



MÉTODO IARX PARA ESTIMATIVA DE FUNÇÃO EM PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR

Rafael Dias do Nascimento, GOTAS/LETeF, rafael.d.nascimento@usp.br

Arthur V.S. Oliveira, GOTAS/LETeF, avs.oliveira@usp.br

RESUMO EXPANDIDO

Diante da crescente demanda por agilidade computacional, isto é, alto desempenho aliado a baixo custo computacional, torna-se essencial a adoção de métodos que conciliem eficiência e viabilidade prática (Liu and Liu, 2024). Em processos de identificação de sistemas, como no caso *Single Input – Single Output* (SISO), a estimativa de entradas, saídas ou do próprio sistema costuma-se basear em modelos físicos. No entanto, tais modelos geralmente impõem elevado custo computacional, especialmente em aplicações como os Problemas Inversos de Condução de Calor (IHCP), devido à complexidade envolvida. Para mitigar esse desafio, empregam-se modelos reduzidos, cuja menor complexidade permite obter estimativas mais rápidas e eficientes. Entre esses, destacam-se os modelos polinomiais, que descrevem a relação entre variáveis por meio de combinações lineares de potências da variável independente. A partir de sua formulação geral, derivam-se diferentes estruturas amplamente utilizadas na identificação de sistemas, como os modelos ARX (*AutoRegressive with Exogenous input*), ARMAX (*AutoRegressive Moving Average with Exogenous input*), OE (*Output Error*) e Box-Jenkins, os quais se diferenciam pelas combinações específicas de polinômios adotadas para representar tanto a dinâmica do sistema quanto o comportamento do ruído, conforme discutido em Aguirre (2015) e Ljung (1999).

O presente trabalho tem como objetivo demonstrar a verificação numérica do método IARX (Inverse ARX) com atraso, conforme apresentado pelos autores em artigo recentemente publicado (Nascimento et al., 2025). Até o momento, a performance desse método tem sido avaliada apenas em contextos computacionais, sem comprovação experimental de sua eficácia.

O modelo utilizado no método IARX é derivado da estrutura ARX, originalmente formulada para a estimativa da resposta do sistema $y(k)$ (Oliveira et al., 2021). No entanto, em problemas inversos de condução de calor, o interesse reside na estimativa da entrada do sistema, como por exemplo, o fluxo de calor a partir da resposta observada, isto é, da variação de temperatura. Trata-se, portanto, de um problema inverso, no qual a entrada é estimada a partir da saída.

O modelo do método IARX pode ser descrito por:

$$u(k) = - \sum_{j=1}^{n_a} a_j u[k-j] + \sum_{j=0}^{n_b-1} b_j y[k+n_k-j] + \sum_{j=1}^{n_c} c_j y[k+n_k+j] \quad (1)$$

onde $u(k)$ representa a entrada do sistema e $y(k)$ sua saída. A primeira parcela corresponde ao termo autorregressivo, a segunda parcela representa os termos exógenos passados e a terceira parcela refere-se aos termos exógenos futuros. Os coeficientes a_j , b_j e c_j são, respectivamente, os parâmetros autorregressivos da entrada, os coeficientes relacionados às saídas passadas e os associados às saídas futuras.

Esse modelo permite a estimativa da entrada atual com base em entradas passadas, saídas passadas e saídas futuras. Uma das principais vantagens do método IARX é a eliminação da necessidade de duas etapas de regularização, como normalmente ocorre em abordagens clássicas. Nessas abordagens, a primeira regularização é aplicada durante a identificação do sistema, enquanto a segunda é empregada na estimativa da entrada a partir do modelo obtido. O método IARX, por sua vez, integra ambas as etapas em uma única estrutura computacional, tornando o processo mais direto e eficiente.

Na Figura 1, observa-se a performance do método IARX em uma simulação numérica aplicada a uma placa plana. Nessa simulação, foi utilizado um termopar virtual a uma distância de 20 mm da fonte com o intuito de avaliar a estimativa do fluxo de calor a partir da variação da temperatura, conforme metodologia descrita por Nascimento et al. (2025).

Na primeira linha da figura, observa-se a etapa de calibração do modelo, na qual se obteve excelente ajuste (*fit*) e baixos resíduos com a introdução do termo de atraso n_k . Já na etapa de validação, o desempenho foi considerado aceitável, destacando-se que sem o termo de atraso n_k a convergência do modelo seria significativamente comprometida, sobretudo em situações de resposta lenta, quando os sensores estavam posicionados mais distantes da fonte de calor. Na condição sem o termo de atraso observou-se perda de ajuste e aumento dos resíduos. Por outro lado, em respostas rápidas, com termopares próximos à fonte, o modelo sem atraso ainda apresentou desempenho satisfatório. A introdução do termo n_k , portanto, mostrou-se fundamental para assegurar a convergência e aprimorar a precisão do modelo em cenários com maior defasagem térmica.

