



Escola Politécnica - EPBC



31200053384

BT/PEF-8816

ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ARCOS

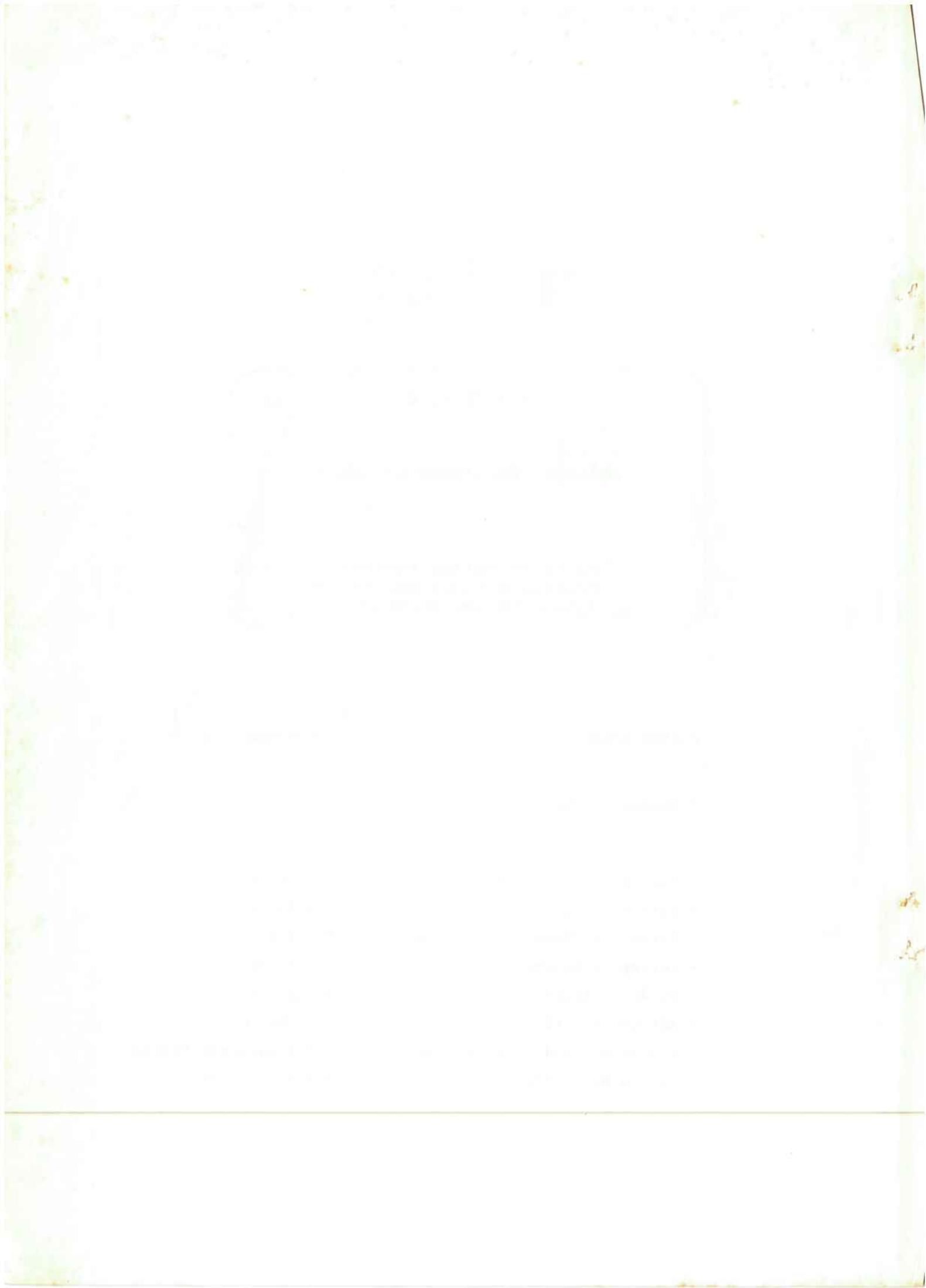
Paulo de Mattos Pimenta  
Professor Livre-Docente  
(recebido em 30/06/88)

EDITOR CHEFE

C.E.N.Mazzilli

COMISSÃO EDITORIAL

- |                                     |                       |
|-------------------------------------|-----------------------|
| - Engenharia de Solos               | W.Hachich             |
| - Estruturas de Concreto            | P.B.Fusco             |
| - Estruturas Metálicas e de Madeira | P.B.Fusco             |
| - Interação Solo-Estrutura          | C.E.M.Maffei          |
| - Mecânica Aplicada                 | D.Zagottis            |
| - Métodos Numéricos                 | J.C. André            |
| - Pontes e Grandes Estruturas       | J.C.Figueiredo Ferraz |
| - Teoria das Estruturas             | V.M.Souza Lima        |



