremos alguns modelos e suas principais propriedades. Dentre eles podemos citar: desvio-padrão, modelo "High-Low", modelo "Open-High-Low-Close", Garch (1,1), EGarch, IGarch, Volatilidade Implícita e Volatilidade Estocástica. Daremos grande atenção à este último grupo, para o qual derivaremos todas as equações necessárias para sua modelagem, estimação de parâmetros e previsão de volatilidades. Por fim testaremos esses modelos em três séries temporais: taxa de juros pré-fixadas, preços de recibo de telebrás PN e taxa de câmbio real-dólar.

Abstract

The volatility estimation of financial assets has been a subject of great importance through the last years since it is used in the market risk management as well as in option and other derivatives pricing. The present work has the objective of testing some models, verifying according to some criteria which one fits better for the chosen time series. In this way, some models and their main properties will be derivated. Such models are: standard deviation, high-low model, open-high-low-close model, Garch (1,1), EGarch, IGarch, Implied Volatility and Stochastic Volatility. The latter will receive major attention, with all the equations that are necessary for completely modelling it, its parameters estimation and the volatility estimation using this model, derivated.

1 - Introdução

Quando falamos em medir a variabilidade dos retornos de um ativo financeiro normalmente associamos este resultado ao conceito de risco, ou seja, a idéia de qual a perda que podemos sofrer realizando um investimento em tal ativo. Recentemente a grande diversificação de investimentos, acompanhada pela globalização dos mercados financeiros, fizeram com que ondas de crise provenientes de qualquer outro país do mundo pudessem provocar enormes perdas financeiras. Estes fatos, somados com uma maior pressão dos órgãos reguladores que tentam através de suas medidas minimizar a chance de uma crise no sistema financeiro nacional, tornaram quase que compulsório o cálculo de risco de mercado pelos agentes financeiros de suas operações realizadas no Brasil.

Mas este cálculo não determina apenas o risco de mercado de uma determinada operação financeira. Cada vez mais operações envolvendo produtos financeiros chamados de derivativos são utilizados nas mesas de operações de Bancos, Fundações, Administradores de Recursos de Terceiros e Empresas. Com isso, se torna importante o correto apreamento de tais produtos, com o intuito de se evitar que seja pago mais do que o valor livre de risco, ou seja, um valor desarbitrado ou com ágio pelo mesmo. O cálculo da variabilidade do ativo objeto é fundamental para este apreamento.

A volatilidade nada mais é do que uma medida para a variabilidade de uma série temporal. Existem algumas maneiras de estimar esta variabilidade dado o comportamento da série no passado.

Apresentaremos neste trabalho formas de se estimar a volatilidade de um ativo de acordo com diversos modelos disponíveis na literatura. Verificaremos também o quão adequado são esses modelos dado um ou mais critérios. Consideraremos modelos históricos, modelos de previsão, modelos de

volatilidade implícita e modelos de volatilidade estocástica.

Modelos Históricos: utilizamos como uma previsão para a variabilidade no futuro o valor observado para esta variabilidade no passado. Estes modelos diferem entre si com relação a quais informações retiradas do passado são utilizadas.

Modelos de Previsão: o objetivo destes modelos que utilizam-se de dados históricos é estimar qual será a variabilidade futura destes dados. Os modelos utilizados neste trabalho são os da família Arch, onde utilizamos retornos passados com pesos diferentes, e até mesmo volatilidades passadas, para estimar as volatilidades futuras.

Modelos de Volatilidade Implícita: esta família tem por característica a obtenção da volatilidade desejada através do uso dos preços de ativos negociados pelo mercado. Utilizaremos opções que podem ser apreçadas segundo o modelo de Black & Scholes.

Modelos de Volatilidade Estocástica: esta classe de modelos é baseada na criação de uma estrutura para uma variável não observável. É modelado, por exemplo, o logaritmo da variância. A estimação dos parâmetros é realizada com o auxílio do Filtro de Kalman através da Quase Máximo Verossimilhança.

2 – Alguns Modelos de Volatilidade

2.1 – Modelos Históricos

Tais modelos permitem verificar quanto foi a volatilidade desta variável aleatória, no nosso caso o retorno de um ativo financeiro, durante o período passado. Estes modelos utilizam o resultado obtido para a mesma neste período passado, como estimativa para os períodos subsequentes, como em Kroner¹⁷. Assim temos que, se num período passado a volatilidade foi 15%, a volatilidade estimada (para qualquer horizonte de tempo) naquele instante de tempo será 15%.

Desvio Padrão

Dados os retornos financeiros, sabemos que seu desvio padrão é dado por:

$$\sigma_{t+1}^2 = \frac{\sum_{s=1}^n (y_{t-s+1} - \bar{y})^2}{n-1}$$

e

$$\bar{y} = \frac{\sum_{s=1}^n y_{t-s+1}}{n}$$

onde y_t é o retorno do ativo financeiro no instante t , $\bar{y}$ é a média dos retornos e n é o tamanho da série de retornos.

A amostra de dados que é utilizada no cálculo da volatilidade é composta sempre pelos últimos n dados, e é chamada de janela deslizante justamente pelo fato de que à medida que um novo dado entra no cálculo, o mais antigo sai da amostra. Cada observação recebe desta

maneira peso igual a $1/(n-1)$, ou zero se não fizer parte da janela deslizante.

Este modelo é tradicionalmente utilizado pois necessita de poucos dados (somente informação sobre o fechamento do preço/taxa dos ativos), pouco esforço computacional, é livre de fontes de erros óbvias e é muito simples.

Outros modelos que veremos necessitam de mais informações e/ou esforço computacional.

“High-Low”

Intuitivamente, podemos pensar que somente o uso de valores de fechamento do preço ou taxa do ativo fornece pouca informação sobre a volatilidade deste. Assim, no intuito de aumentarmos a quantidade de informação sobre este ativo, Parkinson (1980)²³ sugere que ao invés de construirmos os retornos como o logaritmo natural da razão entre os preços do ativo no período desejado, deveríamos considerar o máximo e mínimos que tal ativo (preço ou taxa) alcança ao longo do período de tempo desejado. Estes valores requerem para sua obtenção monitoramento contínuo.

Desta maneira, para obtermos um novo valor para a volatilidade, temos a equação abaixo:

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{1}{4 \cdot \log 2} \cdot \frac{\sum_{t=1}^n (\log h_t - \log l_t)^2}{n}$$

onde h_t é o valor máximo que o ativo atingiu durante o intervalo de tempo desejado, l_t é o valor mínimo durante o mesmo período e n o número de períodos.

Podemos perceber que o modelo pode ser comparado com o desvio-padrão com a adição de uma constante e com retornos definidos como a diferença entre os logaritmos dos valores máximos e mínimos que o ativo atingiu em cada dia.

Este modelo, como pode ser visto, tem a vantagem de captar movimentos *intraday* (movimentos que ocorrem durante o dia), capacidade esta que nenhum outro modelo que somente se utiliza de dados de fechamento consegue fazer, por construção.

“Open-High-Low-Close”

Garman e Klass (1980)⁹, desenvolvendo a mesma ideia de Parkinson (1980)²³, chegaram à conclusão de que se utilizarmos mais informações a respeito do comportamento do ativo ao longo do tempo na estimativa de sua volatilidade, podemos obter estimadores ainda mais eficientes.

Um estimador sugerido neste trabalho é mostrado abaixo:

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{\sum_{t=1}^n [0.5 \cdot (\log h_t - \log l_t)^2 - (2 \cdot \log 2 - 1) \cdot (\log c_t - \log o_t)^2]}{n}$$

onde h_t é o valor máximo, l_t é o valor mínimo, c_t é o valor de fechamento e o_t é o valor de abertura para o mesmo período, no caso um dia, e n o número de períodos.

Este modelo também capta os efeitos *intraday*, com a vantagem de combiná-los com os efeitos produzidos pelo fechamento do mercado.

2.2 - Modelos Preditórios

Modelos Preditórios permitem que estimemos qual será a volatilidade de uma variável aleatória para um certo horizonte de tempo, levando em conta seu comportamento passado e atribuindo diferentes pesos para amostras passadas. Estes modelos, diferentemente dos modelos históricos, geram uma estrutura a termo de volatilidades, e as previsões dependem do modelo que utilizamos.

“Exponentially Weighted Moving Average”

Este modelo pode ser entendido como um avanço em relação ao modelo tradicional de desvio padrão. Isto se verifica se levarmos em conta que o desvio padrão é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados das diferenças entre os retornos e sua média. A principal motivação que levou a este modelo é que a história recente explica melhor o comportamento de determinado ativo no momento atual do que a história passada. Desta maneira, o modelo pode ser encarado exatamente como o desvio padrão com a diferença de que agora os valores mais recentes recebem mais peso do que os valores mais antigos.

