

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia de Sistemas
Eletrônicos

ISSN 1517-3542

BT/PSI/0219

Solução Matricial para o Problema de
Otimização de Portfolio de Ações com
Opção de Vendas Futuras

Tiago J. Goulart
Flavio Almeida M. Cipparrone

São Paulo – 2002

1298 823

FICHA CATALOGRÁFICA

Goulart, Tiago J.

Solução matricial para o problema de otimização de portfolio de ações com opção de vendas futuras / T.J. Goulart, F.A.M. Cipparrone. – São Paulo : EPUSP, 2002.

p. – (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos, BT/PSI/0219)

1. Programação quadrática 2. Investimentos 3. Ações I. Cipparrone, Flávio Almeida de Magalhães II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos III. Título IV. Série

ISSN 1517-3542

CDU 519.76

332.6

332.63

SOLUÇÃO MATRICIAL PARA O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE PORTFOLIO DE AÇÕES COM OPÇÃO DE VENDAS FUTURAS

TIAGO J. GOULART, FLAVIO A.M. CIPPARRONE

Resumo. Este trabalho descreve uma solução matricial para o problema de otimização de portfólio de ações onde operações de vendas futuras são permitidas. O problema pode ser descrito como uma minimização quadrática com restrições lineares. Diferentes métodos podem ser utilizados para resolver esse problema como programação quadrática por exemplo. Contudo, neste trabalho, a solução proposta não requer o uso de ferramentas computacionais sofisticadas, pois o resultado é obtido através de uma equação matricial simples. Também está demonstrado que, para o problema específico de otimização de portfólio, onde o risco é medido pela matriz de covariância das diferentes ações a serem aplicadas, o método proposto pode ser aplicado para problemas reais e a solução ótima global sempre é obtida.

1. INTRODUÇÃO:

1.1. Definição de Portfólio de Ações:

Um portfólio é a coleção de ações de um investidor. Neste trabalho, o portfólio será representado pela porcentagem de dinheiro a ser aplicada em cada ação.

1.2. Otimização de Portfólio:

Considere um investidor com uma quantidade limitada de dinheiro disponível para ser investido em um portfólio de ações no mercado financeiro. Presume-se que o investidor deseje maximizar o retorno esperado de seu portfólio e ao mesmo tempo minimizar o risco envolvido nessa operação. Infelizmente, para a grande maioria dos casos, esses dois objetivos são conflitantes, isto é, maiores retornos esperados geralmente envolvem maiores riscos. Assim, otimizar um portfólio consiste em maximizar o retorno esperado do investimento para um risco considerado aceitável, ou minimizar o risco para uma expectativa de retorno aceitável. Neste trabalho será discutida uma solução matricial para a segunda abordagem (minimização de risco) no caso em que vendas futuras de ações são permitidas.

1.3. Análise Estatística de Investimentos:

Para se otimizar um portfólio é preciso levantar as informações do retorno esperado e o risco de cada ação, além de se estimar como as variações dos valores das ações estão relacionadas entre si.

Esses dados podem ser estimados a partir de uma análise estatística sobre o histórico do rendimento de cada ação.

1.3.1. Expectativa de retorno do portfólio:

A expectativa do retorno de cada ação pode ser simplesmente calculada através da média do retorno apresentado em um período de tempo.

Seja S_i a variável aleatória que representa o retorno financeiro da ação i em um período de tempo.

$E(S_i)$ a expectativa de retorno da ação i

x_i a porcentagem do dinheiro aplicado na ação i .

Suponha que se deseja otimizar um portfólio contendo n ações:

$$\text{Retorno esperado do portfólio} = E\left(\sum_{i=1}^n x_i S_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i E(S_i)$$

1.3.2. Risco do investimento:

Uma maneira de se mensurar o risco de uma ação é calcular a estimativa de sua variância através da análise de regressão dos valores históricos de retorno. Da mesma forma podem ser estimadas as covariâncias entre cada dupla de ações.

$$\text{Variância do portfólio} = \text{var}\left(\sum_{i=1}^n x_i S_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{var}(S_i) + \sum_{i \neq j} x_i x_j \text{cov}(S_i, S_j)$$

$$\text{Desvio padrão do portfólio: dev} = \sqrt{\text{var}}$$

O retorno sobre um investimento em um portfólio de ações geralmente se aproxima de uma distribuição normal onde em 95% das vezes o valor esperado da variável aleatória se encontra no intervalo definido pela média ± 2 vezes o desvio padrão.