## ANALISE NAO-LINEAR DE ARCOS

Paulo de Mattos Pimenta  
Prof. Livre-Docente  
Departamento de Engenharia de  
Estruturas e Fundações da  
Escola Politécnica da  
Universidade de São Paulo

### Resumo

Este trabalho apresenta a dedução consistente de um elemento finito de arco apropriado para a análise não-linear. Os nós do elemento podem sofrer grandes deslocamentos e rotações, assim como o seu eixo pode sofrer grandes alongamentos e curvaturas. O elemento é bastante geral, acomodando curvaturas iniciais arbitrárias e material elasto-plástico.

### Abstract

This work presents a consistent derivation of a finite element for the non linear analysis of arches. The element nodes can undergo large displacements and rotations while its axis can suffer large elongations and curvatures. This very general element may have arbitrary initial curvature and be made of elastic-plastic material.

### 1. Introdução

Em [1] foi introduzida uma pequena correção na clássica equação da linha elástica de barras retas, onde grandes deslocamentos e rotações são permitidos. Em [2] foi, então, desenvolvido um elemento finito para a análise não-linear de pórticos planos, o qual permite que os nós do pórtico sofram grandes deslocamentos e rotações e que as barras, inicialmente retas, sofram grandes alongamentos e curvaturas.



Os resultados dos dois trabalhos supra-citados são aqui extendidos para barras inicialmente curvas. No item 2, a equação da linha elástica de arcos é corretamente deduzida, para depois, no item 3, com a ajuda de uma formulação Lagrangiana, apresentar-se um elemento finito consistente de arco.

## 2. A equação da linha elástica de barras inicialmente curvas

Considere-se um elemento diferencial de uma barra curva na configuração inicial, ou de referência, limitado por duas seções transversais normais a um eixo arbitrariamente definido, conforme a figura 1. A fibra ao longo deste eixo tem o comprimento  $d\bar{s}_r$  dado por

$$d\bar{s}_r = R_r d\beta \quad (1)$$

onde  $R_r$  é o raio de curvatura da barra naquele ponto e  $d\beta$  é o ângulo interno do setor definido pelas seções transversais. Para uma fibra distante  $r$  do eixo, como indicado na figura 1, tem-se uma expressão semelhante.

$$ds_r = (R_r - r) d\beta \quad (2)$$

De (1) e (2) tem-se, imediatamente, que

$$ds_r = d\bar{s}_r - r d\beta \quad (3)$$



figura 1: Elemento diferencial de barra curva

Considere-se, agora, o mesmo elemento diferencial na configuração deformada, ou atual, de acordo com a mesma figura 1. A hipótese de Euler-Bernoulli das seções transversais permanecerem planas e indeformáveis foi adotada. A fibra do eixo mede agora  $d\bar{s}_a$ , dado por

$$d\bar{s}_a = R_a (d\alpha + d\beta) \quad (4)$$



onde  $R_a$  é o novo raio de curvatura e  $d\alpha + d\beta$  é o novo ângulo interno. Uma fibra distante  $r$  do eixo mede então

$$ds_a = (R_a - r)(d\alpha + d\beta) \quad (5)$$

De (4) e (5) segue imediatamente, que

$$ds_a = d\tilde{s}_a - r(d\alpha + d\beta) \quad (6)$$

O estiramento da fibra do eixo é definido como

$$\lambda = \frac{ds_a}{ds_r} \quad (7)$$

enquanto o estiramento de uma fibra distante  $r$  do eixo é dado por

$$\lambda' = \frac{ds_a}{ds_r} \quad (8)$$

Mas

$$\frac{ds_a}{ds_r} = \frac{(ds_a/d\tilde{s}_r)}{(ds_r/d\tilde{s}_r)} \quad (9)$$

Assim, ao introduzir-se (3) e (6), tem-se

$$\lambda = \frac{\lambda' - r(\alpha' + \beta')}{1 - r\beta'} \quad (10)$$

onde a diferenciação segundo  $\tilde{s}_r$  foi indicada por

O alongamento linear da fibra do eixo é definido por

$$\epsilon = \lambda - 1 \quad (11)$$

Já para o alongamento linear de uma fibra distante  $r$  do eixo, tem-se a seguinte expressão.