O modelo EWMA pode ser escrito, segundo Pindyck & Rubinfeld²⁴ como:

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (1-\lambda)^j \cdot (y_{t-j} - \bar{y})^2$$

com $0 \leq \lambda \leq 1$, onde λ é chamado de fator de decaimento ou de amortização.

Podemos reescrever a última equação, considerando que o retorno diário médio vale zero, como:

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda \cdot y_t^2 + \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot y_{t-1}^2 + \lambda \cdot (1-\lambda)^2 \cdot y_{t-2}^2 + \dots$$

Sabemos que quando calculamos o desvio padrão, todos os dados são ponderados por $1/(n-1)$. Já no modelo EWMA, cada dado é ponderado por $\lambda \cdot (1-\lambda)^j$, com j valendo de 0 a infinito e crescendo à medida que o dado vai se tornando “antigo”, ou que novos dados são inseridos no modelo. Estes pesos se comportam de maneira exponencial, daí o nome do modelo.

Este modelo possui algumas propriedades, sendo a mais interessante a que sua estimativa para qualquer horizonte de tempo, a partir dos dados atuais, é a mesma. Ou seja, independentemente do prazo, a previsão obtida pelo modelo é a mesma.

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda \cdot \sigma_t^2 + (1-\lambda) \cdot y_t^2$$

Como o valor estimado para qualquer prazo é igual, podemos dizer que o modelo enfatiza demais este fato. Isto porque desta maneira uma volatilidade estimada em um período de alta volatilidade, para um prazo

qualquer, acaba sendo alta, desconsiderando o fato de que a volatilidade tende à média.

O modelo tem um único parâmetro a ser estimado: λ . A escolha deste parâmetro é realizada *ad hoc*, pois não há nenhum procedimento estatístico que gere uma estimativa para o seu valor a partir de dados passados.

No entanto, o *RiskMetrics*^{*} sugere um método para estimar o valor de λ . O procedimento consiste em uma minimização do erro de previsão um passo a frente entre os valores dos retornos e das variâncias. Assim temos:

$$\text{Minimizando} \quad RMSE(\lambda) = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (y_{t+1}^2 - \sigma_{t+1}^2(\lambda))^2}{T}},$$

admitindo que $0 \leq \lambda \leq 1$, achamos o λ ótimo.

Família ARCH

A diferença entre os modelos anteriores e os modelos da família ARCH derivados por Engle⁷ é que enquanto os primeiros tratam a volatilidade como sendo constante ao longo do tempo em que estaremos estimando, os últimos permitem que a volatilidade condicional varie ao longo do tempo. Os modelos da família ARCH tem a seguinte forma:

$$y_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot y_{t-i}^2$$

com

$$p \geq 0$$

$$\alpha_i \geq 0 \text{ e } \alpha_0 > 0$$

Estas condições asseguram que σ_t^2 seja maior que zero, para todo t .

Ou seja, os modelos ARCH têm como motivação o fato que a variância condicional pode ser estimada a partir dos quadrados dos retornos observados no passado. A equação acima descreve o que chamamos de ARCH (p) pois para estimarmos a variância em t utilizamos informações de $t-1, t-2, \dots, t-p$. Chamamos de ARCH (∞) o modelo que utiliza todos os dados passados para estimar a volatilidade condicional atual.

Consideraremos aqui o modelo ARCH (1), do qual podemos mais facilmente retirar as propriedades sobre este modelo. O modelo pode ser escrito como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y_{t-1}^2$$

Sabendo que $y_t = \varepsilon_t \cdot \sigma_t$, segue então que:

$$E(y_t) = E(\varepsilon_t \cdot \sigma_t) = E(\varepsilon_t) \cdot E(\sigma_t) = 0$$

Sabemos também que, de acordo com Harvey¹³, a variância não condicional é dada por:

^{*} *RiskMetrics* é o texto publicado pelo banco JPMorgan descrevendo sua metodologia de risco.

$$E(y_t^2) = E(\sigma_t^2) = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1)}$$

Por Harvey¹³, temos também que os momentos ímpares são todos nulos e que:

$$E(y_t^4) = 3 \cdot E(\sigma_t^4) = 3 \cdot \frac{\alpha_0^2 \cdot (1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1) \cdot (1 - 3 \cdot \alpha_1^2)} \quad \text{para} \\ 3 \cdot \alpha_1^2 < 1.$$

Temos então:

a. A curtose de y_t vale, se $3 \cdot \alpha_1^2 < 1$:

$$\kappa = 3 \cdot \frac{1 - \alpha_1^2}{(1 - 3 \cdot \alpha_1^2)}.$$

Desta maneira, se $\alpha_1 \neq 0$, y_t possui caudas pesadas.

b. Temos que y_t é um ruído branco e que y_t^2 segue um processo AR (1), pois podemos re-escrever a equação do modelo como:

$$y_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y_{t-1}^2 + \sigma_t^2 \cdot (\varepsilon_t^2 - 1)$$

onde o último termo tem média nula e variância constante, se tratando portanto de um ruído branco.

Arch Generalizado

O principal avanço do Garch em relação ao Arch é a incorporação das variâncias antigas na estimativa da nova variância, funcionando como uma espécie de mecanismo adaptativo.

Seja ε_t um processo discreto estocástico, e I_t o conjunto de informações disponíveis até o instante t . O processo Garch (p,q) é dado por:

$$y_t = \varepsilon_t \cdot \sigma_t \text{ e}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \cdot \sigma_{t-i}^2$$

com:

$$p_i \geq 0 \text{ e } q_i > 0$$

$$\alpha_i, \beta_i \geq 0 \text{ e } \alpha_0 > 0.$$

A seguir mostraremos os três modelos da família Garch utilizados neste trabalho.

Garch (1,1)

Começaremos deduzindo o Garch (1,1) por ser o mais comumente utilizado. O modelo pode ser escrito, a partir de (3.12), como:

$$y_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot \sigma_{t-1}^2$$

Como podemos perceber, este modelo estima a volatilidade a partir da volatilidade passada e do último retorno obtido pelo ativo.

Podemos reescrever a última equação de modo que tenhamos:

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \beta_1} + \alpha_1 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \beta_1^{j-1} \cdot y_{t-j}^2$$

Através desta equação, podemos notar que o Garch (1,1) está em compasso com o modelo Arch (∞), pois utiliza todas as amostras passadas para estimar a variância condicional, com a restrição de que os pesos atribuídos aos retornos passados obedecem uma estrutura geométrica.

De Bollerslev (1986)⁴, sabemos que:

a. Se $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ o processo será estacionário no sentido amplo.

b. Se $3 \cdot \alpha_1^2 + 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 + \beta_1^2 < 1$, temos que o segundo e o quarto momento valem, respectivamente:

$$E(y_t^2) = \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_1 - \beta_1)} \quad \text{e}$$

$$E(y_t^4) = \frac{3 \cdot \alpha_0 \cdot (1 + \alpha_1 + \beta_1)}{(1 - \alpha_1 - \beta_1) \cdot (1 - \beta_1^2 - 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 - 3 \cdot \alpha_1^2)}.$$

Desta maneira, temos que a curtose vale

$$\kappa = \frac{3 \cdot (1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2)}{(1 - \beta_1^2 - 2 \cdot \alpha_1 \cdot \beta_1 - 3 \cdot \alpha_1^2)}.$$

Os parâmetros deste modelo que precisam ser identificados são α_0 , α_1 e β_1 . Estes parâmetros serão estimados através do uso de sua função de log máximo verossimilhança sem constantes, que vale:

Parâmetros $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$

$$L_T(\theta) = -\frac{1}{2 \cdot T} \sum_{t=1}^T \left(\log \sigma_t^2(\theta) + \frac{y_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} \right)$$

A maximização desta função, como já citado, leva ao descobrimento dos parâmetros θ . O algoritmo de Berndt, Hall, Hall & Hausman leva a maximização desta função, como citado em Bollerslev (1986)⁵.

IGarch – Garch Integrado

Outro modelo que deriva do Garch (p,q) é o IGarch. Este último pode ser descrito, a partir do Garch (1,1), em Harvey¹³, como se segue:

$$y_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + (1 - \lambda) \cdot y_{t-1}^2 + \lambda \cdot \sigma_{t-1}^2 \text{ com } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Ou seja, é como se considerássemos que $\alpha_1 + \beta_1 = 1$.

Desta maneira, o processo deixa de ser fracamente estacionário e não podemos deduzir quais são seus momentos não condicionais, sendo que a sua variância não condicional agora não é mais finita.