Assim, pode-se obter um intervalo de confiança de 95% para o retorno esperado do portfólio. Portanto, quanto maior for a variância, maior será o desvio padrão e o intervalo de confiança do retorno, conseqüentemente, maior será o risco envolvido na operação.

2. SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE PORTFOLIO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA:

A idéia de se utilizar programação quadrática para se determinar portfólios ótimos vem de Markowitz (1959) e é parte integrante do trabalho que lhe rendeu o Prêmio Nobel em Economia. Como já foi mencionado, uma abordagem possível para a solução do problema de otimização de portfólio é minimizar o risco, e portanto a variância, para uma expectativa mínima de retorno.

O problema pode ser formulado através da seguinte programação não linear:

Encontrar $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ tais que

$$\min \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{var}(S_i) + \sum_{i \neq j} x_i x_j \text{cov}(S_i, S_j)$$

obedecendo as seguintes restrições:

1) $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

2) $\sum_{i=1}^n x_i E(S_i) \geq r$, onde r é o retorno mínimo esperado

A primeira restrição limita o dinheiro a ser aplicado no portfólio.

A segunda restrição impõe que seja obtida uma expectativa mínima de retorno.

Como vendas futuras de ações são permitidas, restrições do tipo $x_i \geq 0$ não são necessárias.

3. SOLUÇÃO MATRICIAL DO PROBLEMA:

Neste trabalho está sendo proposta uma solução utilizando equações matriciais que resolve diretamente o problema específico de otimização de portfólio sem a necessidade de se utilizar métodos computacionais iterativos.

3.1. Formulação Matricial do Problema:

\underline{e} = vetor esperança do retorno de cada ação

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} E(S_1) \\ E(S_2) \\ \vdots \\ E(S_n) \end{bmatrix} \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

\underline{x} = vetor das porcentagens a serem investidas em cada ação (variável do problema)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

C = Matriz de covariância

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \text{ onde } \sigma_i^2 = \text{var}(S_i) \text{ e } \sigma_{ij} = \text{cov}(S_i, S_j) = \text{cov}(S_j, S_i) = \sigma_{ji}$$

O problema pode ser então escrito da seguinte forma:

$$\min_{\underline{x}} [\underline{x}^T C \underline{x}]$$

restrições:

$$1) (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 1$$

$$2) \underline{x}^T \underline{e} \geq r$$

3.2. Tratando as restrições:

A função objetivo para o problema de otimização de portfólio utilizando a matriz de covariância é sempre convexa e as duas restrições são lineares. Assim, utilizando-se multiplicadores de Lagrange, o mínimo global sempre será encontrado.[1]

3.2.1 Primeira restrição: $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 1$

Como neste problema de minimização a função objetivo é convexa e a restrição é linear, ao igualarmos o gradiente da função: $L1 = \underline{x}^T C \underline{x} + \lambda_1 [1 - x_1 - x_2 \cdots - x_n]$ a zero, obtemos o valor de \underline{x} que minimiza a função objetivo e atende a restrição.

Contudo, a função L também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$L1 = \begin{bmatrix} \underline{x}^T & \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & & -0.5 \\ & C_{(n \times n)} & & \vdots \\ & & & -0.5 \\ -0.5 & \cdots & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{x}^T & \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nomeando } \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} \underline{x}^T & \lambda_1 \end{bmatrix}, \underline{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } S_1 = \begin{bmatrix} & & & -0.5 \\ & C_{(n \times n)} & & \vdots \\ & & & -0.5 \\ -0.5 & \cdots & -0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pode-se escrever } L1 = \underline{x}_1^T S_1 \underline{x}_1 + \underline{x}_1^T \underline{y}_1$$

3.2.2 Segunda Restrição: $\underline{x}^T \underline{e} \geq r$

Primeiramente resolve-se o problema ignorando essa restrição, caso a solução encontrada a satisfaça, o problema já está resolvido.

Como a função objetivo é convexa e a restrição linear, caso o ponto de mínimo encontrado não satisfaça $\underline{x}^T \underline{e} \geq r$, o mínimo que atende a restrição será encontrado na região em que $\underline{x}^T \underline{e} = r$. Dessa forma, novamente, pode-se utilizar um multiplicador de Lagrange.

