

INFLUÊNCIA DE VÁRIAS FORMAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL SOBRE
RIGIDEZ ESTÁTICA DE UMA VIGA ENGASTADA EM BALANÇO.

CRUZ, C.-Dept. de Engenharia Mecânica da UFU
 RUFFINO, R.T.-Dept. de Engenharia Mecânica da
 Escola de Engenharia de São Car-
 los - USP

SUMÁRIO

Estudam-se as influências de várias formas de seção transversal sobre a rigidez estática de uma viga engastada em balanço submetida a esforços simultâneos de flexão e torção. Admite-se que a forma e todas as outras características geométricas da seção transversal seja constante ao longo de toda a viga. Alguns resultados teóricos foram comparados com resultados experimentais obtidos por método ótico.

SUMMARY

The influence of different shapes of cross sections on static stiffness of the cantilever beam twisted and bended simultaneously were studied. It was considered that the shape and all other geometric characteristics of the cross section are constant a long the beam lenght. Some theoretical results were compared with those experimentals obtained by an optical method.



1. Introdução.

Thum [1], Brker [2] e colaboradores estudaram a rigidez estática de várias formas simples de seção transversal em vigas sujeitas à flexão e torção separadamente. Partindo de tais estudos, CRUZ e RUFFINO [3], tendo a necessidade de otimizar a estrutura do Braço da Furadeira Radial, selecionaram várias formas geométricas simples de seções transversais mais apropriadas para conferir rigidez em vigas tipo "cantilever" submetidas à flexão e torção simultaneamente.

Nas seções subsequentes, trata-se de apresentar resumidamente o método utilizado para comparação das figuras geométricas e os principais resultados alcançados. No presente trabalho mantém-se constante a forma e todas as outras características da seção ao longo de toda a viga.

2. A formulação do problema.

Na fig.1 apresenta-se uma viga "cantilever" sujeita à força P que provoca momentos de flexão ($P \cdot x$) e de torção ($P \cdot d$) em uma seção transversal distante x da extremidade em balanço da viga.

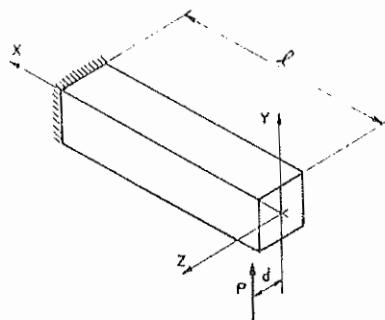


Fig.1- Esquema apresentando a viga, a solicitação e o sistema de coordenadas usado.

Seja

ℓ = comprimento de viga

d = distância do vetor P ao eixo x

θ_x = deformação angular devido à torção (giro em torno do eixo x)

θ_z = deformação angular devido à flexão (giro em torno do eixo z)

Tem-se:

$$\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_z^2} \quad (1)$$

onde θ = deformação angular resultante devido à torção e à flexão simultâneas,

seja

$$r = \frac{P}{\theta} \quad (2)$$

a rigidez aplicada ao caso em questão. A forma de seção transversal ótima será aquela que proporcionar maior valor de r para o mesmo volume de material (V_m). Ou ainda, aquela que tornar mínima a relação $\frac{\theta}{P}$ para o mesmo volume V_m .

Como

$$\theta_z = \int_0^\ell \frac{P \cdot x \cdot dx}{EJ_z} \quad (3)$$

e

$$\theta_x = \int_0^\ell \frac{M_t \cdot dx}{GJ_t} = \int_0^\ell \frac{P \cdot d \cdot dx}{GJ_t} \quad (4)$$

onde

E = módulo de elasticidade do material

J_z = momento de inércia da seção transversal de viga em relação ao eixo z passando pelo C.G. da seção.

G = módulo de elasticidade transversal do material.