Neste modelo, a informação disponível é utilizada na previsão de volatilidade para qualquer horizonte de tempo. Esta propriedade é importante para

modelarmos séries financeiras cuja volatilidade apresenta persistência após algum choque.

De acordo com Nelson (1990)²¹, é estritamente necessário que α_0 seja positivo, pois este modelo tem a característica de que não importa qual é o valor inicial de σ_t , os valores previstos para a volatilidade tendem a zero quase que certamente.

Os parâmetros deste modelo que precisam ser identificados são α_0 e λ . Estes parâmetros serão estimados através do uso de sua função de log máximo verossimilhança, que vale, de Harvey¹³:

Parâmetros $\theta = (\alpha_0, \lambda)$

$$\log L_T(\theta) = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\log(\alpha_0 + (1-\lambda) \cdot y_{t-1}^2) + \frac{y_t^2}{\alpha_0 + (1-\lambda) \cdot y_{t-1}^2} \right)$$

EGarch - Garch Exponencial

Este modelo é derivado da família Arch. Criado por Nelson (1991)²¹, este modelo tem como principal característica a vantagem de que os parâmetros θ podem ser negativos, o que cria mais possibilidades ao modelo. Isto se deve do fato de que agora modelamos o logaritmo da variância, e não mais ela mesma.

O EGarch (1,1) é escrito como:

$$\log \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \cdot \log \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot z_{t-1}$$

$$\text{onde } z_t = \left[\varepsilon_t - (2/\pi)^{1/2} \right] + \delta \cdot \varepsilon_t$$

$$\text{e } \varepsilon_t \sim \text{NID}(0,1)$$

Este modelo atende a algumas “falhas” do Garch convencional pois responde assimetricamente a choques nos retornos (Efeito Alavancagem).

Volatilidade Implícita

Considere a fórmula para o apreamento de opções deduzida por Black & Scholes, dada por Hull¹⁵ como:

$$c(S, X, r, T, t, \sigma) = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) \text{ com}$$

$$d_1 = \frac{\log(S/X) + (r + \sigma^2/2) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} \quad \text{e}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/X) + (r - \sigma^2/2) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}$$

onde c é preço da opção, S é o valor do ativo-base da opção, X é o preço de exercício da opção, T é o dia de exercício, t é o dia atual, r é a taxa de juros livre de risco até o dia T , σ é a volatilidade do ativo-base e $N(\cdot)$ é a função densidade de probabilidade acumulada para uma variável com média 0 e variância 1.

Utilizando a fórmula de Black & Scholes e considerando o preço de mercado da opção, podemos

obter um valor para a volatilidade σ , já que para cada σ só existe um valor de mercado para a opção

Este método para estimar a volatilidade produz o que é chamada de volatilidade implícita. E como, por construção, foram utilizadas informações vindas do mercado financeiro, podemos dizer que a volatilidade implícita fornece a estimativa do mesmo sobre a variabilidade de um determinado ativo. Por isso são utilizadas para monitorar a opinião do mercado sobre a volatilidade do mesmo.

O mercado financeiro negocia opções sobre um mesmo ativo-base e com mesmo vencimento, para vários preços de exercício. A relação definida pela divisão entre o valor do ativo-base (S) e o preço de exercício da opção (X), dada por S/X , fornece uma relação conhecida como *moneyness*, ou seja, o quão dentro do dinheiro está a opção.

Se $S/X < 1$, diz-se que a opção está fora do dinheiro, já se $S/X = 1$ a opção é dita no dinheiro e se $S/X > 1$ a opção é considerada dentro do dinheiro.

A volatilidade σ será obtida neste trabalho através do uso da fórmula de Black & Scholes, definida acima, para as opções que estiverem sendo negociadas cujo valor de exercício é próximo do valor do ativo-base, ou seja, para opções no dinheiro.

2.3 - Modelos de Volatilidade Estocástica

Neste capítulo trataremos de modelos da família de volatilidade estocástica. Descreveremos três modelos, suas propriedades principais, e como são estimados seus parâmetros. A seguir serão deduzidas as equações do filtro de Kalman, utilizadas na estimação dos parâmetros.

A família de modelos de volatilidade estocástica é caracterizada por modelos em que a variância depende de componentes não-observáveis. Como veremos, estes modelos tem propriedades estatísticas semelhantes à família Arch.

Volatilidade Estocástica com AR(1)

O modelo univariado mais comumente observado é descrito abaixo:

$$y_t = \varepsilon_t \cdot \exp\left\{\frac{h_t}{2}\right\} \text{ onde } \sigma_t = \exp\left\{\frac{h_t}{2}\right\},$$

$$h_t = \gamma + \phi \cdot h_{t-1} + \eta_t$$

onde:

y_t é a variável de interesse, ou seja, o retorno financeiro

ε_t é um ruído branco com média zero e variância σ_ε^2

η_t é um ruído branco com média zero e variância σ_η^2

O ruído η_t pode ou não ser correlacionado com ε_t .

Este modelo apresenta as seguintes propriedades descritas por Harvey¹³:

a. Fazendo com que ϕ seja menor que um em módulo, sabemos que o processo de h_t é estritamente estacionário.

b. Se η_t é gaussiano então h_t é um processo gaussiano autoregressivo com média e variância dadas por:

$$\mu_h = \frac{\gamma}{1-\phi}$$

$$\sigma_h^2 = \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}$$

c. A curtose de y_t é dada por $3\exp\{\sigma_{h_2}\}$. Esta curtose é maior que a curtose de uma distribuição normal padrão.

d. Como ε_t é um processo de ruído branco, fazendo com que η_t e ε_t sejam independentes e considerando também que ϕ é menor que um em módulo, teremos que y_t é um ruído branco.

Considerando agora a equação do modelo, elevando todos os termos ao quadrado e aplicando o logaritmo nos dois membros, teremos:

$$\log(y_t^2) = E[\log(\varepsilon_t^2)] + h_t + \xi_t \quad h_t = \gamma + \phi \cdot h_{t-1} + \eta_t$$

onde:

$$\xi_t = \log(\varepsilon_t^2) - E[\log(\varepsilon_t^2)]$$

ξ_t é um ruído não gaussiano, e suas propriedades estatísticas dependem de ε_t . Podemos notar que o processo y_t é equivalente à soma de um processo ARMA (1,1) com um ruído não gaussiano.

Se adotarmos que ε_t tem distribuição normal com média zero e variância unitária, como pode ser comumente visto, sabemos por Abramowitz e Stegun (1970)¹ que a média e a variância de $\ln(\varepsilon_t^2)$ valem respectivamente -1.27 e $\pi^2/2$.

O modelo de volatilidade estocástica pode ser reescrito como:

$$\log(y_t^2) = -1.27 + h_t + \xi_t$$

$$h_t = \gamma + \phi \cdot h_{t-1} + \eta_t$$

$$\sigma_{\xi_t}^2 \text{ vale } \pi^2/2.$$

Este modelo está escrito na forma de variáveis de estado, e necessitamos ainda estimarmos os parâmetros γ , ϕ e σ_η^2 . Para procedermos com a estimação dos parâmetros citados podemos tratar o ruído ξ_t como sendo NID $(0, \pi^2/2)$, por aproximação.

O Filtro de Kalman pode ser utilizado para a obtenção do erro de previsão necessário para o cálculo da função de máximo verossimilhança, que deve ser maximizada para a obtenção dos parâmetros, como veremos adiante.

Uso do Filtro de Kalman na determinação dos parâmetros

No modelo de volatilidade estocástica definido anteriormente, temos:

$$\log(y_t^2) = -1.27 + h_t + \xi_t$$

$$h_t = \gamma + \phi \cdot h_{t-1} + \eta_t$$

onde estamos considerando $\{\xi_t\} \sim \text{NID}(0, \pi^2/2)$.