Igualando o gradiente da função L2 abaixo a zero, os valores obtidos para \underline{x} minimizarão a função objetivo inicial respeitando as restrições $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 1$ e $\underline{x}^T \underline{e} = r$

$$L2 = \underline{x}^T C \underline{x} + \lambda_1 [1 - x_1 - x_2 \dots - x_n] + \lambda_2 [r - x_1 e_1 - x_2 e_2 \dots - x_n e_n]$$

Também se pode escrever L2 da seguinte forma:

$$L2 = \begin{bmatrix} \underline{x}^T & \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{(n \times n)} & -0.5 & -0.5e_1 \\ & \vdots & \vdots \\ -0.5 & \dots & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5e_1 & \dots & -0.5e_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{x}^T & \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ r \end{bmatrix}$$

$$\text{Nomeando } \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} \underline{x}^T & \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ r \end{bmatrix} \text{ e } S_2 = \begin{bmatrix} & & -0.5 & -0.5e_1 \\ & C_{(n \times n)} & \vdots & \vdots \\ -0.5 & \dots & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5e_1 & \dots & -0.5e_n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pode-se escrever $L2 = \underline{x}_2^T S_2 \underline{x}_2 + \underline{x}_2^T y_2$

3.3. Encontrando a solução ótima:

Como já foi visto, o problema de minimização consiste em igualar o gradiente da função L1 ou L2 a zero.

Para $L = \underline{x}^T S \underline{x} + \underline{x}^T \underline{y}$, $\nabla L = 2 \cdot S \cdot \underline{x} + \underline{y}$. Se $\nabla L = 0$ então $\underline{x} = -0.5 \cdot S^{-1} \cdot \underline{y}$

Desse modo, resolvendo uma equação matricial, pode ser encontrada a solução para o problema inicial de otimização de portfolio e obter os valores dos multiplicadores de Lagrange.

3.4. Verificando a existência da solução:

Para saber se a solução proposta existe, é preciso provar que a Matriz S possui inversa.

No caso em que, ao aplicarmos apenas a primeira restrição, a segunda seja satisfeita, é preciso verificar se a Matriz S_1 possui inversa:

$$L1 = \underline{x}_1^T S_1 \underline{x}_1 + \underline{x}_1^T \underline{y}_1$$

Para que S_1 não possua inversa, seu determinante precisa ser nulo.

$$S_1 = \begin{bmatrix} & -0.5 \\ C_{(n \times n)} & \vdots \\ -0.5 & \dots & -0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} C & \underline{v} \\ \underline{v}^T & 0 \end{bmatrix} \text{ onde } \underline{v} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ \vdots \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$\det(S_1) = \det(C) \det(-\underline{v}^T C^{-1} \underline{v})$ Como $C > 0$ (matriz de covariância) $\det(C) > 0$, portanto $\det(S_1) = 0$ se e somente se $\det(\underline{v}^T C^{-1} \underline{v}) = 0$ ou seja, $\underline{v}^T C^{-1} \underline{v} = 0$.

Como $C > 0$ e v é da seguinte forma:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ \vdots \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$\underline{v}^T C^{-1} \underline{v} \neq 0$ e $\det(S_1) \neq 0$. Consequentemente, S_1 possui inversa.

No caso em que as duas restrições $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 1$ e $\underline{x}^T \underline{e} = r$ precisam ser consideradas é preciso verificar se a Matriz S_2 possui inversa:

$$L2 = \underline{x}_2^T S_2 \underline{x}_2 + \underline{x}_2^T \underline{y}_2$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} & -0.5 & -0.5e_1 \\ & \vdots & \vdots \\ C_{(n \times n)} & -0.5 & -0.5e_n \\ -0.5 & \dots & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5e_1 & \dots & -0.5e_n & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} C & V \\ V^T & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(S_2) = \det(C) \det(V^T C^{-1} V)$ Como $C > 0$ (matriz de covariância), $\det(C) > 0$. Portanto, $\det(S_1) = 0$ se e somente se $\det(V^T C^{-1} V) = 0$

$$V = [\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2] \quad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ \vdots \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -0.5e_1 \\ \vdots \\ -0.5e_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{V}^T C^{-1} \underline{V} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T C^{-1} \underline{v}_1 & \underline{v}_1^T C^{-1} \underline{v}_2 \\ \underline{v}_1^T C^{-1} \underline{v}_2 & \underline{v}_2^T C^{-1} \underline{v}_2 \end{bmatrix}. \text{ Para o determinante dessa matriz ser nula, a seguinte condição}$$

deve ser satisfeita: $(\underline{v}_1^T C^{-1} \underline{v}_1)(\underline{v}_2^T C^{-1} \underline{v}_2) = (\underline{v}_1^T C^{-1} \underline{v}_2)^2$.

