BT/PEF-8805

ANÁLISE DAS CASCAS CILÍNDRICAS EM REGIME ELASTOPLÁSTICO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Luiz Antonio Cortese Diogo
Professor Assistente Doutor

(recebido em 10/05/88)

INTRODUÇÃO

Apresenta-se, neste trabalho, a sequência de operações que permitem a análise de cascas cilíndricas pelo método dos elementos finitos, quando se consideram deformações pequenas, mas que conduzem à plastificação do material. Admite-se, porém, que seja válida a adoção de relações deformações-deslocamentos lineares.

Os casos de plasticidade com encruamento podem ser analisados com uma formulação análoga à que aqui se desenvolve.

1. Aplicação do método dos elementos finitos

Considere-se a casca cilíndrica da fig. (1.1), discretizada em um número finito de elementos planos. Em cada vértice i de um determinado elemento, o vetor deslocamento é caracterizado, no sistema global x, y, z, pelas componentes u_i, v_i, w_i e o vetor rotação pelas componentes θ_{xi}, θ_{yi}, θ_{zi}, enquanto que, no sistema local x', y', z', o vetor deslocamento é caracterizado pelas componentes u_i', v_i', w_i' e o vetor rotação pelas componentes θ'_{xi}, θ'_{yi}, θ'_{zi}, sendo válidas as seguintes relações:

$$\begin{bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_e & \operatorname{sen}\alpha_e & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha_e & \cos\alpha_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} = \underline{t}_e' \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \theta'_{xi} \\ \theta'_{yi} \\ \theta'_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_e & \mathrm{sen}\alpha_e & 0 \\ -\mathrm{sen}\alpha_e & \cos\alpha_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{bmatrix} = \underline{t}'_e \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

de modo que:

$$\underline{a}'_e = \underline{T}'_e \underline{a}_e \tag{1.2}$$

onde

$$\underline{a}'^{T}_{ei} = \begin{bmatrix} u'_i & v'_i & w'_i & \theta'_{xi} & \theta'_{yi} & \theta'_{zi} \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^{T}_{ei} = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \theta_{xi} & \theta_{yi} & \theta_{zi} \end{bmatrix}$$

e

$$\underline{T}'_e = \begin{bmatrix} \underline{t}'_e & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \underline{t}'_e & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \underline{t}'_e \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