J_t = momento polar de inércia da seção transversal

$$G = r'E \quad (5)$$

onde

$$r' = \frac{1}{2(1+\mu)} \quad (6)$$

sendo μ = coeficiente de Poisson, chega-se à seguinte formulação do problema:

Achar a forma de seção transversal que torna mínima a expressão:

$$\bar{p} = \frac{1}{L} \sqrt{\left(\int_0^L \frac{\frac{1}{2} x dx}{J_z} \right)^2 + d^2 \left(\int_0^L \frac{\frac{1}{2} x dx}{r' J_t} \right)^2} \quad (7)$$

sujeita ao vínculo $V_m = \text{constante}$.

As figuras geométricas simples selecionadas para este estudo acham-se desenhadas nas figuras 2, 3, 4, 5, e 6. Em realidade, cada uma dessas figuras é uma família de figuras às quais falta mais uma relação para a total caracterização. Esta relação

$$e = -\frac{a}{b} \quad (8)$$

aqui denominada "excentricidade", pode ser identificada, em cada caso, nas figuras 2 a 6 adiante. Então, além de identificar as melhores figuras geométricas, é necessário indicar também a melhor "excentricidade" em cada caso.

Para melhor caracterizar a solicitação, utiliza-se a relação

$$c = \frac{d}{g} \quad (9)$$

que é a relação entre o momento de torção (constante) e o momento fletor máximo (que se dá no engastamento). Se $c=0$, só há flexão. É interessante observar que as figuras só podem ser comparadas para um mesmo valor de c .

O valor de μ (coeficiente de Poisson) será considerado o valor médio do ferro fundido cinzento, $\mu=0,25$, que implica no valor de $r'=0,4$. Para outros materiais, basta utilizar seus

correspondentes valores de μ e utilizar a mesma metodologia aqui empregada.

Com as considerações acima, chega-se de (7) a

$$\frac{2\theta E}{P\ell^2} = \frac{1}{J_z^2} + \frac{25c^2}{J_t^2} \quad (10)$$

para se ter a rigidez máxima basta que

$$F = \frac{1}{J_z^2} + \frac{25c^2}{J_t^2} \quad (11)$$

seja mínimo para um mesmo valor de A onde: A =área da seção transversal da viga.

O valor de \underline{e} para o qual F é mínimo se obtém fazendo-se $\frac{\partial F}{\partial \underline{e}} = 0$. A equação $\frac{\partial F}{\partial \underline{e}} = 0$ gera expressões de \underline{e} em função de c , $e=f(c)$, que, por serem bastante extensas e complexas, não se acham aqui representadas analiticamente, e sim, graficamente pelas curvas $e=f(c)$ da figura 7 adiante.

3. As figuras das seções transversais e suas características.

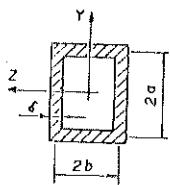
Nas figuras 2 a 6 apresentadas a seguir, tem-se as cinco formas de seção transversal com suas correspondentes características geométricas (A , J_z , J_t).

Logo após à figura 6 apresentam-se os valores de F^* de cada uma das figuras geométricas estudadas. Esta grandeza é definida por,

$$F^* = F \frac{A^6}{\delta} \quad (12)$$

Trata-se de um grupo adimensional, e serve para comparar as figuras em termos da rigidez em questão. Essas expressões de F^* acham-se representadas graficamente na figura 7.

Os interessados na dedução das expressões colocadas ao lado das figuras 2 a 6 poderão consultar o que está em 3. Adiante-se, no entanto, que por hipótese $\delta \leq 0,1b$; $\delta \leq 0,1a$.

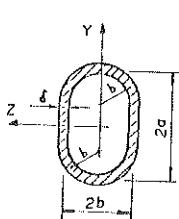


$$A = 4b\delta(e+1)$$

$$J_z = 4b^3e^2\delta\left(1+\frac{1}{3}e\right)$$

$$J_t = \frac{6b^3e^2\delta}{e+1}$$

Fig. 2- Seção transversal em forma de "coroa retangular".