Os parâmetros a serem definidos neste modelo são:

$$\theta = (\gamma, \phi, \sigma_\eta^2)$$

Podemos simplificar o modelo, já que de Ruiz²⁶ sabemos que a estimação dos parâmetros não é alterada quando retiramos a média do processo. Assim,

fazendo $y_t^* = \log(y_t^2) + 1.27 - \frac{\gamma}{(1-\phi)}$ temos:

$$y_t^* = z_t + \xi_t$$

$$z_t = \phi \cdot z_{t-1} + \eta_t$$

A matriz de covariância dos erros, Ω , vale:

$$\Omega = \text{var} \begin{pmatrix} \xi_t \\ \eta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{2} & 0 \\ 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}$$

Equacionamento do Filtro de Kalman para este modelo

A equação de atualização do estado z_t é escrita como:

$${}_t\hat{z}_t = {}_{t-1}\hat{z}_t + \frac{{}_{t-1}\Sigma_t}{\left({}_{t-1}\Sigma_t + \frac{\pi^2}{2}\right)} \cdot (y_t - {}_{t-1}\hat{z}_t)$$

A equação de atualização da variância do erro de previsão do estado z_t , ${}_t\Sigma_t = \text{var}(z_t - {}_t\hat{z}_t)$, vale:

$${}_t\Sigma_t = \frac{\frac{\pi^2}{2}}{\left({}_{t-1}\Sigma_t + \frac{\pi^2}{2}\right)} {}_{t-1}\Sigma_t$$

A equação de previsão para os estados ${}_{t+1}z_{t+1}$ é expressa como:

$${}_t\hat{z}_{t+1} = \phi \cdot {}_t\hat{z}_t$$

A equação de previsão da variância do erro de z_{t+1} vale:

$${}_t\Sigma_{t+1} = \phi^2 \cdot {}_t\Sigma_t + \sigma_\eta^2$$

A equação de previsão do valor y_{t+1}^* pode ser escrita como:

^{*} Lembramos que $\xi_t = \log(\varepsilon_t^2) - E[\log(\varepsilon_t^2)]$, e que não é normal.

$${}_t\hat{y}_{t+1}^* = {}_t\hat{z}_{t+1}$$

A equação de previsão do erro de previsão de y_{t+1} , ${}_tM_{t+h} = \text{var}(y_{t+h}^* - {}_t\hat{y}_{t+h}^*)$, vale:

$${}_tM_{t+1} = {}_t\Sigma_{t+1} + \frac{\pi^2}{2}$$

Para inicializarmos o filtro devemos estimar as variáveis ${}_{-1}\hat{z}_0$ e ${}_{-1}\Sigma_0$.

Equações do Filtro de Kalman para previsão

Podemos escrever as equações acima de outra maneira, visando minimizar o esforço computacional, dado que o objetivo é somente realizar as previsões dos valores de ${}_t\hat{z}_{t+1}$ e ${}_t\Sigma_{t+1}$.

As equações re-escritas ficam assim:

$${}_t\hat{z}_{t+1} = \phi {}_{t-1}\hat{z}_t + \phi \cdot \frac{{}_{t-1}\Sigma_t}{({}_{t-1}\Sigma_t + \frac{\pi^2}{2})} \cdot (y_t - {}_{t-1}\hat{z}_t) \quad \text{e}$$

$${}_t\Sigma_{t+1} = \phi^2 \cdot \frac{\frac{\pi^2}{2} \cdot {}_{t-1}\Sigma_t}{({}_{t-1}\Sigma_t + \frac{\pi^2}{2})} + \sigma_\eta^2$$

Com estas equações, podemos calcular os valores do erro de previsão de ${}_t y_{t+1}^*$. Este erro vale $\tilde{y}_t^* = {}_{t-1}y_t^* - y_t^*$.

Estimação dos parâmetros θ do modelo - Quase Máximo Verossimilhança (QML)

Seja θ o vetor de parâmetros desconhecidos que desejamos identificar. A função de máxima verossimilhança do modelo de variáveis de estados é dada a partir da densidade dos valores observáveis de $y_1, y_2, y_3, \dots, y_T$.

$$l(y; \theta) = f(y_0; \theta) f(y_1 | y_0; \theta) \dots f(y_T | y_0, \dots, y_{T-1}; \theta)$$

Assumindo que $(\varepsilon_t, \eta_t)'$ tem distribuição normal, as funções de densidade de probabilidade acima também são normais. A função $f(y_T | y_0, \dots, y_{T-1}; \theta)$ tem média ${}_{t-1}\hat{y}_t$ que depende de θ , e variância ${}_{t-1}M_t$, também variando com θ .

Portanto, para cada θ podemos calcular ${}_{t-1}\hat{y}_t$ e ${}_{t-1}M_t$ através do Filtro de Kalman.

Assim, para cada θ podemos escrever a função de máximo verossimilhança valendo:

$$L_T = -\frac{T}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T \log \det({}_{t-1}M_t(\theta)) -$$

$$\frac{1}{2} \sum_{t=0}^T (y_t - {}_{t-1}\hat{y}_t(\theta))' ({}_{t-1}M_t(\theta))^{-1} (y_t - {}_{t-1}\hat{y}_t(\theta))$$

No algoritmo de otimização de L_T , utilizaremos o Filtro de Kalman para calcularmos $\hat{y}_t(\theta)$ e ${}_{t-1}M_t(\theta)$. Assim L_T deve ser maximizada em θ com as seguintes restrições: $|\phi| < 1$ e $\sigma_\eta^2 \geq 0$.

Temos, considerando θ como sendo o vetor de parâmetros a serem estimados, segundo Dunsmuir (1979), que:

$$\sqrt{T}(\theta - \hat{\theta}) \xrightarrow{d} N(0, C(\theta))$$

onde T é o tamanho da amostra (d representa convergência em distribuição).

Ou seja, a distribuição assintótica dos parâmetros tende a uma distribuição normal com média 0 e variância dada por $C(\theta)$, segundo Dunsmuir (1979).

$C(\theta) = 2 \cdot A^{-1} + A^{-1} B \cdot A^{-1}$, com A e B envolvendo integrais de funções derivadas da função geradora espectral do processo em relação a θ e um coeficiente de curtose (veja Ruiz²⁶ para valores exatos).

Estimação da volatilidade

A volatilidade estimada será obtida através de ${}_t\hat{z}_{t+1}$. Assim teremos que:

$$\sigma_{t+1} = \exp\left(\frac{{}_t\hat{z}_{t+1}}{2}\right)$$

Deste modo poderemos estimar as volatilidades e compará-las com os outros modelos.

Volatilidade Estocástica com Random Walk

Trataremos ainda do caso em que consideraremos γ valendo 0 e ϕ valendo 1. Neste caso, o processo pode ser entendido como sendo um *random walk* mais um ruído (ξ_t). Assumindo novamente que ε_t tenha distribuição normal $N(0,1)$, teremos as seguintes equações para descrever o processo:

$$\log(y_t^2) = -1.27 + h_t + \xi_t$$

$$h_t = h_{t-1} + \eta_t$$

em que σ_ξ^2 vale $\pi^2/2$.

Neste caso, podemos notar que em vez de três parâmetros, como no modelo anterior, temos apenas um, que é σ_η^2 . Podemos supor ξ_t como sendo NID $(0, \pi^2/2)$ e desta maneira estimamos através de QML o parâmetro necessário.

Volatilidade Estocástica com Ruído t-Student

Outro modelo desta família que será tratado é o seguinte: considerando o ruído ε_t como tendo distribuição t-Student da forma:

$$\varepsilon_t = \zeta_t / \kappa_t^{1/2}$$

onde ζ_t segue a distribuição normal e κ_t é independente de ζ_t e tem distribuição χ^2 com v graus de liberdade.

Desta maneira, sabemos por Abramowitz e Stegun (1970)¹ que a média e a variância de $\log(\varepsilon_t^2)$ valem respectivamente $-1.27 - \psi(v/2) + \log(v/2)$ e $\pi^2/2 + \psi'(v/2)$, onde $\psi(\cdot)$ é chamada de função Digamma e a função $\psi'(\cdot)$ é chamada de Trigamma.

Desta maneira podemos impor que σ_ε^2 seja maior que $\pi^2/2$. Assim o modelo terá uma distribuição com caudas pesadas, o que é desejável.

O modelo escrito sob a forma de equação de estados pode ser visto abaixo:

$$\begin{aligned} \log(v_t^2) &= -1.27 - \psi(v/2) + \log(v/2) + h_t + \xi_t \\ h_t &= \gamma + \phi \cdot h_{t-1} + \eta_t \end{aligned}$$

Desta maneira, necessitamos estimar os parâmetros γ , ϕ , σ_η^2 e σ_ε^2 , já que não conhecemos v . Se considerarmos v conhecido, precisamos estimar somente γ , ϕ e σ_η^2 . Estimaremos através de QML estes parâmetros supondo novamente o ruído ξ_t como sendo NID $(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

3 – Simulações Numéricas

Neste item explicitaremos quais séries serão utilizadas na simulação do cálculo de volatilidade utilizando os modelos vistos nos capítulos anteriores. Também falaremos um pouco sobre como realizamos as simulações para cada uma.