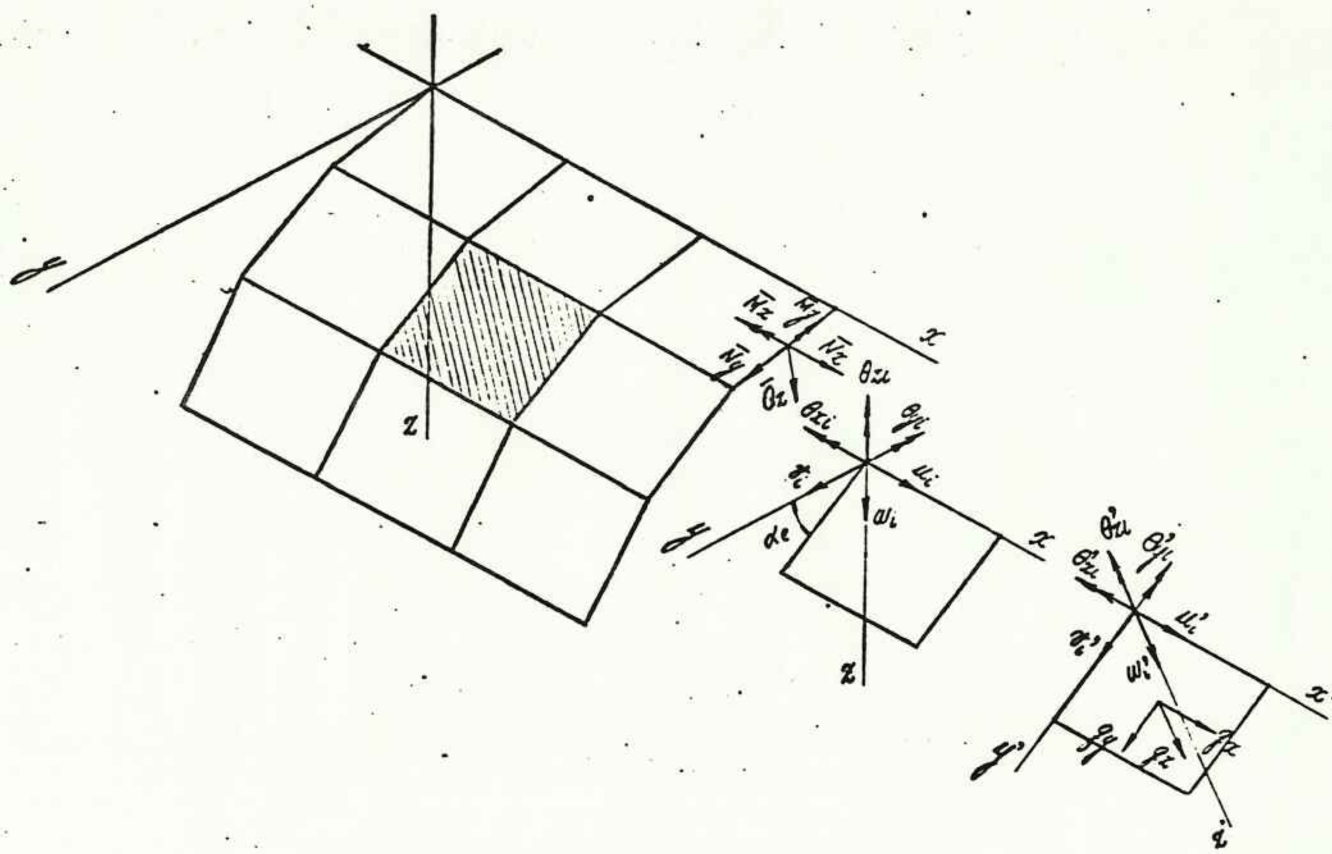


Figura (1.1)

Os deslocamentos nodais $\underline{a}_e$ relacionam-se ao conjunto dos deslocamentos nodais $\underline{a}$ da casca, da seguinte maneira:

$$\underline{a}_e = \underline{T}''_e \; \underline{a} \qquad (1.4)$$

de forma que, considerando a equação (1.2), tem-se:

$$\underline{a}'_e = \underline{T}'_e \underline{T}''_e \; \underline{a} = \underline{T}_e \underline{a}_e \qquad (1.5)$$

No sistema local, o deslocamento de um ponto P é caracterizado, de acordo com a teoria clássica, pelas componentes:

$$u' = u'_0 - \frac{\partial w'_0}{\partial x'} \; z' \qquad v' = v'_0 - \frac{\partial w'_0}{\partial y'} \; z' \qquad w' = w'_0 \qquad (1.6)$$

onde u'_0, v'_0, w'_0 são as componentes segundo os eixos x', y', z' do deslocamento do ponto P_0, projeção de P na superfície média, dadas, em função dos deslocamentos nodais no sistema local, por meio de funções de interpolação, ou seja:

$$u'_0(x',y') = \Sigma\phi_i(x',y')\ u'_i$$

$$v'_0(x',y') = \Sigma\phi_i(x',y')\ v'_i$$

$$w'_0(x',y') = \Sigma\left[\psi_i(x',y')w'_i + \xi_i(x',y')\theta'_{xi} + \eta_i(x',y')\theta'_{yi}\right] \qquad (1.7)$$

com

$$\theta'_{xi} = \left(-\frac{\partial w'_0}{\partial y'}\right)_i \quad \text{e} \quad \theta'_{yi} = \left(\frac{\partial w'_0}{\partial x'}\right)_i \qquad (1.8)$$

Em notação matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} u'_0(x',y') \\ v'_0(x',y') \end{bmatrix} = \Sigma \underline{N}_{ci}\underline{a}'_{cei} = \underline{N}_c\underline{a}'_{ce} \qquad (1.9)$$

onde

$$\underline{N}_{ci} = \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{a}'_{cei} = \begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \end{bmatrix} \qquad (1.10)$$

$$w'_0(x',y') = \Sigma \underline{N}_{pi}\underline{a}'_{pei} = \underline{N}_p\underline{a}'_{pe} \qquad (1.11)$$

onde

$$\underline{N}_{pi} = \begin{bmatrix} \psi_i & \xi_i & \eta_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{a}'_{pei} = \begin{bmatrix} w'_i \\ \theta'_{xi} \\ \theta'_{yi} \end{bmatrix} \qquad (1.12)$$

de modo que:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_0'(x',y') \\ v_0'(x',y') \\ x_0'(x',y') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{N}_c & 0 \\ 0 & \underline{N}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}_{ce}' \\ \underline{a}_{pe}' \end{bmatrix} \qquad (1.13)$$

ou, alternativamente:

$$\underline{u} = \underline{N}\ \underline{a}_e' = \underline{N}\ \underline{T}_e\ \underline{a} \qquad (1.14)$$

onde

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} \phi_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_i & \xi_i & \eta_i & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.15)$$