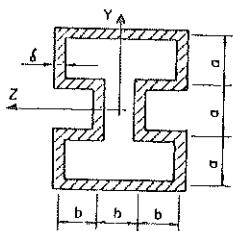
$$A = \left[4(e-1) + 2\pi\right] b\delta$$

$$J_z = \delta b^3 \left[\frac{4}{3}(e-1)^3 + 2B \right]$$

$$B = \left(e-1 + \frac{2}{\pi}\right)^2 \pi + 0,2976$$

$$J_t = \frac{2\delta b^3 \left[4(e-1) + \pi \right]^2}{2(e-1) + \pi}$$

Fig. 3- Seção transversal em forma de "coroa oval".

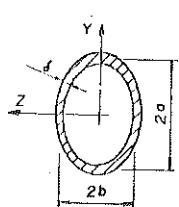


$$A = 2b\delta(5+3e)$$

$$J_z = 14,5 b^3 e^2 \delta + 4,167 b^3 e^3 \delta$$

$$J_t = \frac{98A^3 e^2}{8\delta^2 (5+3e)^4}$$

Fig. 4- Seção transversal em forma de "I vazado".



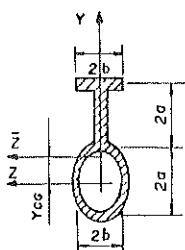
$$A = 4b\delta \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) e^{-1,435} \right]$$

$$J_z = \frac{\pi}{4} (e^3 + 3e^2) b^3 \delta$$

$$J_t = \frac{\delta \pi^2 b^3 e}{1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) e^{-1,435}}$$

Fig. 5- Seção transversal em forma de "coroa elíptica".

431



$$A = b\delta(2+2e+ke)$$

$$K = 4 \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) e^{-1,435} \right]$$

$$J_z = \left[\left(2 - \frac{6+4e}{2+2e+3k} \right)^2 e + \frac{e}{3} + \left(3 - \frac{6+4e}{2+2e+ke} \right)^2 \right] \times \frac{2A^3 e^2}{\delta^2 (2+2e+ke)^3}$$

Fig. 6- Seção transversal em forma de "coroa elíptica + perfil T".

"coroa rectangular"

$$F^* = \frac{256(e+1)^6}{e^4 \left(1 + \frac{e}{3}\right)^2} + \frac{400c^2(e+1)^8}{e^4}$$

"coroa oval"

$$F^* = \frac{64 \left[2(e-1) + \frac{\pi}{2} \right]^6}{\left\{ \frac{4}{3}(e-1)^3 + 2 \left[\left(e-1 + \frac{\pi}{2} \right)^2 \pi + 0,2976 \right] \right\}^2}$$

$$+ \frac{400c^2 \left[2(e-1) + \frac{\pi}{2} \right]^8}{\left[4(e-1) + \frac{\pi}{2} \right]^4}$$

"I vazado"

$$F^* = \frac{64(5+3e)^6}{e^4 (14,5 + 4,167e)^2} + \frac{25c^2 (5+3e)^8}{150,0625 e^4}$$

"coroa elíptica"

$$F^* = \frac{16k^6e^2}{\pi^2(e+3)^2} + \frac{25c^2k^8e^4}{16\pi^4} \quad k = 4 \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) e^{-1,435} \right]$$

"coroa elíptica + perfil T"

$$F^* = \frac{(2+2e+ke)^6}{e^4 \left[2e(2-B)^2 + \frac{2e}{3} + 2(3-B)^2 + \frac{\pi}{4}(e+3) + keB^2 \right]^2}$$

$$\frac{25c^2k^2(2+2e+ke)^6}{16\pi^4e^2}; \quad B = \frac{6+4e}{2+2e+ke}$$

4. Comparação entre as figuras geométricas.

Na figura 7 apresentam-se os gráficos de F^* e de \underline{e} de cada uma das figuras geométricas das figuras 2 a 6 em função de c . Em cada caso prático de \underline{c} poder-se-á escolher a melhor forma de seção transversal e, através da correspondente expressão $e=f(c)$, escolher a melhor excentricidade. As principais observações extraídas da figura 7 são:

- as figuras denominadas "coroa elíptica" e "coroa oval" apresentam desempenho aproximadamente iguais e bastante superior às demais;
- figuras complexas como o "I vazado" e a "elíptica + T" apresentam fraco desempenho para quase todos os valores de \underline{c} ;
- as curvas $e=f(c)$ seguem a mesma tendência. Como era de se esperar, tem valores grandes de \underline{e} para $c=0$ (só flexão) e valores tendendo para $\underline{e}=1$ nos casos de preponderância de torção (valores grandes para \underline{c}).

5. Verificação experimental.

O método usado para verificação experimental da rigidez consistiu na determinação de θ através de um método óptico que pode ser assim definido: método para medição difratométrica de deformações angulares (ou rotações) com o uso de um granulado ótico [3], [4].

As vigas utilizadas para os ensaios, em número de 3, foram confeccionadas em ferro fundido cinzento com comprimento $l=800\text{mm}$; peso $Q=97\text{kgf}$, $E=10,09 \times 10^3 \text{kgf/mm}^2$, $\mu = 0,25$. Os perfis utilizados foram os da figura 3 ("coroa oval"), figura 5 ("coroa elíptica") e figura 6 ("coroa elíptica + perfil T").

Conforme a figura 8, as peças foram confeccionadas com uma aba em cada extremidade, uma para fixação e outra para possibilitar a aplicação de cargas fazendo uso de pesos calibrados de 200kgf (precisão de 1gf) e cabos de aço. Em cada uma das peças foram feitas três medidas do ângulo θ (para cada uma tomando a média de quatro medições): uma para $c=0,00$, outra para $c=0,10$ e outra para $c=0,15$.

Os valores medidos, bem como os valores teóricos obtidos através de (10), apresentam-se nas tabelas a seguir.

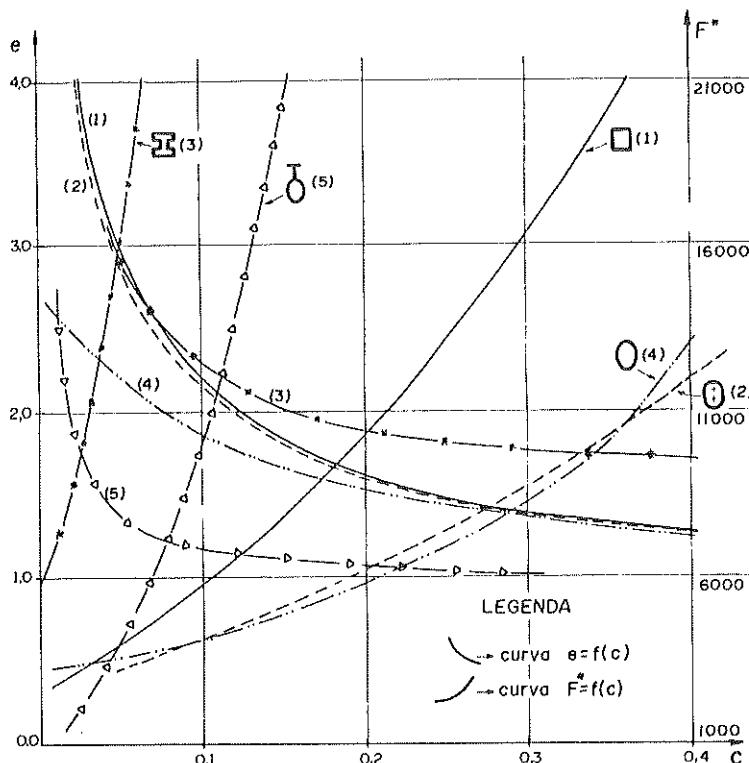


Fig. 7- Representação gráfica das expressões $F^* = f(c)$ e $e = f(c)$.