$$\epsilon' = \lambda' - 1 \quad (12)$$

Com a ajuda de (10) e (11), de (12) chega-se em

$$\epsilon' = \frac{\epsilon - r\alpha'}{1 - r\beta'} \quad (13)$$

Definindo o esforço normal e o momento fletor em função da tensão normal  $\sigma$ , como usual, tem-se

$$N = \int_A \sigma dA \quad (14)$$



e

$$M = - \int_A r \sigma dA \quad (15)$$

onde  $A$  é a seção transversal da barra. Se se admitir a lei de Hooke

$$\sigma = E \epsilon \quad (16)$$

para cada fibra, com  $E$  sendo o módulo de elasticidade, tem-se de (13), (14) e (15)

$$N = EA^* \bar{\epsilon} - ES^* \alpha' \quad (17)$$

$$M = - ES^* \bar{\epsilon} + EI^* \alpha' \quad (18)$$

onde

$$A^* = \int_A \frac{1}{1-r\beta'} dA \quad (19)$$

$$S^* = \int_A \frac{r}{1-r\beta'} dA \quad (20)$$

$$I^* = \int_A \frac{r^2}{1-r\beta'} dA \quad (21)$$

Se o eixo for colocado de tal forma que  $S^* = 0$ , tem-se

$$N = EA^* \epsilon \quad (22)$$

$$M = EI^* \alpha' \quad (23)$$

que são muito semelhantes às expressões correspondentes das barras retas.

Resta, agora, deduzir as expressões analíticas de  $\alpha'$  e  $\epsilon$  em função das coordenadas dos pontos do eixo da barra na configuração de referência e de seus deslocamentos. Para tanto considere-se a figura 2, onde as coordenadas dos pontos do eixo são designadas por  $x_r$  e  $y_r$  na configuração de referência e por  $x_a$  e  $y_a$  na configuração atual. Os deslocamentos lá indicados são designados por  $u$  e  $v$ , sendo que

$$x_a = x_r + u \quad y_a = y_r + v \quad (24)$$



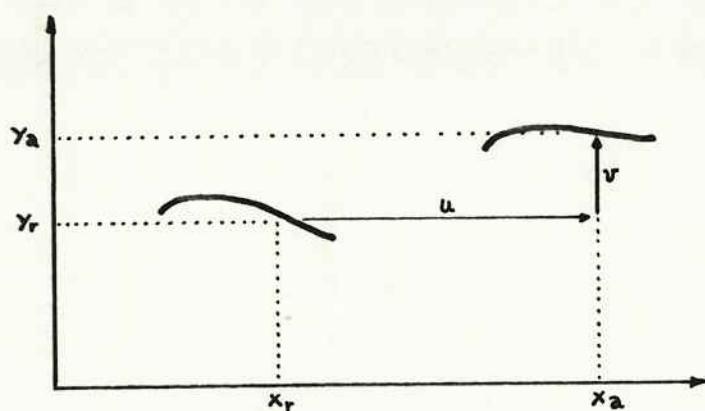


figura 2: Deslocamentos de uma barra curva

O estiramento da fibra do eixo é dado por

$$\bar{\lambda} = \left[ \frac{ds_a^2}{ds_r^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{x_a'^2 + y_a'^2}{x_r'^2 + y_r'^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

Introduzindo-se (24) em (25), chega-se em

$$\bar{\lambda} = \left[ \frac{(x_r' + u')^2 + (y_r' + v')^2}{x_r'^2 + y_r'^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

Voltando-se a (1) e (7), tem-se que o estiramento da fibra do eixo pode ser expresso da seguinte forma

$$\bar{\lambda} = R_a (\alpha' + \beta') \quad (27)$$

Logo

$$\alpha' = \bar{\lambda}/R_a - \beta' \quad (28)$$

E interessante observar que a curvatura inicial da barra é dada por

$$k_r = 1/R_r = \beta' \quad (29)$$

assim como a curvatura atual é dada por

$$k_a = 1/R_a = \alpha' + \beta' \quad (30)$$

De (28) decorre então

$$\alpha' = \bar{\lambda} k_a - k_r \quad (31)$$

As curvaturas inicial e atual são expressas pela conhecida fórmula da curvatura para curvas planas



$$\kappa_r = \frac{y_r''x_r' - x_r''y_r'}{[x_r'^2 + y_r'^2]^{3/2}} \quad (32)$$

$$\kappa_a = \frac{y_a''x_a' - x_a''y_a'}{[x_a'^2 + y_a'^2]^{3/2}} \quad (33)$$

Introduzindo (26), (32) e (33) em (31), tem-se, finalmente, que

$$\alpha' = \frac{\frac{(y_r''+v'')(x_r'+u') - (x_r''+u'')(y_r'+v')}{(x_r'+u')^2 + (y_r'+v')^2} - \frac{y_r''x_r' - x_r''y_r'}{x_r'^2 + y_r'^2}}{[x_r'^2 + y_r'^2]^{1/2}} \quad (34)$$