O campo de deformações é dado, considerando sucessivamente as equações (1.6), (1.9) e (1.11), por:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u'}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial v'}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial u'}{\partial y'} + \dfrac{\partial v'}{\partial x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_0'}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial v_0'}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial u_0'}{\partial y'} + \dfrac{\partial v_0'}{\partial x'} \end{bmatrix} + z' \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w_0'}{\partial x'^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w_0'}{\partial y'^2} \\ -\dfrac{2\partial^2 w_0'}{\partial x'\partial y'} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y'} & \dfrac{\partial}{\partial x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0' \\ v_0' \end{bmatrix} + z' \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2}{\partial x'^2} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial y'^2} \\ -2\dfrac{\partial^2}{\partial x'\partial y'} \end{bmatrix} w_0' = \underline{L}_c \underline{N}_c \underline{a}_{ce}' + z' \underline{L}_p \underline{N}_p \underline{a}_{pe}' =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{B}_c & \underline{B}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a}'_{ce} \\ \\ \underline{a}'_{pe} \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

onde

$$\underline{B}_c = \underline{L}_c \underline{N}_c \qquad \text{com} \qquad \underline{B}_{ci} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi_i}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \phi_i}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial \phi_i}{\partial y'} & \dfrac{\partial \phi_i}{\partial x'} \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

e

$$\underline{B}_p = z' \underline{L}_p \underline{N}_p \text{ com } \underline{B}_{pi} = z' \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 \psi_i}{\partial x'^2} & -\dfrac{\partial^2 \xi_i}{\partial x'^2} & -\dfrac{\partial^2 \eta_i}{\partial x'^2} \\ -\dfrac{\partial^2 \psi_i}{\partial y'^2} & -\dfrac{\partial^2 \xi_i}{\partial y'^2} & -\dfrac{\partial^2 \xi_i}{\partial y'^2} \\ -\dfrac{2\partial^2 \psi_i}{\partial x' \partial y'} & -\dfrac{2\partial^2 \xi_i}{\partial x' \partial y'} & -\dfrac{2\partial^2 \xi_i}{\partial x' \partial y'} \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

ou, alternativamente:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B}\ \underline{a}'_e = \underline{B}\ \underline{T}_e\ \underline{a} \tag{1.19}$$

onde

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} \underline{B}_{ci} & \underline{B}_{pi} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

A uma variação $\delta\underline{u}$ corresponde uma variação $\delta\underline{\varepsilon}$, de modo que o trabalho virtual dos esforços externos é dado por:

$$\delta\tau_e = \Sigma \int_{S_e} \delta\underline{u}^T \underline{f}\ h\ dS + \Sigma \int_{s_e} \delta\underline{u}_s^T\ \underline{s}\ h\ ds \tag{1.21}$$

onde, de acordo com a fig. (1.1),

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_0'(x',y') \\ v_0'(x',y') \\ w_0'(x',y') \end{bmatrix} = \underline{N}\ \underline{T}_e\ \underline{a} \qquad \underline{u}_s = \begin{bmatrix} u_0'(x',y') \\ v_0'(x',y') \\ w_0'(x',y') \\ \theta_x'(x',y') \\ \theta_y'(x',y') \end{bmatrix} = \underline{N}_s \underline{a}_e' = \underline{N}_s \underline{T}_e\ \underline{a}$$

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} q_x(x',y') \\ q_y(x',y') \\ q_z(x',y') \end{bmatrix} \qquad \underline{s} = \begin{bmatrix} \bar{N}_x(x',y') \\ \bar{N}_y(x',y') \\ \bar{Q}_z(x',y') \\ \bar{M}_x(x',y') \\ \bar{M}_y(x',y') \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

enquanto que o trabalho virtual dos esforços internos é dado por:

$$\delta\tau_i = \Sigma \int_{V_e} \delta\underline{\varepsilon}^T\ \underline{\sigma}\ dV \tag{1.23}$$

onde

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x(x',y') \\ \sigma_y(x',y') \\ \tau_{xy}(x',y') \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