"coroa oval"

+

| c + | Valores de θ (μ Rad) | |
|--|----------------------------------|---------|
| | Teóricos | Medidos |
| 0,00 | 102 | 93 |
| 0,10 | 110 | 107 |
| 0,15 | 123 | 112 |
| para $\delta = 15\text{mm}$; $e = 1,83$ | | |
| $b = 65,45\text{mm}$ | | |

"coroa elíptica"

+

| c + | Valores de θ (μ Rad) | |
|--|----------------------------------|---------|
| | Teóricos | Medidos |
| 0,00 | 84 | 81 |
| 0,10 | 108 | 96 |
| 0,15 | 119 | 118 |
| para $\delta = 15\text{mm}$; $e = 1,68$ | | |
| $b = 77,9\text{mm}$ | | |

"coroa elíptica + T"

↓

| c ↓ | Valores de θ (μ Rad) | |
|---|----------------------------------|---------|
| | Teóricos | Medidos |
| 0,00 | 56 | 49 |
| 0,10 | 157 | 148 |
| 0,15 | 238 | 230 |
| para $\delta = 15\text{mm}$; $e = 1,13$ $b = 57,7\text{mm}$ | | |

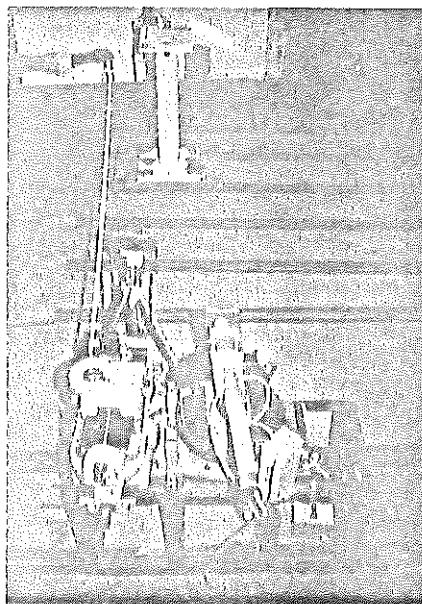


Fig.8- Vista geral dos equipamentos empregados na verificação experimental.

Apesar de terem sido poucas as medidas efetuadas e nem todas as formas de seção transversal experimentadas, os resultados experimentais estão de acordo com os resultados teóricos. Há de ser levado em conta que o desvio máximo calculado inerente ao método ótico utilizado foi de 8% e que as abas de fixação e de aplicação de carga "enrigecem" as vigas. Este úl

timo foi o principal responsável pelo fato de os valores medi-
dos de θ resultarem sistematicamente menores que os correspon-
dentes.

6. Conclusões.

As melhores formas de seção transversal são a "coroa oval" e a "coroa elíptica" para todos os valores de $c \geq 0,05$. Há uma leve vantagem da "elíptica" sobre a "oval" na faixa de c compreendida entre 0,10 e 0,35. No entanto, como a fabrica-
ção da forma "oval" é mais simples que a "elíptica", o proje-
tista deverá preferi-la mesmo nessa faixa em que é sobrepuja-
da pela "elíptica".

Fica evidenciado o fraco comportamento da "coroa retan-
gular" e de formas complexas com o "I vazado" e a "coroa elíp-
tica + perfil T".

7. Bibliografia.

- [1] THUM,A. -Neuere Anschauungen in der Gestaltung, Berichtswerk 74, Berlin VDI, Verlag, 1936.
- [2] ERKER,A. -Werhstoffausnutzung durch festig keitsgerechtes konstruieren, Z. VDI, vol.86, 1942, p.385.
- [3] CRUZ,C.; RUFFINO,R.T. -Uma contribuição ao projeto do con-
junto coluna-braco da furadeira radial, São Carlos, EESC-
USP, 1978, p.170.
- [4] CRUZ,C.; LUNAZZI,J.J. -Um método ótico para medidas de de-
formação angulares em estruturas, VI COBEN, Paper C-21,
pp.215-228, 1981.