Séries Temporais

Serão realizadas simulações com cotações obtidas do Mercado Aberto, Bolsa de Valores e Mercado de Câmbio. Os dados são mais especificamente:

- Taxa de Juros Pré-Fixados para o prazo de 6 meses – A Taxa de Juros é negociada no mercado financeiro através de títulos de renda fixa, mercados futuros e derivativos. Foi obtido o valor de fechamento da Taxa para o prazo de seis meses para o período compreendido entre 10/12/97 e 19/05/2000. A fonte destes dados foi a BM&F – Bolsa de Mercadorias e Futuros – que divulga diariamente uma estrutura a termo de juros utilizada para o cálculo de margens de swap.
- Preço da Ação Telebrás PN (que a partir da privatização se tornou o Recibo de Telebrás PN, código RCTB41) – Esta ação é negociada na Bovespa – Bolsa de Valores de São Paulo – em pregão aberto. Foi obtida a cotação dos valores de abertura, máximo, mínimo e fechamento para o período compreendido entre 02/01/1997 e 19/05/2000. A fonte destes dados foi a Economatica.
- Taxa de Câmbio entre Real e Dólar – A compra e venda de dólares é realizada por corretoras habilitadas para exercerem tal função e que registram os valores das transações no SISBACEN – Sistema do Banco Central. Foi obtida a cotação dos valores de abertura, máximo,

mínimo e fechamento para o período compreendido entre 02/01/1997 e 19/05/2000. A fonte destes dados foi a Agência Estado

Simulações

As simulações foram realizadas para as séries apresentadas no item anterior. No entanto, devido a inexistência em determinadas épocas de alguns produtos financeiros, a sua baixa liquidez ou a falta de fonte de dados, algumas simulações não puderam ser executadas.

Abaixo detalhamos como foi realizada a simulação para cada série e modelo.

- Desvio Padrão, “High-Low” e “Open-High-Low-Close” – utilizamos as fórmulas apresentadas anteriormente e simulamos para várias janelas: 21, 42, 63 e 126 amostras. No entanto, os modelos “High-Low” e “Open-High-Low-Close” não puderam ser utilizados com a série de taxa de juros pois não há fonte de dados disponível para as taxas de abertura, máxima e mínima.
- EWMA – Exponentially Weighted Moving Average – utilizamos as fórmulas apresentadas e simulamos para vários alisamentos: $\lambda=0.94$, $\lambda=0.90$ e λ otimizado.
- Garch (1,1), EGarch(1,1), IGarch(1,1), VE-AR(1), VE-Random Walk e VE-t-Student – utilizamos as fórmulas apresentadas e identificamos os parâmetros diariamente, como se estivéssemos naquele determinado dia, utilizando todas as observações anteriores a este dia. No caso dos três últimos modelos, utilizamos ainda um segundo critério que consiste em utilizarmos sempre somente as 63 últimas amostras.
- Volatilidade Implícita – utilizamos as opções de compra de Recibo de Telebrás de 5 de julho de 1999 a 14 de abril de 2000 para identificar a volatilidade implícita de Recibo de Telebrás. Não pudemos identificar as volatilidades implícitas para a taxa de juros e taxa de câmbio pois o mercado de opção de juros (opção sobre IDI) é muito pequeno e possui baixa liquidez, assim como o mercado de opção de dólar.

As simulações foram realizadas sobre o valor de fechamento das séries, com exceção do caso dos modelos “High-Low” e “Open-High-Low-Close” que necessitam dos demais valores.

Foram utilizados os *softwares* Matlab version 5.3.0 e Eviews version 3.0 para nos auxiliar nestas otimizações dependendo do modelo em teste.

Mais especificamente podemos dizer que:

- nos modelos Garch (1,1) e IGarch (1,1) foi utilizado o programa Matlab, utilizando a função *fmin* para realizarmos as otimizações com restrições;
- nos demais modelos utilizamos o pacote econométrico Eviews, em que foram escritos códigos para estimarmos diariamente todos os parâmetros de interesse, utilizando as funções de otimização já existentes no mesmo, com o algoritmo BHHH.

3.1 – Discussões sobre os Resultados

Neste item primeiramente apresentaremos os resultados obtidos para cada série e uma discussão qualitativa sobre os mesmos. Em segundo lugar serão expostas algumas metodologias quantitativas para avaliarmos os resultados obtidos, seus pontos fortes e fracos. Por fim, os modelos serão comparados de acordo com as metodologias julgadas convenientes.

Resultados

Apresentaremos os resultados obtidos a partir das simulações realizadas.

Taxa de Juros

Realizamos as simulações especificadas e abaixo apresentamos os resultados obtidos. Nestes gráficos podemos observar as volatilidades obtidas para os seguintes modelos:

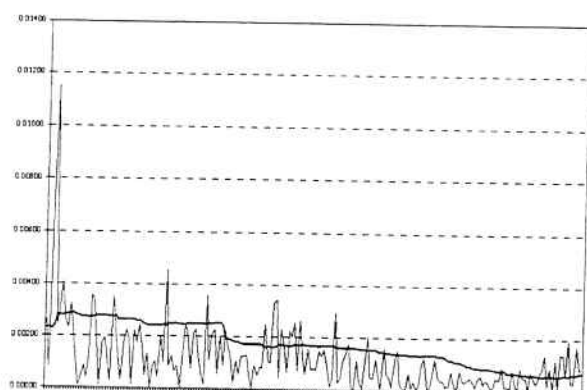


Figura 1: Módulo dos Retornos da Taxa de Juros e as estimativas de volatilidade utilizando Desvio Padrão com janela de 63 dias úteis

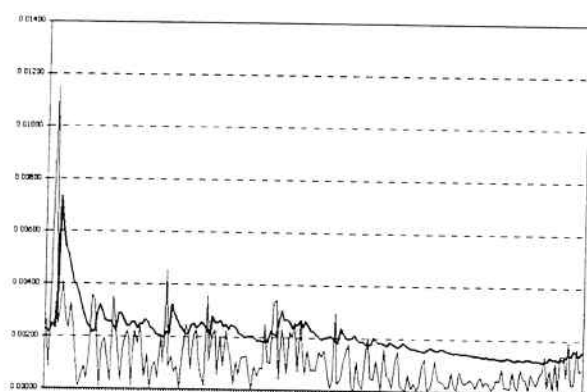


Figura 2: Módulo dos Retornos da Taxa de Juros e as estimativas de volatilidade utilizando utilizando Garch(1,1)

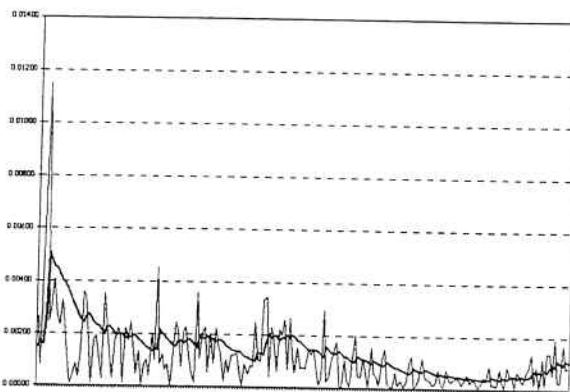


Figura 3: Módulo dos Retornos da Taxa de Juros e as estimativas de volatilidade utilizando EWMA otimizado

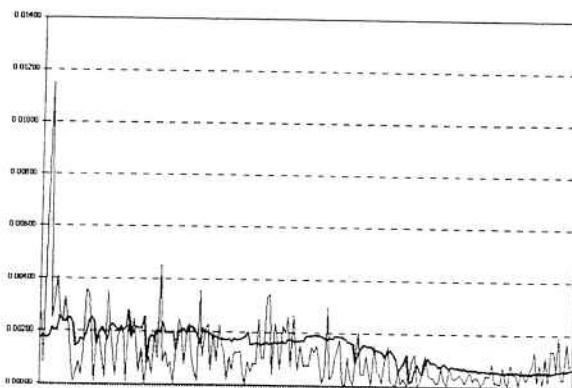


Figura 4: Módulo dos Retornos da Taxa de Juros e as estimativas de volatilidade utilizando VE-AR(1)

Podemos observar que as volatilidades estimadas com os modelos Garch e EWMA, no início do gráfico, após um retorno alto, tem seus valores aumentados rapidamente, ou seja, crescem com tempo de resposta baixo.

Também podemos observar que, no fim do gráfico, quando os retornos diminuem de amplitude, a volatilidade estimada com o modelo Garch fica acima das demais. Isto se deve provavelmente ao fato de que a volatilidade estimada com este modelo tende à volatilidade não-condicional e que como a mesma foi estimada considerando toda a série de retornos, e no período passado houve retornos elevados, a mesma se manteve alta.

