

XIV Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia

1 a 3 de dezembro de 1993

**Instituto de Pesquisas Tecnológicas
do Estado de São Paulo S.A. - IPT**

São Paulo-SP - Brasil

**DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

ANAIS

Volume I

AMC

**Associação Latino-Americana
para Métodos Computacionais em Engenharia**



Instituto de Pesquisas Tecnológicas

**XIV Congresso Ibero
Latino-Americano de
Métodos Computacionais
em Engenharia**

Instituto de Pesquisas Tecnológicas
São Paulo - SP - Brasil
1 a 3 de dezembro de 1993

CONSIDERAÇÕES SOBRE PROJETO ELASTO-PLÁSTICO DE PÓRTICOS

Luiz Humberto Camilo

Helena M.C. Carmo Antunes

João Carlos Antunes O. Souza

Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos,
Universidade de São Paulo, Av. Dr. Carlos Botelho, 1465, CEP
13560, São Carlos-SP, Brasil.

SUMÁRIO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma formulação para a análise e síntese de estruturas em regime elastoplástico sob carregamentos fixos, variáveis e mistos. Um dos principais problemas é a determinação das relações independentes de equilíbrio envolvendo os momentos fletores, residuais ou não, nas seções transversais críticas. A solução dada visou a geração automática dessas relações independentes de equilíbrio para casos absolutamente gerais, utilizando convenientemente o Princípio dos Trabalhos Virtuais. É apresentada também a formulação essencial para a solução dos diversos problemas propostos, detalhando os processos de programação matemática utilizados.

1-INTRODUÇÃO

O software ora apresentado pretende ser uma ferramenta de utilização extremamente simples para aplicação no projeto de pórticos planos de baixa altura, nas condições em que forem válidas as hipóteses do método das rótulas plásticas. O programa desenvolvido cobre qualquer problema que relacione cargas externas aos diversos tipos de colapso plástico, seja o simples, o incremental ou o de plastificação alternada, prevendo o cálculo de parâmetros associados não só à análise mas também a problemas de síntese da estrutura. As hipóteses básicas constam de Neal [1] ou Heyman [2], por exemplo; aí também estão discutidas as hipóteses adicionais visando problemas de síntese e que implicariam no relacionamento linear do peso da estrutura aos momentos de plastificação total.

Os problemas propostos são todos formulados para solução direta ou iterativa como problema de programação matemática, resolvidos pelo algoritmo simplex, conforme Bazaraa [3].

0860829

2-POSSIBILIDADES PREVISTAS

Todos os problemas previstos foram enfrentados do ponto de vista dos teoremas estáticos tanto do colapso simples como do colapso incremental; esses problemas poderiam ser formulados todos como um problema de programação linear e são os seguintes:

a) Análise sob carregamento fixo

É determinado um único parâmetro T de proporcionalidade, que define todos os momentos de plastificação total, isto é:

$$\{M_p\} = T\{K_p\} \quad (1)$$

onde $\{K_p\}$ é um vetor constante.

A modelagem do problema seria:

Minimize T
Sujeito a:

$$\begin{aligned} -\{M_p\} &\leq \{M\} \leq \{M_p\} \\ [C] \{M\} &= \{B\} \end{aligned} \quad (2)$$

b) Análise sob carregamento variável

Seriam determinados dois parâmetros, T_a e T_i para os momentos de plastificação total; T_a definiria um limite de plastificação alternada e T_i um limite de colapso incremental. Sendo M^{\max} e M^{\min} os limites algébricos para os momentos fletores, correspondentes à situação de serem computados elasticamente, e sendo $\{M_y\} = T\{K_y\}$, o problema de determinar T_a pode ser posto como:

Minimize T_a
Sujeito a:

$$\{M^{\max}\} - \{M^{\min}\} \leq 2\{M_y\} \quad (3)$$

O problema de determinar T_i implica também em determinar $\{M_r\}$, correspondente aos momentos residuais, podendo ser colocado como:

Minimize T_i
Sujeito a:

$$\begin{aligned} \{M_r\} + \{M^{\max}\} &\leq \{M_p\} \\ \{M_r\} + \{M^{\min}\} &\geq \{M_p\} \\ [C] \{M_r\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (4)$$

SYSNO	0860829
PROD	0001301
ACERVO EESC	

O limite de acomodação estrutural T_s seria o menor dos valores T_a e T_i .

c) Síntese sob carregamento fixo

Assumindo como objetivo minimizar o peso da estrutura, com as hipóteses discutidas em [1], é possível representar a função X cuja minimização equivale a esse objetivo como:

$$X = \{M_p\}^t \{L\} \quad (5)$$

onde L_i é a soma dos comprimentos das barras com cada um dos M_{p_i} .