Apesar dos resultados promissores, o método ainda não foi submetido à validação experimental com diferentes ma-

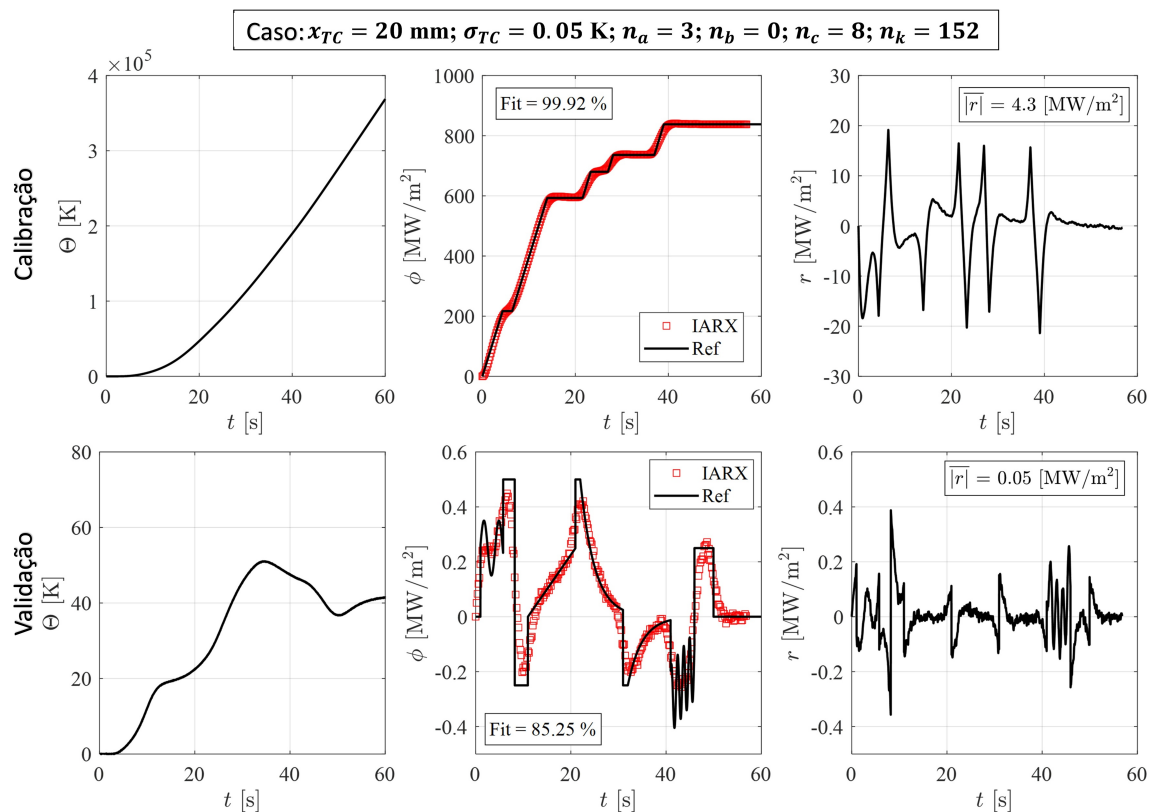


Figura 1. Simulação da estimativa do fluxo de calor a partir da temperatura, com comparação entre o fluxo estimado e o fluxo real. Imagem retirada de Nascimento (2025).

teriais. Diante disso, a próxima etapa, ou seja, a continuidade deste trabalho consiste no desenvolvimento de um aparato experimental controlado, que viabilize a validação do método IARX, bem como a análise de seu desempenho frente a materiais com diferentes propriedades térmicas.

REFERÊNCIAS

- Aguirre, L. A. (2015). *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas: Teoria e Aplicação*. Editora da UFMG, Belo Horizonte, Brasil, 1 edition.
- Liu, X. and Liu, J. (2024). A truthful randomized mechanism for task allocation with multi-attributes in mobile edge computing. *Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences*, 36(9):102196.
- Ljung, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 2nd edition.
- Nascimento, R. D. d., Gradeck, M., and Oliveira, A. (2025). Inverse ARX (IARX) method with delay parameter for function estimation in slow-response systems: Application to an inverse heat conduction problem. *Computational Thermal Sciences*, 17(5):1–14. Published online: Mar 11, 2025.
- Oliveira, A., Zacharie, C., Rémy, B., Schick, V., Maréchal, D., Teixeira, J., Denis, S., and Gradeck, M. (2021). Inverse ARX (IARX) method for boundary specification in heat conduction problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 180:121783.

AGRADECIMENTOS

Este estudo foi financiado com os auxílios 2021/01897-0, da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), e pela Pró-Reitoria de Pesquisa e Inovação (PRPI) da Universidade de São Paulo, por meio do Programa de Apoio aos Novos Docentes USP 2023. Este estudo também foi financiado, em parte, pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Brasil – Código de Financiamento 001.

RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.