A volatilidade obtida com o modelo VE-AR(1), como podemos observar, oscila sobre um nível praticamente constante, não sofrendo saltos como os modelos EWMA e Garch. Podemos observar que com o aumento de volatilidade do mercado, no fim do gráfico, o aumento da volatilidade por este modelo estimado é mais lento que os dois citados anteriormente.

A seguir apresentamos os resultados obtidos graficamente. Podemos observar as volatilidades obtidas para os seguintes modelos:

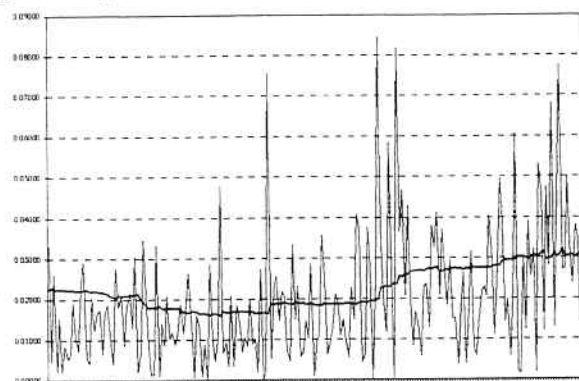


Figura 5: Módulo dos Retornos do Preço do Recibo de Telebrás PN e as estimativas de volatilidade utilizando Desvio Padrão com janela de 63 dias úteis

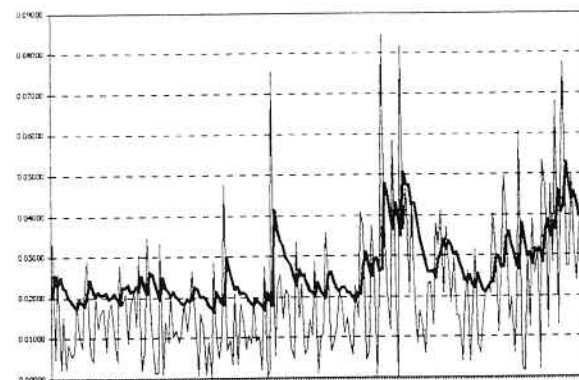


Figura 6: Módulo dos Retornos do Preço do Recibo de Telebrás PN e as estimativas de volatilidade utilizando Garch(1,1)

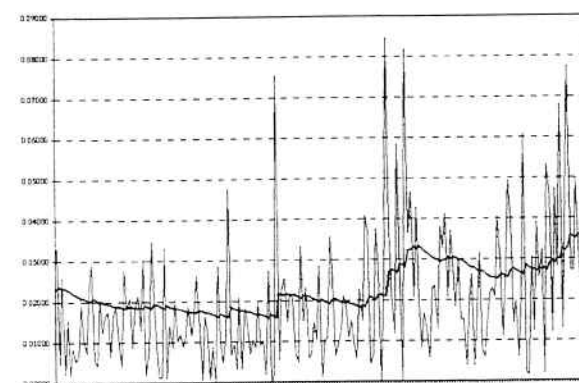


Figura 7: Módulo dos Retornos do Preço do Recibo de Telebrás PN e as estimativas de volatilidade utilizando EWMA otimizado

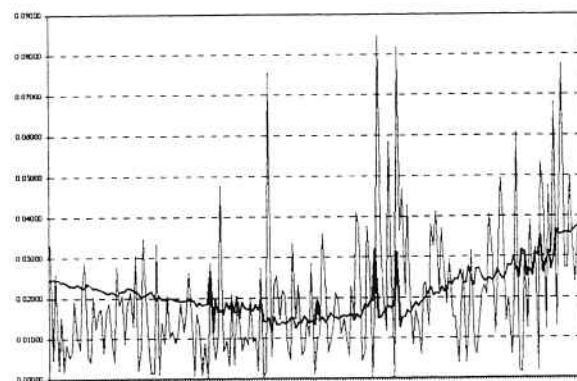


Figura 8: Módulo dos Retornos do Preço do Recibo de Telebrás PN e as estimativas de volatilidade utilizando VE-AR(1)

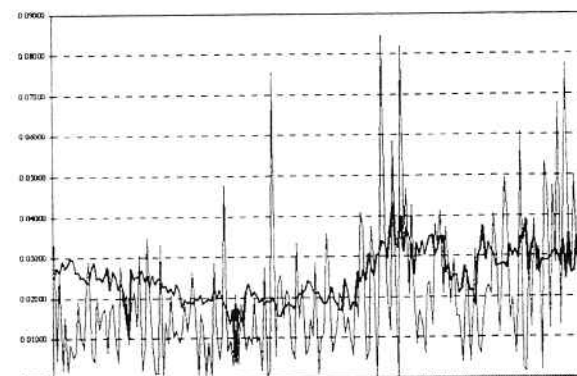


Figura 9: Módulo dos Retornos do Preço do Recibo de Telebrás PN e as estimativas de volatilidade utilizando o método de volatilidade implícita

Novamente, podemos observar que os modelos Garch e EWMA respondem rapidamente aos aumentos de amplitude dos retornos.

O modelo VE-AR(1) novamente não respondeu rapidamente a mudanças no mercado, porém podemos perceber que no fim do gráfico ele reage ao aumento de volatilidade com tempo de resposta maior que o Garch.

Cabe também comentarmos o modelo de volatilidade implícita. A volatilidade dada por este modelo teve dois saltos para baixo no início do gráfico, provavelmente decorrentes da proximidade do exercício de opções. Podemos notar, também, que na média a volatilidade implícita se mantém nos níveis da volatilidade estimada pelo Garch. No fim do gráfico a volatilidade sobe rapidamente, como os modelos Garch e EWMA.

A seguir apresentamos os resultados obtidos graficamente. Podemos observar as volatilidades obtidas para os seguintes modelos:

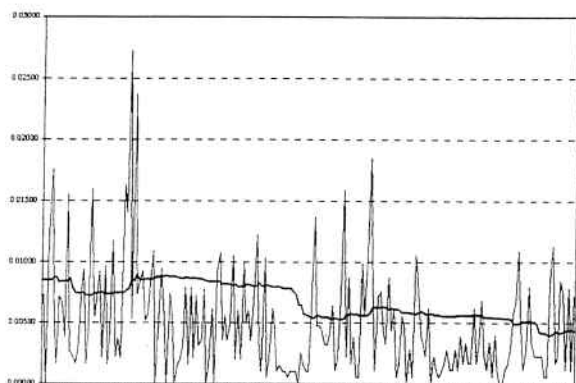


Figura 10: Módulo dos Retornos da Taxa de Câmbio entre Real e Dólar e as estimativas de volatilidade utilizando Desvio Padrão com janela de 63 dias úteis

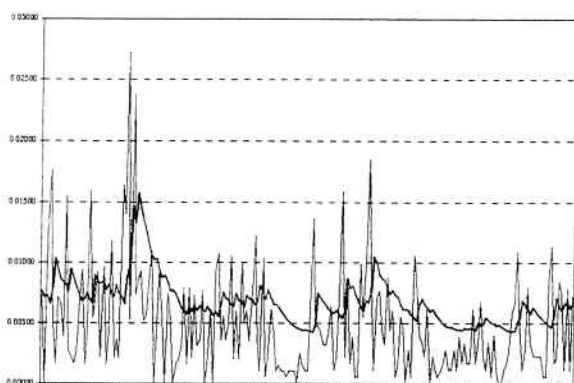


Figura 11: Módulo dos Retornos da Taxa de Câmbio entre Real e Dólar e as estimativas de volatilidade utilizando Garch(1,1)

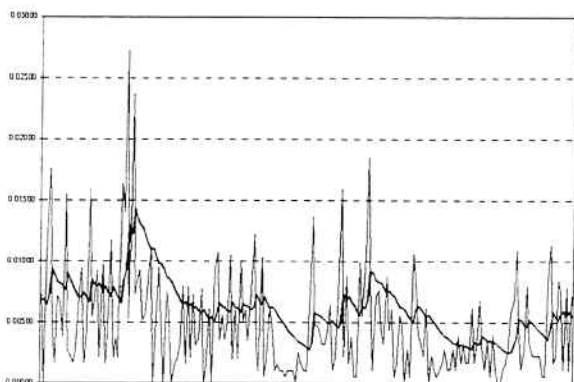


Figura 12: Módulo dos Retornos da Taxa de Câmbio entre Real e Dólar e as estimativas de volatilidade utilizando EWMA otimizado

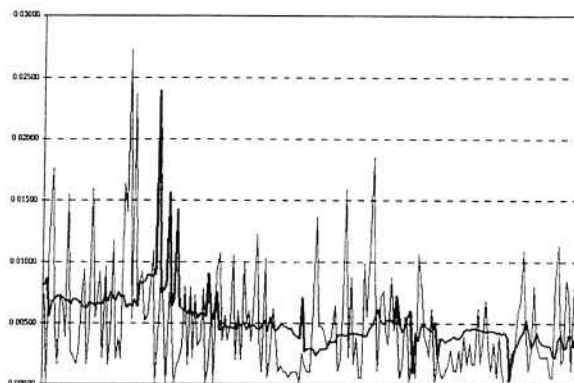


Figura 13: Módulo dos Retornos da Taxa de Câmbio entre Real e Dólar e as estimativas de volatilidade utilizando VE-AR(1)

Neste período, a taxa de câmbio se encontra em regime livre.