Definindo $D = (C^{-1})^{0.5}$ de forma que $D^T = D$ e $D^T D = D^2 = C^{-1}$ posso definir $\underline{z}_1 = D \underline{v}_1$, $\underline{z}_2 = D \underline{v}_2$ e a igualdade acima passa a ser escrita da seguinte forma: $\|\underline{z}_1\|^2 \cdot \|\underline{z}_2\|^2 = (\underline{z}_1^T \underline{z}_2)^2$. Essa igualdade só é válida se $\underline{z}_2 = k \underline{z}_1$ (k constante real). Portanto, $D \underline{v}_2 = k D \underline{v}_1$ e $\underline{v}_2 = k \underline{v}_1$.

Como $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ \vdots \\ -0.5 \end{bmatrix}$ e $k > 0$, a igualdade $\underline{v}_2 = k \underline{v}_1$ é válida se e somente se todos os valores de e_1, e_2, \dots, e_n forem iguais entre si. Isso equivale a dizer que todas as ações do portfolio têm a mesma expectativa de retorno. O que não tem sentido em um problema real.

Desse modo a matriz S sempre terá inversa nos casos reais e a solução $\underline{x} = -0.5 \cdot S^{-1} \cdot \underline{y}$ sempre levará ao ponto que minimiza a variância do portfolio ao mesmo tempo que obedece as restrições impostas.

3.5. Simulações:

3.5.1. Exemplo didático:

(extraído da referência [1] pag734)

Considere um portfolio composto de três ações: S_1 , S_2 , S_3

Retorno esperado de cada ação:

$E(S_1)=0.14$, $E(S_2)=0.11$, $E(S_3)=0.10$

Variância de cada ação:

$\text{var}(S_1)=0.20$, $\text{var}(S_2)=0.08$, $\text{var}(S_3)=0.18$

Covariância de cada dupla de ações:

$\text{cov}(S_1, S_2)=0.05$, $\text{cov}(S_1, S_3)=0.02$, $\text{cov}(S_2, S_3)=0.03$

Deseja-se minimizar a variância do portfolio para um retorno mínimo esperado de 12%

Para a implementação da solução desse problema utilizando a solução matricial proposta neste trabalho, foi desenvolvida uma simples rotina no Matlab:

```

% Problema:
% Definir portfolio de ações que:
% Minimiza o risco (variância) para um retorno mínimo esperado

% Solução:

clear;
% Matriz de Covariância das ações
C=[[0.2 0.05 0.02];[0.05 0.08 0.03];[0.02 0.03 0.18]];
n=size(C,1);

% Valor esperado do retorno anual de cada ação
e=[0.14 0.11 0.10].';

% Retorno anual esperado mínimo do portfolio
r=0.12;

% Aplicando restrição de dinheiro disponível (x1+x2+...+xn=1)
% (Multiplicador de Lagrange)
S=[[C -0.5*ones(n,1)];[-0.5*ones(1,n) 0]];
y=[zeros(n,1);1];

% Calculando ponto de mínima variância
x=-0.5*pinv(S)*y;

% Calculando retorno esperado
retorno=x.*[e;0];

% Comparando com retorno mínimo esperado:
% Se maior ou igual então a solução está encontrada
% Caso contrario, aplicar restrição de retorno=r (Lagrange)
if retorno>=r
    x
    retorno
    x(n+1)=0;
else
    e1=[-0.5*e;0];
    S=[[S e1];[e1' 0]];
    y=[zeros(n,1);1;r];
    x=-0.5*pinv(S)*y
    retorno=x.*[e;0;0]
    x(n+1)=0;
    x(n+2)=0;
end

% Cálculo da variância e desvio padrão
var=x.'*S*x
dev=sqrt(var)

% Intervalo de confiança do retorno com 95% de probabilidade considerando distribuição normal:
delta_95=[retorno-2*dev retorno+2*dev]

```

Resultados Obtidos com o Matlab:

```
x =  
 0.3810  
 0.4762  
 0.1429  
 -0.1810  
 2.7619
```

```
retorno = 0.1200  
var = 0.0752  
dev = 0.2743  
delta_95 = [-0.4286  0.6686]
```

Observe que os três valores iniciais de x são as porcentagens a serem aplicadas em cada uma das três ações, enquanto que os dois últimos valores correspondem aos multiplicadores de Lagrange.