Às componentes σ_x, σ_y, τ_{xy}, correspondem os esforços solicitantes:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, dz \qquad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, dz \qquad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, dz$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \, z \, dz \qquad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \, z \, dz \qquad M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \, z \, dz \tag{1.25}$$

Considerando, na situação de equilíbrio, a igualdade dos trabalhos virtuais externo e interno, pode-se escrever:

$$\Sigma \int_{V_e} \delta \underline{\varepsilon}^T \, \underline{\sigma} \, dV - \left[\Sigma \int_{S_e} \delta \underline{u}^T \, \underline{f} \, h \, dS + \Sigma \int_{s_e} \delta \underline{u}_s^T \, \underline{s} \, h \, ds \right] = 0 \tag{1.26}$$

Considerando, na expressão acima, as equações (1.19) e (1.22), obtém-se:

$$\Sigma \int_{V_e} \delta \underline{a}^T \, \underline{T}_e^T \, \underline{B}^T \, \underline{\sigma} \, dV - \left[\Sigma \int_{S_e} \delta \underline{a}^T \, \underline{T}_e^T \, \underline{N}^T \, \underline{f} \, h \, dS + \right.$$

$$\left. + \Sigma \int_{s_e} \delta \underline{a}^T \, \underline{T}_e^T \, \underline{N}_s^T \, \underline{s} \, h \, ds \right] = 0 \tag{1.27}$$

ou seja:

$$\delta \underline{a}^T \left[\Sigma \, \underline{T}_e^T \int_{V_e} \underline{B}^T \, \underline{\sigma} \, dV - \left[\Sigma \, \underline{T}_e^T \int_{S_e} \underline{N}^T \, \underline{f} \, h \, dS + \right. \right.$$

$$+ \Sigma \, \underline{T}_e^T \int_{s_e} \underline{N}_s^T \, \underline{s} \, h \, ds \Bigg] \Bigg] = \delta \underline{a}^T \, \underline{\psi}(\underline{a}) = 0 \tag{1.28}$$

onde

$$\underline{\psi}(\underline{a}) = \Sigma \, \underline{T}_e^T \int_{V_e} \underline{B}^T \, \underline{\sigma} \, dV - \Bigg[\Sigma \, \underline{T}_e^T \int_{S_e} \underline{N}^T \, \underline{f} \, h \, dS +$$

$$+ \Sigma \, \underline{T}_e^T \int_{s_e} \underline{N}_s^T \, \underline{s} \, h \, ds \Bigg]$$

$$= \Sigma \, \underline{T}_e^T \int_{V_e} \underline{B}^T \, \underline{\sigma} \, dV - \underline{P} \tag{1.29}$$

Havendo esforços externos concentrados nos nós, deve-se adicioná-los aos termos entre colchetes da expressão acima.

A solução das equações de equilíbrio (1.29) é obtida com o procedimento descrito na referência R.3. Deve-se notar, entretanto, que nos nós situados em bordas livres ocorre uma hipostaticidade local no sentido de ser impossível a absorção de eventual momento externo, caracterizado por vetor normal à casca. Adiciona-se, então, uma mola resistente à rotação, que de resto não é solicitada. A mesma providência deve ser adotada quando todos os elementos convergentes em um determinado nó são complanares.

2. Exemplo

No exemplo que segue, a discretização da estrutura é feita com elementos retangulares, descritos na referência R1, nos quais, considerando, de acordo com a fig. (2.1), as seguintes transformações:

$$r = \frac{x' - x_c}{a} \qquad s = \frac{y' - y_c}{b} \qquad t = \frac{z'}{h/2} \tag{2.1}$$

as funções de interpolação, correspondentes ao nó i, são dadas por:

$$\phi_i(r,s) = \frac{1}{4}(r_0 + 1)(s_0 + 1)$$

$$\psi_i(r,s) = \frac{1}{8}(r_0 + 1)(s_0 + 1)(2 + r_0 + s_0 - r^2 - s^2)$$

$$\xi_i(r,s) = \frac{1}{8}\, b\, s_i(r_0 + 1)(s_0 + 1)^2(s_0 + 1)$$

$$\eta_i(r,s) = \frac{1}{8}\, a\, r_i(r_0 + 1)^2(r_0 - 1)(s_0 + 1) \tag{2.2}$$

onde

$$r_0 = r\, r_i \qquad e \qquad s_0 = s\, s_i \tag{2.3}$$

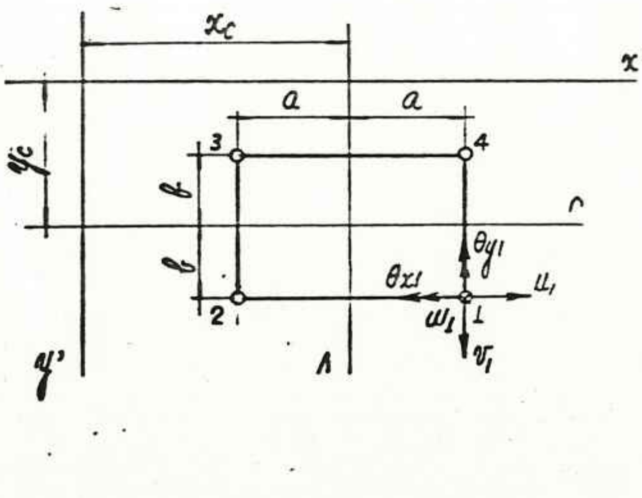


Figura (2.1)

Adota-se o critério de Von Mises, em que a função de plastificação é dada por:

$$F(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_e^2 \tag{2.4}$$

onde σ_e é a tensão de escoamento do material.

Com esses elementos, examina-se a casca cilíndrica da fig.(2.2) de material elasto-plástico, de módulo de elasticidade $E = 2.100\ tf/cm^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$ e tensão de escoamento $\sigma_e = 2,4\ tf/cm^2$, submetida à carga kq, segundo a direção Z, onde $q = 0,0030\ tf/cm^2$.