Supondo que os momentos de plastificação sejam definidos agora por diversos parâmetros:

$$\{M_p\} = [K] \{T\} \quad (6)$$

com $[K]$ tendo um único elemento, constante, por linha, o problema pode ser posto como:

Minimize

$$\{M_p\}^t \{L\}$$

Sujeito a:

$$-\{M\}_p \leq \{M\} \leq \{M\}_p \quad (7)$$

$$[C] \{M\} = \{B\}$$

d) Síntese sob carregamento variável

Com a indefinição das seções transversais das barras, não se tem a priori possibilidade de calcular a envoltória elástica de momentos expressa pelos vetores $\{M^{max}\}$ e $\{M^{min}\}$; é possível evitar recair num caso extremamente complexo de programação não linear com a mera introdução de um processo iterativo rudimentar, sugerido por Domaszewski [4]; parte-se de uma distribuição inicial $\{I\}_0$ de momentos de inércia, resolvendo todo um problema de análise sob carregamento variável para determinar um primeiro conjunto de momentos de plastificação total $\{M_p\}_0$ e com isso redefinir $\{I\}$; essa redefinição é feita com uma expressão do tipo:

$$I = c(M_p)^\gamma \quad (8)$$

com c e γ constantes, associáveis a cada forma possível de seção transversal, ou para "famílias" usuais de perfis. Com isso é possível montar um processo de convergência testando ou o peso X ou cada um dos M_{p_i} .

O problema pode ser modelado em cada passo como:

$$\text{Adotar } \{I\}_0 \text{ e } \{M_p\}_0 = [K] \{T\}_0$$

$$\text{Minimize } X = \{M_p\}^t \{L\}$$

Sujeito a:

$$\{M_r\} + \{M^{\max}\} \leq \{M_p\}$$

$$\{M_r\} + \{M^{\min}\} \geq -\{M_p\}$$

(9)

$$[C] \{M_r\} = \{0\}$$

Recalcular:

$$I = c (M_p)^{\gamma}$$

Repetir o processo até haver convergência de X , $\{T\}$ ou $\{M_p\}$.

Na modelagem proposta são necessárias adaptações no sentido de trabalhar com variáveis não negativas, o que é um problema elementar aqui omitido.

3-RELAÇÕES INDEPENDENTES DE EQUILÍBRIO

As expressões $[C] \{M_r\} = \{0\}$ ou $[C] \{M\} = \{B\}$, que aparecem nas modelagens dos problemas propostos, constituem-se em relações independentes de equilíbrio envolvendo esforços selecionados, no caso apenas os momentos fletores, e as cargas previstas. Um dos pontos mais complicados da solução desses problemas é a geração automática dessas relações, para casos absolutamente gerais, envolvendo técnicas matriciais típicas tanto da aplicação do processo dos esforços quanto da do processo dos deslocamentos e previstas por Przemieniecki [5] ou [6] para uma análise por subestruturação com o processo de esforços.

Um primeiro passo nessa geração é criar as relações gerais de equilíbrio, envolvendo reações de apoio, esforços axiais, esforços cortantes, momentos fletores e carregamentos externos; dessas relações são selecionadas as independentes e posteriormente com um algoritmo típico de uma eliminação de Gauss, são selecionados as que podem ser expressas apenas em termos dos momentos fletores e do carregamento externo.

De uma maneira geral as relações de equilíbrio podem ser representadas matricialmente por:

$$[M] \{P\} + [N] \{F_r\} = \{F\}$$

(10)

onde:

- $[M]$ e $[N]$ são matrizes retangulares envolvendo cossenos diretores das direções das barras em relação ao sistema global;
- $\{P\}$ vetor dos esforços de extremidade de barra;
- $\{F\}$ vetor das ações nodais aplicadas;

$\{F_r\}$ vetor das reações complementares só nas coordenadas onde existem vínculos.