Mudando o retorno esperado de 12% ($r=0.12$) para zero, ($r=0$)

```
x =  
 0.1404  
 0.6236  
 0.2360  
 0.1280
```

```
retorno = 0.1119  
var = 0.0640  
dev = 0.2530  
delta_95 = [-0.3941  0.6178]
```

Note que a restrição de retorno mínimo não foi necessária neste caso (x possui apenas 4 valores)

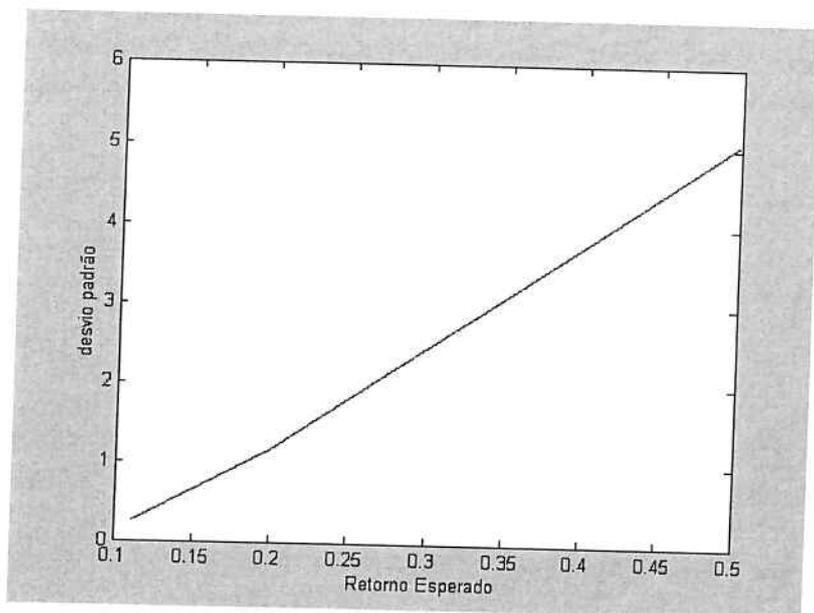
Aumentando o valor do retorno esperado algumas operações de venda futura são necessárias e a risco do investimento aumenta:

Para retorno mínimo esperado de 20% $r=0.2$ a solução ótima é:

```
x =  
 2.7429  
 -0.9714  
 -0.7714  
 -3.2149  
 29.8857
```

```
retorno = 0.2000  
var = 1.3811  
dev = 1.1752  
delta_95 = [-2.1504  2.5504]
```

Pode-se traçar também uma curva de trade-off entre o retorno esperado e o desvio padrão do mesmo:



3.5.2. Caso Real:

Foram selecionadas 9 ações com possibilidade de venda futura.

A partir do histórico do rendimento dos últimos 7 meses, foram estimados, utilizando conhecimentos de regressão, o valor esperado de cada ação e a matriz de covariância:

#	Stock	Rendimento mensal (%)							Experança	Variância	desvio P
		Ago	Jul	Jun	Mai	Abr	Mar	Fev			
1	Stock 1	1.46	1.29	0.51	0.01	1.46	1.36	1.25	1.05	0.3136	0.56
2	Stock 2	1.91	1.42	-0.06	1.31	1.25	1.30	1.24	1.20	0.3600	0.60
3	Stock 3	1.20	1.29	0.95	0.71	1.28	1.18	1.07	1.10	0.0441	0.21
4	Stock 4	1.34	1.41	1.03	0.80	1.42	1.31	1.19	1.21	0.0529	0.23
5	Stock 5	1.30	1.37	0.95	0.74	1.38	1.28	1.16	1.17	0.0576	0.24
6	Stock 6	5.48	-0.30	9.99	4.04	4.44	-1.39	-2.88	2.77	20.4304	4.52
7	Stock 7	2.09	0.14	0.95	1.06	1.04	0.59	2.03	1.13	0.5041	0.71
8	Stock 8	2.89	-1.09	0.28	0.88	0.71	-0.03	2.89	0.93	2.1904	1.48
9	Stock 9	4.59	-3.64	-0.81	0.45	0.05	-1.63	4.56	0.51	9.4864	3.08