Os modelos Garch e EWMA tiveram comportamentos bastante semelhantes.

Neste caso, o modelo VE-AR(1) teve comportamento mais similar aos outros dois, porém oscilou muito, dando picos de volatilidade e logo após retornando ao nível anterior.

Metodologias para avaliação

Na literatura podemos encontrar alguns estudos que envolvem séries temporais e que tentam comparar diferentes modelos. Entre eles podemos citar os estudos de Boudoukh⁶, Alexander² e Kroner¹⁷ para o mercado externo e Herencia¹⁴ e Valls²⁸ realizados sobre o mercado local.

Cada trabalho utiliza metodologias diferentes para comparar os resultados obtidos. A seguir apresentaremos algumas possibilidades.

a. ME (*Mean Error*) – média do erro de previsão.

$$ME = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n (\hat{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2)$$

b. MAE (*Mean Absolute Error*) – média do erro de previsão absoluto.

$$MAE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n |\hat{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2|$$

c. RMSE (*Root Mean Square Error*) – raiz quadrada da média do erro de previsão ao quadrado.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (\hat{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2)^2}{n}}$$

d. MAPE (*Mean Absolute Percentual Error*) – média do erro de previsão percentual absoluto.

$$MAPE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n \frac{|\hat{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2|}{\sigma_t^2}$$

Em todos os modelos definidos de a. até d., temos:

$\hat{\sigma}_t$ é a volatilidade estimada pelo método em questão para a data t e σ_t é a volatilidade “verdadeira” para data t.

Portanto, necessitamos de um valor chamado de volatilidade “verdadeira”. Neste trabalho consideraremos que a volatilidade verdadeira ao quadrado equivale ao retorno ao quadrado, ou seja, $\sigma_t^2 = y_t^2$.

e. Intervalo de Confiança – Este método consiste em verificarmos se o retorno obtido ficou dentro do intervalo de confiança:

$$: P(|y_t| \leq \hat{\sigma}_t \cdot \text{fator_de_confiança}) \leq X\%$$

Com a hipótese de que os retornos têm distribuição normal, e considerando X valendo 5, temos que o fator de confiança vale 1.96 aproximadamente.

Resultados Quantitativos

Taxa de Juros

Os modelos EWMA, VE e Desvio-Padrão tiveram bons desempenhos. É interessante notar que como a série havia passado por um período anterior ao período de comparação de volatilidade elevada, os modelos que se utilizam dos retornos de toda a série para a estimação podem não ter se saído bem pois estariam superestimando em muito a volatilidade atual.

Intervalo de confiança: Os modelos Garch superaram os demais assim como o Desvio-Padrão de janela com 126 amostras.

Lembrando que tais modelos tendem à média não-condicional, e que a mesma é elevada pois o período anterior foi um período de volatilidade elevada, temos assim uma possível razão para explicar a causa de seu sucesso.

Preço do Recibo de Telebrás PN

Os modelos EWMA, VE e modelos de valores extremos tiveram bons desempenhos.

O modelo VE-Random Walk se comportou mal nestes testes. Isto se deve ao fato de oscilarem muito, dependendo dos últimos retornos.

Talvez este resultado tenha ocorrido por estarmos tratando de um mercado que sofre normalmente oscilações elevadas.

Intervalo de Confiança: novamente a família de modelos Garch se destacou. Provavelmente, isto se deve ao mesmo fato descrito anteriormente, e pode ser atestado pelo fato de que modelos com janelas se comportaram mal.

Taxa de Câmbio entre Real e Dólar

Os modelos EWMA e VE tiveram bons desempenhos novamente.

Também novamente, o destaque negativo ficou por conta do modelo VE-Random Walk que se

comportou mal nestes testes. Isto se deve ao fato de oscilarem muito, dependendo dos últimos retornos.

Intervalo de Confiança: como esta série possui um efeito peculiar de mudança de regime, provocado pela mudança do regime de câmbio no Brasil, podemos notar que novamente as séries amostrais ou com grandes janelas se saíram melhores que as demais. Percebe-se inclusive que os modelos que consideram valores extremos foram os melhores.

Novamente, a família Garch se manteve bem, nunca superando os 5% de valores fora do Intervalo de Confiança.

4 – Resultados Finais

Vimos neste trabalho modelos de previsão de volatilidade cujos resultados podem ser utilizados para estimação do risco de mercado de investimentos e também para o apreçamento de ativos financeiros.

Inicialmente, estudamos as principais propriedades dos retornos dos ativos financeiros, bem como diversos modelos utilizados para a previsão de suas volatilidades. Para cada um desses modelos de volatilidade também discutimos suas principais características.

Por fim, foi realizada uma extensa simulação numérica com o objetivo de identificarmos quais os melhores modelos para as condições adotadas e para as séries escolhidas. Definimos então quais ativos seriam alvo deste estudo e consideramos: a Taxa Pré-Fixada com prazo de 6 meses, o Recibo de Telebrás PN e a Taxa de Câmbio entre Real e Dólar. Assim testamos todos os modelos descritos, às vezes com algumas variantes, estimando diariamente seus parâmetros e suas volatilidades para cada ativo. Definimos também critérios objetivos para compararmos estes modelos.

Após uma breve discussão sobre os aspectos qualitativos comparamos os resultados utilizando os critérios definidos.

A família de modelos de Volatilidade Estocástica obteve bons resultados a partir das medidas de descolamento do retorno. Ou seja, não superestima os retornos futuros. Cabe destacar o modelo VE-t-Student.

No caso da medida de percentual de retornos fora do Intervalo de Confiança, os modelos da família Garch se comportaram de maneira superior. Cabe destacar o modelo EGarch que nos três casos se manteve entre os melhores.

Ao compararmos os modelos segundo estes dois critérios, descolamento dos retornos e pontos fora do intervalo de Confiança, esperamos ter explicitado quais modelos são os melhores em cada critério. Desta maneira, dependendo de qual o uso que dada estimativa de volatilidade terá, um ou outro modelo poderá ser utilizado de maneira mais adequada.

Podemos sugerir como um possível estudo futuro, as aplicações destes modelos na área de Operações Financeiras. Neste estudo, poderá ser discutido qual modelo gerará através de uma dada estratégia de investimentos mais lucro para o investidor.