A equação pode ser escrita na forma:

$$[E] \{P^*\} = \{F\} \quad (11)$$

onde:

$$[E] = [[M] [N]] \quad (12)$$

$$\{P^*\} = \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{F_r\} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Pensando na geração dessas matrizes, sejam supostas, para uma barra, três sistemas de coordenadas locais:

a) Típico do processo dos esforços, em relação ao qual os esforços seriam independentes, e com direções associadas à barra; o vetor de esforços seria $\{P\}$;

b) Típico do processo dos deslocamentos, em relação ao qual os deslocamentos seriam independentes, e com direções associadas à barra; o vetor de esforços seria $\{P_e\}$ e o de deslocamentos $\{\delta_e\}$.

c) Típico do processo dos deslocamentos, em relação ao qual os deslocamentos seriam também independentes, e com direções associados ao sistema global, da estrutura; o vetor de esforços seria $\{P_g\}$ e o de deslocamentos $\{\delta_g\}$.

Sendo $\{u\}$ o vetor de deslocamento no sistema global, é extremamente simples gerar $[\beta_e]_i$ e $[\beta_g]_i$, para a barra i , tais que:

$$\{\delta_e\}_i = [\beta_e]_i \{\delta_g\}_i \quad (14)$$

$$\{\delta_g\}_i = [\beta_g]_i \{u\} \quad (15)$$

Com as relações de equilíbrio da barra é também imediato gerar $[\gamma_e]_i$ tal que:

$$\{P_e\}_i = [\gamma_e]_i \{P\}_i \quad (16)$$

No outro sistema é fácil obter também:

$$\{P_g\}_i = [\gamma_g]_i \{P\}_i \quad (17)$$

ou diretamente, ou usando o P.T.V. para relacionar $[\gamma_g]_i$ a $[\gamma_e]_i$.

Assim, estando $\{P_e\}_i$ e $\{P_g\}_i$ em equilíbrio, supondo deslocamentos virtuais $\{\delta_e\}_i$ e $\{\delta_g\}_i$ compatíveis, portanto

relacionáveis por:

$$\{\delta_e\}_i = [\beta_e]_i \{\delta_g\}_i \quad (18)$$

tem-se, do P.T.V.:

$$\{\delta_e\}_i^t \{P_e\}_i = \{\delta_g\}_i^t \{P_g\}_i$$

donde:

$$\{\delta_g\}_i^t [\beta_e]_i^t \{P_e\}_i = \{\delta_g\}_i^t \{P_g\}_i$$

portanto:

$$\{P_g\}_i = [\beta_e]_i^t \{P_e\}_i$$

e com isto:

$$[\gamma_g]_i = [\beta_e]_i^t [\gamma_e]_i \quad (19)$$

Com $\{P_g\}$ e $\{P\}$ incluindo em sequência todos os $\{P_g\}_i$ e $\{P\}_i$, é fácil fazer:

$$\{P_g\} = [\gamma_g] \{P\} \quad (20)$$

com:

$$[\gamma_g] = \begin{bmatrix} [\gamma_g]_1 & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [0] & \dots & [\gamma_g]_i & \dots & [0] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [0] & \dots & [0] & \dots & [\gamma_g]_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

e:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \vdots \\ \{P\}_i \\ \vdots \\ \{P\}_n \end{Bmatrix} \quad \{P_g\} = \begin{Bmatrix} \{P_g\}_1 \\ \vdots \\ \{P_g\}_i \\ \vdots \\ \{P_g\}_n \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Sendo $\{F_r^*\}$ o vetor $\{F_r\}$ de reações complementares, só que agora expandido para todas as coordenadas nodais referidas ao sistema global de referência, as forças $\{F\}$, $\{F_r^*\}$ e $\{P_g\}$

constituem um estado de forças em equilíbrio, ao qual se pode impor um estado de deslocamentos virtuais, compatíveis, com $\{u\}$ e $\{\delta_g\}$, relacionados por:

$$\{\delta_g\} = [\beta_g] \{u\} \quad (23)$$

Com isso, do P.T.V.:

$$\{\delta_g\}^t \{P_g\} = \{u\}^t \{ \{F\} - \{F_r^*\} \}$$

Com a (23):

$$\{u\}^t [\beta_g]^t \{P_g\} = \{u\}^t \{ \{F\} - \{F_r^*\} \}$$

donde:

$$[\beta_g]^t \{P_g\} + \{F_r^*\} = \{F\} \quad (24)$$

É fácil criar $[N]$ para fazer a expansão:

$$\{F_r^*\} = [N] \{F_r\} \quad (25)$$

e como $\{P_g\} = [\gamma_g] \{P\}$, tem-se:

$$[\beta_g]^t [\gamma_g] \{P\} + [N] \{F_r\} = \{F\} \quad (26)$$

Com isso então tem-se:

$$[M] = [\beta_g]^t [\gamma_g] \quad (27)$$

ou, particionando:

$$[M] = \sum_i [\beta_g]_i^t [\gamma_g]_i \quad (28)$$

Com isso tem-se as relações gerais de equilíbrio:

$$[E] \{P^*\} = \{F\} \quad (29)$$

onde:

$$[E] = [[M] \quad [N]] \quad (30)$$

$$\{P^*\} = \begin{Bmatrix} \{P\} \\ \{F_r\} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Montadas essas relações gerais é fácil, por um procedimento de eliminação de Gauss selecionar aquelas independentes entre si

que envolvam só momentos e forças externas; as restantes não estariam em princípio envolvidos no processo de cálculo e só serviriam para uma determinação final de esforços internos e reações.

4-APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA

O programa desenvolvido, apresentado em [7], utiliza a linguagem FORTRAN-77. Quanto ao espaço de memória necessário para executá-lo, vai depender não só do espaço gasto para a codificação do programa mas também das dimensões das matrizes e vetores necessários para o cálculo do pórtico. Convém lembrar que esse espaço é limitado em 640 Kbytes de acordo com o equipamento que está sendo utilizado, do tipo PS 386.

Para dimensionar as matrizes e os vetores, foi utilizado o comando PARAMETER em que há necessidade de especificar somente as seguintes variáveis auxiliares:

- M1: número de barras (NBAR)
- M2: número de nós (NNOS)
- M3: número de parâmetros referentes aos momentos de plastificação total das barras (MP)
- M4: número de nós vinculados (NNV)
- M5: número de coordenadas globais carregadas (NNC)

O programa-fonte, identificado pelo nome PASM RP.FOR, é composto de um programa principal e mais 8 sub-rotinas, descritas na Tabela 1.

O programa trabalha com 3 arquivos. O primeiro é o de entrada de dados que deverá ser criado pelo usuário utilizando-se um editor qualquer. Os dois arquivos restantes são criados pelo programa; será utilizado para armazenar os coeficientes das relações independentes de equilíbrio e o outro para guardar os dados de entrada e saída dos resultados da estrutura.

Quanto à unidade a ser utilizada para a entrada de dados e saída dos resultados, fica a critério do usuário.

Sendo:

- COD1 = 1;2 → análise sob carregamento fixo;
- COD1 = 3 → síntese sob carregamento fixo;
- COD1 = 4 → análise sob carregamento variável;
- COD1 = 5 → síntese sob carregamento variável,

é possível compôr o diagrama de estrutura da Figura 1.

SUB-ROTINA	DESCRIÇÃO
CIMP	Determina o expoente " γ " e a constante "c" referentes à relação entre o momento de inércia e o momento de plastificação total para os diversos tipos de seções transversais usuais.
DADRES	Impressão dos dados do pórtico e dos resultados do programa.
ENVOLT	Cálculo da envoltória elástica dos momentos fletores.
EQUIL	Determina as relações independentes de equilíbrio de pórticos planos.
GAUSS1	Resolução de sistemas de equações pelo método de Gauss para matrizes não simétricas.
GAUSS2	Resolução de sistemas de equações pelo método de Gauss para o caso de matriz simétrica armazenada na forma completa e com vários termos independentes.
PERFILI	Determina o expoente " γ " e a constante "c" referentes à relação entre o momento de inércia e o momento de plastificação total dos perfis I.
SIMPLEX	Otimização de problemas sujeitos a restrições lineares.

4-REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] NEAL, B.G. The plastic methods of structural analysis. 3rd.ed.London, Chapman and Hall, 1977. 218p.
- [2] HEYMAN, J. Plastic design of frames 2-Applications. London, Cambridge University Press, 1971. 300p.
- [3] BAZARAA, M.S. & JARVIS, J.J. Linear programming and network flows. New York, John Wiley & Sons, 1977. 578p.
- [4] DOMASZEWSKI, M. & SAMP-STANISLAWSKA, E.M. Optimal shakedown design of frames by linear programming. Computers & Structures, 21 (3). 379-385; 1985.
- [5] PRZEMIENIECKI, J.S. Theory of matrix structural analysis. New York, McGraw-Hill, 1968. 474p.
- [6] PRZEMIENIECKI, J. S. & DENKE, P.H. Joining of complex substructures by the matrix force method. Journal Aircraft, 3 (3): 236-243, 1966.
- [7] CAMILO, L.H., Problemas de análise e síntese no método das rótulas plásticas. 280p., 1991. (Dissertação de Mestrado), Área de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