COVAR	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.313600	0.161280	0.111720	0.123648	0.130368	-1.088416	0.051688	0.124320	0.241472
2	0.161280	0.360000	0.046620	0.056580	0.064800	-1.383120	0.110760	0.284160	0.591360
3	0.111720	0.046620	0.044100	0.048300	0.049896	-0.294252	-0.020874	-0.040404	-0.090552
4	0.123648	0.056580	0.048300	0.052900	0.055200	-0.343068	-0.017963	-0.034040	-0.070840
5	0.130368	0.064800	0.049896	0.055200	0.057600	-0.412224	-0.015336	-0.024864	-0.059136
6	-1.088416	-1.383120	-0.294252	-0.343068	-0.412224	20.430400	0.224644	-0.133792	-0.139216
7	0.051688	0.110760	-0.020874	-0.017963	-0.015336	0.224644	0.504100	1.050800	2.186800
8	0.124320	0.284160	-0.040404	-0.034040	-0.024864	-0.133792	1.050800	2.190400	4.558400
9	0.241472	0.591360	-0.090552	-0.070840	-0.059136	-0.139216	2.186800	4.558400	9.486400

Resultados Obtidos:

Neste caso, para retorno mínimo igual a zero, a solução obtida foi:

x =
-0.6913
-0.0468
0.8786
0.0917
0.7323
-0.0088
-0.1090
0.1813
-0.0279
0.0007

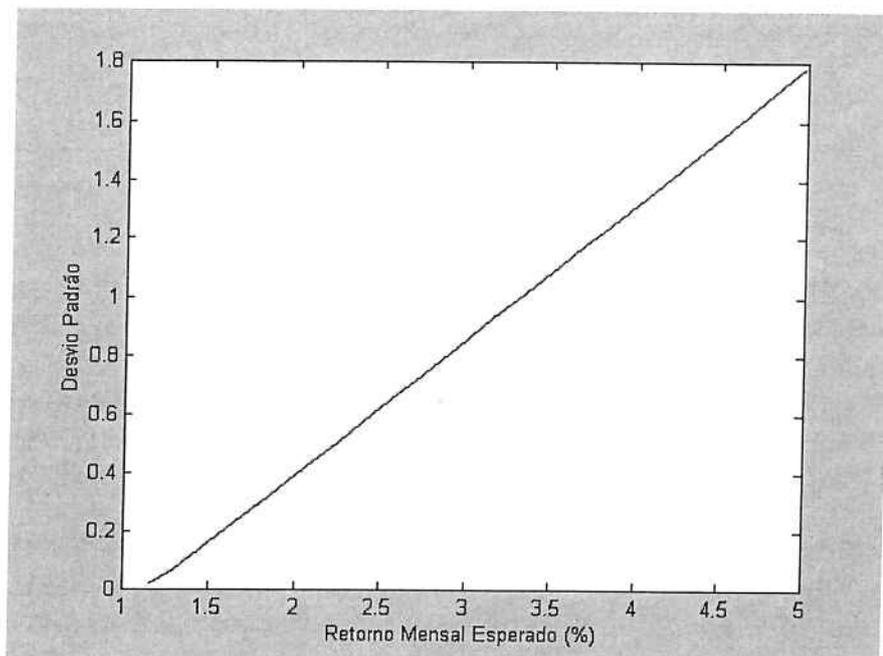
retorno = 1.1589
var = 3.6957e-004
dev = 0.0192
delta_95 = [1.1204 1.1973]

Para um retorno esperado de 2% ao mês: $r=2$

x =
-5.8498
-1.1262
-16.0377
-4.5561
33.4061
0.0764
-6.5588
-0.1825
1.8286
-0.4194
0.3626

retorno = 2.0000
var = 0.1528
dev = 0.3910
delta_95 = [1.2181 2.7819]

Pode-se traçar também uma curva de trade-off entre o retorno esperado e o desvio padrão do mesmo:



4. REFERÊNCIAS:

[1] Wayne I. Winston, *Introduction to Mathematical Programming Applications and Algorithms*, segunda edição, ISBN: 0-534-23046-6