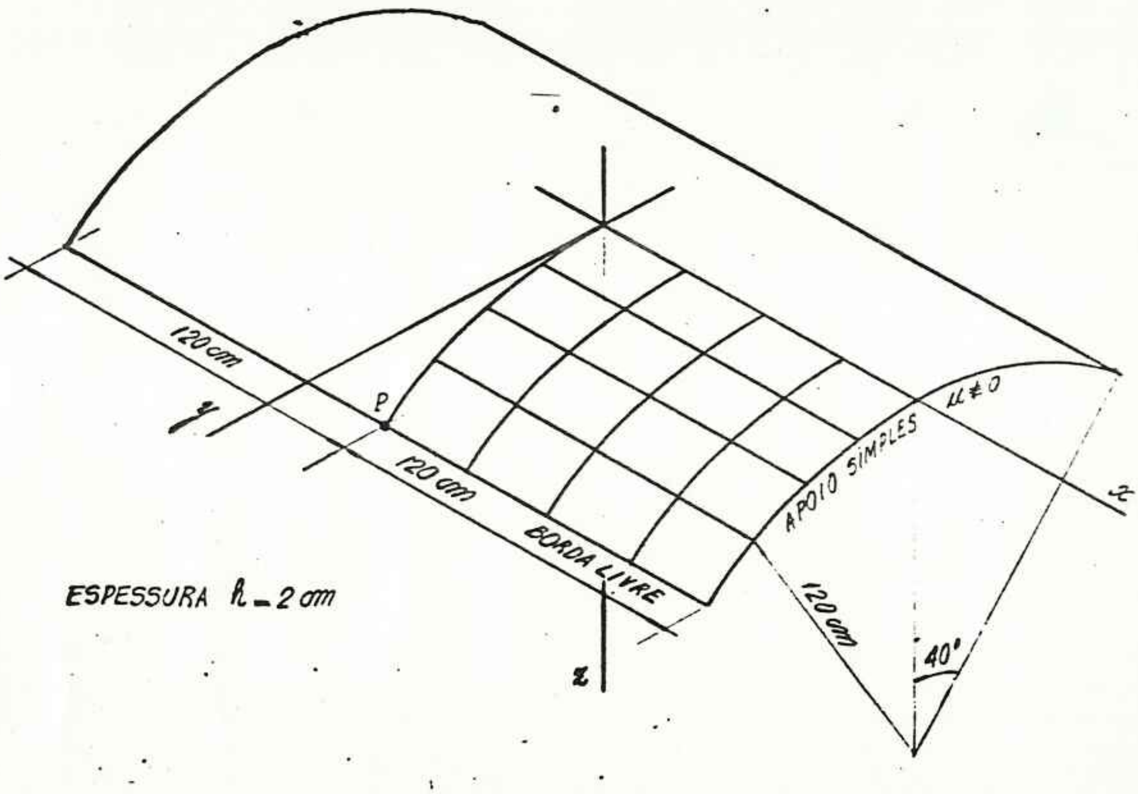
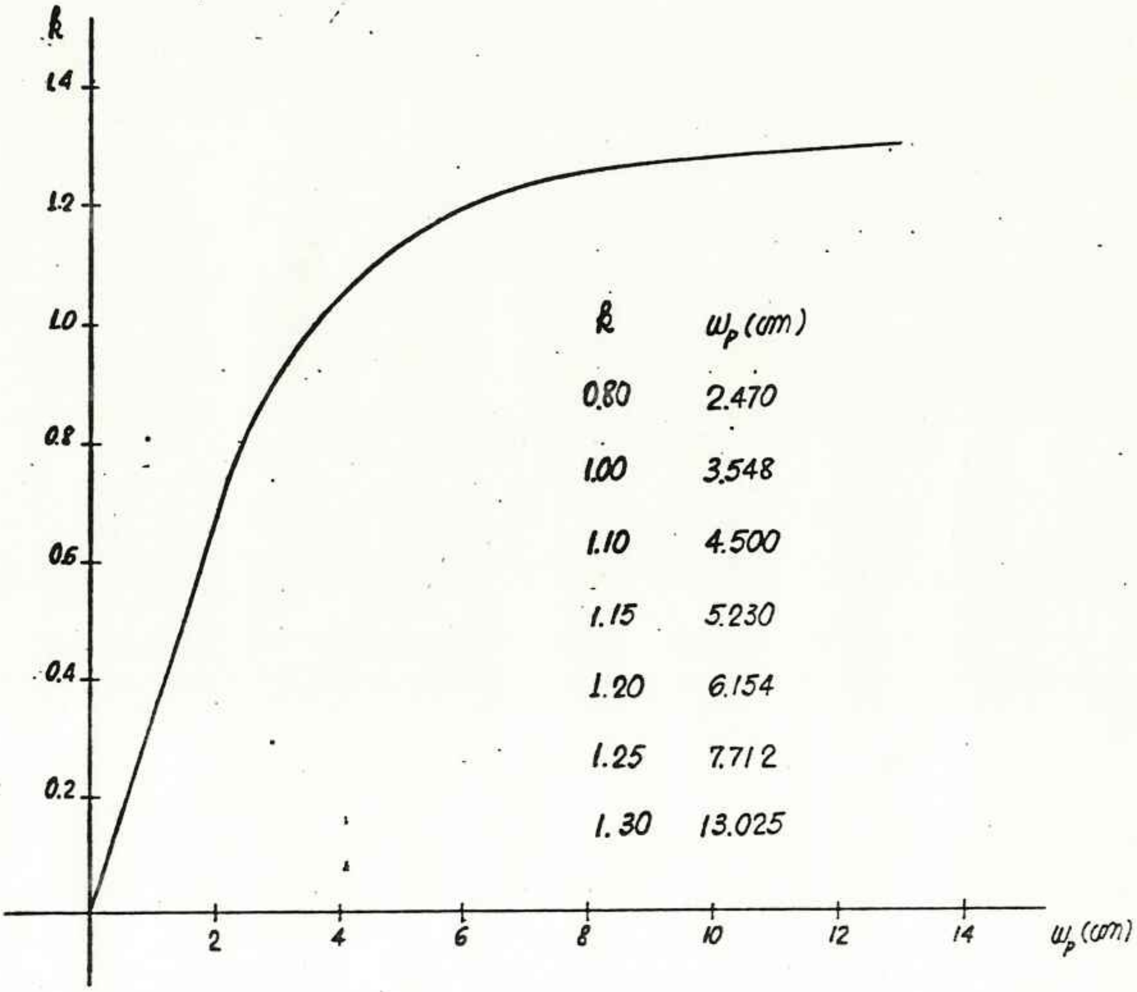


Figura (2.2)

DESLOCAMENTO VERTICAL DO PONTO P (w_p)



REFERÊNCIAS

ZIENKIEWICZ, O.C. "The finite element method", McGraw-Hill, 3rd ed., 1977

DIOGO, L.A.C. "Consideração da plastificação nas chapas", Escola Politécnica BT/PEF-8708, 1987

DIOGO, L.A.C. "Consideração da plastificação nas placas", Escola Politécnica BT/PEF-8709, 1987