Referências Bibliográficas

- [1] Abramowitz, M. & Stegun, N. C.. **Handbook of Mathematical functions**. New York: Dover Publications Inc., 1970.
- [2] Alexander, C. O. & Leigh, C. T.. **On the Covariance Matrices Used in the Value at Risk Models**. The Journal of Derivatives, vol 4, n 3, Spring 1997.
- [3] Alexander, C.. **The Handbook of Risk Management and Analysis**. Wiley, 1996.
- [4] Alexander, C.. **Volatility and Correlation Forecasting. The Handbook of Risk Management and Analysis**, 1994.
- [5] Bollerslev, T.. **Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity**. Journal of Econometrics, vol 31, pp 307-327, 1986.
- [6] Boudoukh, J., Richardson, M. & Whitelaw, R. F.. **Investigation of a Class of Volatility Estimators**. The Journal of Derivatives, volume 4, number 3, Spring 1997.
- [7] Engle, R. F.. **Autoregressive Conditional Heterocedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation**. Econometrica, vol. 50, n 4, July 1982.
- [8] Fernandes, M.. **Volatilidade na bolsa de Valores do Rio de Janeiro**, Anais ANPEC, 1994.
- [9] Garman, M. B. & Klass, M. J.. **On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data**. Journal of Business, vol. 53, n 1, 1980.
- [10] Gouriéroux, C. & Monfort, A. **Time Series and Dynamic Models**. Cambridge University Press, 1997.
- [11] Hamilton, J. D.. **Time Series Analysis**. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- [12] Harvey, A.; Ruiz, E. & Shepard, N.. **Multivariate Stochastic Variance Models**. Review of Economic Studies, vol 61, pp 247-264, 1994.
- [13] Harvey, A. C.. **Time Series Models**. Harvester Wheatsheaf, 1993.
- [14] Herencia, M. Z.; Valls Pereira, P. L. & Hotta, L. K.. **Filtragem e Previsão com Modelos de Volatilidade: Volatilidade Estocástica versus GARCH**, Revista Brasileira de Economia, vol. 52, n 2, pp 241-178, 1998.
- [15] Hull, J. C.. **Options, Futures and other Derivatives**. Prentice Hall, 1997.
- [16] Knight, J. & Satchell, S.. **Forecasting Volatility in the Financial Markets**. Butterworth Heinemann, 1998.
- [17] Kroner, K. F.. **Creating and Using Volatility Forecasts**. Derivatives Quarterly, Winter, 1996.
- [18] Makridakis, S. & Wheelwright, S. C.. **Forecasting Methods for Management**. John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- [19] Mandelbrot, B. & Taylor, H.. **On the distribution of stock prices differences**. Operations Research, 15:1057-1062, 1967.
- [20] Nelken, I.. **Volatility in the Capital Markets**. Glenlake Publishing Company, Ltd., 1997.
- [21] Nelson, D. B.. **Conditional Heterocedasticity in asset returns: a new approach**. Econometrica, 59, 347-370.
- [22] Papoulis, A.. **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**. McGraw Hill, Segunda Edição, 1984.
- [23] Parkinson, M.. **The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of the Return**. Journal of Business, vol 53, n 1, 1980.
- [24] Pindyck, R. S. & Rubinfeld, D. L.. **Econometric Models and Econometric Forecasts**. Irwin McGraw-Hill, 1998.
- [25] **Risk Management for Financial Institutions: Advances in Measurement and Control**. Risk Publications, 1997.
- [26] Ruiz, E.. **Quasi-maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models**. Journal of Econometrics, vol. 63, 289-306, 1994.
- [27] Taylor, S.. **Modelling Financial Time Series**. John Wiley, 1986.
- [28] Valls Pereira, P. L.; Hotta, L. K.; Souza, L. A. R. & Almeida, N. M. C. G.. **Modelos Alternativos para Extração da Volatilidade de Ativos: Um Estudo Comparativo**, Brazilian Review of Econometrics, pp 57-104, v 19, n 1, 1999.

BOLETINS TÉCNICOS - TEXTOS PUBLICADOS

- BT/PTC/9901 – Avaliação de Ergoespirômetros Segundo a Norma NBR IEC 601-1- MARIA RUTH C. R. LEITE, JOSÉ CARLOS TEIXEIRA DE B. MORAES
- BT/PTC/9902 – Sistemas de Criptofonia de Voz com Mapas Caóticos e Redes Neurais Artificiais – MIGUEL ANTONIO FERNANDES SOLER, EUVALDO FERREIRA CABRAL JR.
- BT/PTC/9903 – Regulação Sincronizada de Distúrbios Senodais – VAIDYA INÉS CARRILLO SEGURA, PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA
- BT/PTC/9904 – Desenvolvimento e Implementação de Algoritmo Computacional para Garantir um Determinado Nível de Letalidade Acumulada para Microorganismos Presentes em Alimentos Industrializados – RUBENS GEDRAITE, CLÁUDIO GARCIA
- BT/PTC/9905 – Modelo Operacional de Gestão de Qualidade em Laboratórios de Ensaio e Calibração de Equipamentos Eletromédicos – MANUEL ANTONIO TAPIA LÓPEZ, JOSÉ CARLOS TEIXEIRA DE BARROS MORAES
- BT/PTC/9906 – Extração de Componentes Principais de Sinais Cerebrais Usando Karhunen – Loève Neural Network – EDUARDO AKIRA KINTO, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PTC/9907 – Observador Pseudo-Derivativo de Kalman Numa Coluna de Destilação Binária – JOSÉ HERNANDEZ LÓPEZ, JOSÉ JAIME DA CRUZ, CLAUDIO GARCIA
- BT/PTC/9908 – Reconhecimento Automático do Locutor com Coeficientes Mel-Cepstrais e Redes Neurais Artificiais – ANDRÉ BORDIN MAGNI, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR
- BT/PTC/9909 – Análise de Estabilidade e Síntese de Sistemas Híbridos – DIEGO COLÓN, FELIPE MIGUEL PAIT
- BT/PTC/0001 – Alguns Aspectos de Visão Multiescalas e Multiresolução – JOÃO E. KOGLER JR., MARCIO RILLO
- BT/PTC/0002 – Placa de Sinalização E1: Sinalização de Linha R2 Digital Sinalização entre Registradores MFC- PHILLIP MARK SEYMOUR BURT, FERNANDA CARDOSO DA SILVA
- BT/PTC/0003 – Estudo da Técnica de Comunicação FO-CDMA em Redes de Fibra Óptica de Alta Velocidade – TULIPA PERSO, JOSÉ ROBERTO DE A. AMAZONAS
- BT/PTC/0004 – Avaliação de Modelos Matemáticos para Motoneurônios – DANIEL GUSTAVO GOROSO, ANDRÉ FÁBIO KOHN
- BT/PTC/0005 – Extração e Avaliação de Atributos do Eletrocardiograma para Classificação de Batimentos Cardíacos – ELDER VIEIRA COSTA, JOSÉ CARLOS T. DE BARROS MORAES
- BT/PTC/0006 – Uma Técnica de Imposição de Zeros para Auxílio em Projeto de Sistemas de Controle – PAULO SÉRGIO PIERRI, ROBERTO MOURA SALES
- BT/PTC/0007 – A Connected Multireticulated Diagram Viewer – PAULO EDUARDO PILON, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR
- BT/PTC/0008 – Some Geometric Properties of the Dynamic Extension Algorithm – PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA
- BT/PTC/0009 – Comparison of Alternatives for Capacity Increase in Multiple-Rate Dual-Class DS/CDMA Systems – CYRO SACARANO HESI, PAUL ETIENNE JESZESKY
- BT/PTC/0010 – Reconhecimento Automático de Ações Faciais usando FACS e Redes Neurais Artificiais – ALEXANDRE TORNICE, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR
- BT/PTC/0011 – Estudo de Caso: Tornando um Projeto Testável Utilizando Ferramentas Synopsys – REINALDO SILVEIRA, JOSÉ ROBERTO A. AMAZONAS
- BT/PTC/0012 – Modelos Probabilísticos para Rastreamento em Carteiras de Investimento – HUGO G. V. DE ASSUNÇÃO, OSWALDO L. V. COSTA
- BT/PTC/0013 – Influência de um Controle Imperfeito de Potência e Monitoramento da Atividade Vocal na Capacidade de Sistemas DS/CDMA – MÁRCIO WAGNER DUARTE ROLIM, PAUL JEAN ETIENNE JESZESKY
- BT/PTC/0014 – Canceladores de Interferência Sucessivo e Paralelo para DS/CDMA – TAUFIK ABRÃO, PAUL JEAN E. JESZESKY
- BT/PTC/0015 – Transmissão de Serviços de Multimídia num Sistema Móvel Celular CDMA de Banda Larga – EDUARDO MEIRELLES MASSAUD, PAUL JEAN ETIENNE JESZESKY
- BT/PTC/0016 – Disseminação do HIV em uma População Homossexual Heterogênea – MARCOS CASADO CASTÑO, JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA
- BT/PTC/0017 – Implementação e Avaliação em Laboratório de um Monitor Cardíaco Portátil para Três Derivações – RAISA FERNÁNDEZ NUNEZ, JOSE CARLOS TEIXEIRA DE BAROS MORAES
- BT/PTC/0018 – Projeto de Filtros Recursivos de N-ésima Banda – IRINEU ANTUNES JÚNIOR, MAX GERKEN
- BT/PTC/0019 – Relative Flatness and Flatness of Implicit Systems – PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA, CARLOS CORRÊA FILHO
- BT/PTC/0020 – Estimativa de Fluxo Sangüíneo nas Artérias Coronárias Usando Imagens de Cineangiocardiorrafia – ANA CRISTINA DOS SANTOS, SÉRGIO SHIGUEMI FURUIE
- BT/PTC/0021 – Modelos Populacionais para AIDS e Análise do Equilíbrio sem Epidemia – ELIZABETH FERREIRA SANTOS, JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA

BT/PTC/0101 – Model-Based Soft-Sensor Design for On-Line Estimation of the Biological Activity in Activated Sludge Wastewater Treatment Plants – OSCAR A. Z. SOTOMAYOR, SONG WON PARK, CLAUDIO GARCIA

BT/PTC/0102 – Reconhecimento Automático do Locutor Utilizando a Rede Neural Artificial *Field Distributed Memory* – FDM – MARCELO BLANCO, EUVALDO F. CABRAL JR.