BOLETINS TÉCNICOS - TEXTOS PUBLICADOS

- BT/PSI/0001 – Observabilidade Topológica de Osawa em Redes não Lineares – ARMANDO HANDAYA, FLÁVIO A. M. CIPPARRONE
- BT/PSI/0002 – Desenvolvimento de uma Microbalança de Quartzo para Detectar Gases – ROBERTO CHURA CHAMBI, FRANCISCO JAVIER RAMIREZ FERNANDEZ
- BT/PSI/0003 – Sistema para Desenvolvimento de Sensores Inteligentes – ANTONIO CARLOS GASPARETTI, FRANCISCO JAVIER RAMIREZ FERNANDEZ
- BT/PSI/0004 – A 1.6GHz Dual Modulus Prescaler Using the Extended True Single-Phase Clock CMOS Circuit Technique (E-TSPC) – JOÃO NAVARRO SOARES JÚNIOR, WILHELMUS ADRIANUS M. VAN NOIJE
- BT/PSI/0005 – Modelamento em Linguagem VHDL de uma Unidade de Policiamento para Redes Locais ATM – ÉDSON TAKESHI NAKAMURA, MARIUS STRUM
- BT/PSI/0006 – Otimização das Operações Coletivas para um Aglomerado de 8 Computadores usando uma Rede Ethernet 10 Mbps baseada em Hub – MARTHA TORRES, SERGIO TAKEO KOFUJI
- BT/PSI/0007 – Short Temporal Coherence Optical Source With External Fiber Optics Cavity – CARMEM LÚCIA BARBOSA, JOSÉ KEBLER DA CUNHA PINTO
- BT/PSI/0008 – Hydrogenated Carbon Films Used as Mask in Wafer Processing With Integrated Circuits: Post-Processing – JUAN M. JARAMILLO O., RONALDO D. MANSANO, EDGAR CHARRY R.
- BT/PSI/0009 – Redes Neurais em VLS – ANTONIO RAMIREZ HIDALGO, FRANCISCO JAVIER RAMIREZ FERNANDEZ
- BT/PSI/0010 – Caracterização de Filmes Obtidos a Partir da Deposição por Plasma de Hexametildissilazana – SANDRINO NOGUEIRA, MARIA LÚCIA PEREIRA DA SILVA
- BT/PSI/0011 – InterFace: A Real Time Facial Animation System – JOSÉ DANIEL RAMOS WEY, MARCELO KNORICH ZUFFO
- BT/PSI/0012 – Análise de Desempenho Dinâmico de Sistemas de Transmissão em Corrente Contínua Multiterminais Série Utilizando GTO – MARIA APARECIDA DOS SANTOS, WALDIR PÓ
- BT/PSI/0013 – Estudo de Dispositivos Miniaturizados para Controle do Escoamento de Fluidos – ELIPHAS WAGNER SIMÕES, ROGÉRIO FURLAN
- BT/PSI/0014 – Projeto de um Sistema de Sinalização de Tronco E1: Um Estudo de Caso usando o Ambiente Ptolemy – OSCAR W. PEÑA GUILARTE, MARIUS STRUM
- BT/PSI/0015 – Obtenção de Filmes de Nitreto de Silício por Deposição Química Assistida por Plasma Acoplado Indutivamente – LUÍS DE S. ZAMBOM, ROGÉRIO FURLAN, RONALDO D. MANSANO
- BT/PSI/0016 – Obtenção de Oxinitretos de Porta por Processamento Térmico Rápido Visando a Fabricação de Circuitos Integrados MOS – LEANDRO ZEIDAN TOQUETTI, SEBASTIÃO G. SANTOS FILHO
- BT/PSI/0017 – Characterization of Silicon Oxide Thin Films Deposited by TEOS PECVD – ANA NEILDE R. DA SILVA, NILTON I. MORIMOTO
- BT/PSI/0018 – Estudo e Caracterização de Filmes Sipos para a Passivação de Dispositivos de Potência – EDUARDO DOS SANTOS FERREIRA, NILTON ITIRO MORIMOTO
- BT/PSI/0019 – Simulação, Funcional e Elétrica, de Diodos Controlados por Porta Visando Demonstrar a sua Aplicabilidade como Sensor de Radiação Luminosa – HUGO PUERTAS DE ARAÚJO, SEBASTIÃO GOMES DOS SANTOS FILHO
- BT/PSI/0020 – Graded-Channel Fully-Depleted Silicon-on-Insulator Nmosfet for Reducing the Parasitic Bipolar Effects – MARCELO ANTONIO PAVANELLO, JOÃO ANTONIO MARTINO, DENIS FLANDRE
- BT/PSI/0021 – FFT para Detecção de Aromas – G. C. SANTOS QUISPE, F. J. RAMIREZ FERNANDEZ
- BT/PSI/0201 – Estudo para Aplicação de Litografia por Feixe de Elétrons na Fabricação de Estruturas de Relevô Contínuo para Utilização em Microóptica Integrada – HAMILTON FERNANDES DE MORAES JUNIOR, ANTONIO CARLOS SEABRA
- BT/PSI/0202 – Sistemas de Adaptação ao Locutor Utilizando Autovozes – LISELENE DE ABREU BORGES, MIGUEL ARJONA RAMÍREZ
- BT/PSI/0203 – A Wideband Down-Converter MMIC with Gain Control for Digital Radio Systems – D. VIVEIROS JR., M. B. PEROTONI, M. A. LUQUEZE, D. CONSONNI, J. G. C. POLOTO
- BT/PSI/0204 – Highly Conductive N-Type $\mu\text{-Si:H}$ Films Deposited at Very Low Temperature – ALEXANDRE MANTOVANI NARDES, ELY ANTONIO TADEU DIRANI
- BT/PSI/0205 – Effect of Stencil Alignment on the Solder Beading in SMT Process – FLÁVIO SOUSA SILVA, MAURÍCIO MASSAZUMI OKA
- BT/PSI/0206 – Sistema de Reconhecimento de Voz Dependente de Locutor Utilizando-se a Transformada Discreta Cosseno – WASHINGTON LUIS SANTOS SILVA, IVANDRO SANCHES
- BT/PSI/0207 – Construção e Caracterização de Diodos N⁺ P com Contatos Al/Ni/TiSi₂ -RONALDO WILLIAN REIS, SEBASTIÃO GOMES DOS SANTOS FILHO

- BT/PSI/0208 – Diagnóstico de Falhas em Equipamentos Usando Técnicas de Redes Neurais Artificiais – MARIANA A. AGUIAR, ZSOLT L. KOVÁCS
- BT/PSI/0209 – Analysis of the Leakage Drain Current Carriers in SOI MOSFETs Operating at High-Temperatures – MARCELLO BELLODI, JOÃO ANTONIO MARTINO
- BT/PSI/0210 – A New Technique to Extract the Oxide Charge Density at Front and Back Interfaces of SOI nMOSFETs Devices – APARECIDO SIRLEY NICOLETT, JOÃO ANTONIO MARTINO
- BT/PSI/0211 – A New Methods for Determining the Silicon Film Doping Concentration and the Back Interface Oxide Charge Density Using SOI-MOS Capacitor – VICTOR SONNENBERG, JOÃO ANTONIO MARTINO
- BT/PSI/0212 – Produção de Novos Filmes para Detecção de Poluentes – ANTONIO PEREIRA DO NASCIMENTO FILHO, MARIA LÚCIA PEREIRA DA SILVA
- BT/PSI/0213 – Composição de Baixo Custo para Refeições Populares – GUSTAVO FELIPE PAOLILLO, FLÁVIO ALMEIDA M. CIPPARRONE
- BT/PSI/0214 – Posicionamento Automático de Estações para Atendimento de Usuários a Diversas Taxas – FABIO LEONEL ORSI, FLÁVIO ALMEIDA M. CIPPARRONE
- BT/PSI/0215 – Controle Ótimo de Potência em Redes de Comunicação sem Fio – TADEU JUNIOR GROSS, VANDERLEI A. DA SILVA, FLÁVIO ALMEIDA M. CIPPARRONE
- BT/PSI/0216 – Racionalização do Consumo de Energia Elétrica pelas Estações Rádio Base no Link Direto de um Sistema CDMA – E. M. G. STANCANELLI, FLÁVIO ALMEIDA M. CIPPARRONE
- BT/PSI/0217 – Otimização de Investimentos em Redes Celulares (Serviço de Valor Agregado) – J. P. G. GUIMARÃES, F. A. M. CIPPARRONE
- BT/PSI/0218 – Modelo de Otimização Linear para Programação da Produção – SERGIO ANTONIO RODRÍGUEZ, FLÁVIO ALMEIDA M. CIPPARRONE