As expressões (26) e (34) podem ser colocadas em função das derivadas das coordenadas e dos deslocamentos segundo a coordenada  $x_r$ , o que, às vezes, é mais cômodo:

$$\bar{\lambda} = \left[ \frac{(1+u')^2 + (y_r'+v')^2}{1 + y_r'^2} \right]^{1/2} \quad (35)$$

$$\alpha' = \frac{\frac{(y_r''+v'')(1+u') - u''(y_r'+v')}{(1+u')^2 + (y_r'+v')^2} - \frac{y_r''}{1+y_r'^2}}{[1 + y_r'^2]^{1/2}} \quad (36)$$

Em (35) e (36) o sinal  $'$  indica diferenciação segundo  $x_r$ . Felizmente as expressões acima não são necessárias para a formulação do elemento do próximo item.

Observe-se, para concluir, que, se a barra for inicialmente reta, isto é, se  $\kappa_r = y_r' = y_r'' = 0$ , então as fórmulas acima se reduzem às obtidas em [1].

### 3. O elemento finito de arco

Considere-se que a estrutura esteja colocada no plano definido pelos eixos cartesianos  $x$  e  $y$ . Os nós da estrutura possuem três graus de liberdade, a saber, os deslocamentos  $u$  e  $v$  e a rotação  $\theta$ . As rotações são consideradas positivas se forem anti-horárias.

Examine-se, agora, um elemento de barra curva, cuja corda tem o comprimento  $l_r$ , de acordo com a figura 3. Centrado



nesta corda, coloca-se um sistema local de coordenadas  $x_r$  e  $y_r$ , de acordo com a mesma figura. A corda faz um ângulo  $\Phi_r$  com o eixo  $x$  do sistema global, enquanto o eixo da barra faz um ângulo  $\beta$  com o eixo  $x_r$  do sistema local.

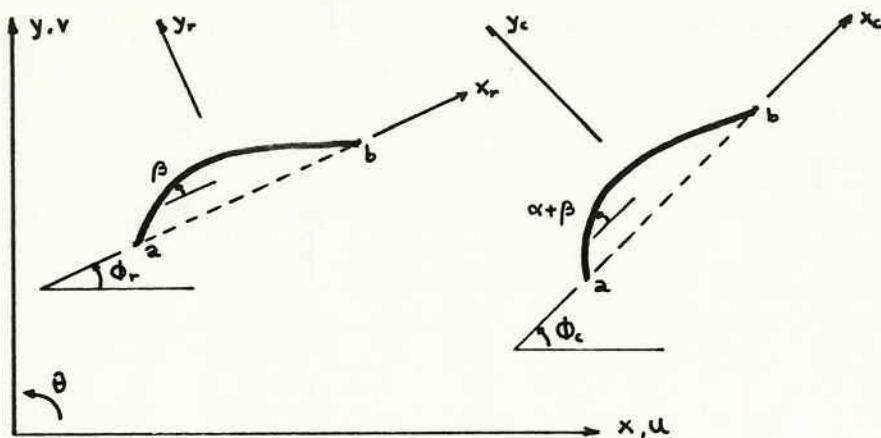


figura 3: Barra curva nas configurações de referência e atual

Na configuração atual, a corda da barra deformada tem comprimento  $l_c$ . Um sistema local com os eixos  $x_c$  e  $y_c$  é colocado centrado nesta corda, conforme a figura 3. O ângulo entre a corda e o eixo  $x$  é denotado por  $\Phi_c$ , enquanto o ângulo entre o eixo da barra e o eixo  $x_c$  é dado por  $\alpha + \beta$ .

O estiramento e o alongamento linear da corda são definidos por

$$\lambda_c = l_c/l_r \quad (37)$$

$$\epsilon_c = \lambda_c - 1 \quad (38)$$

Os graus de liberdade naturais ou corrotacionais do elemento são definidos por

$$q_1 = \epsilon_c \quad (39)$$

$$q_2 = \alpha_a - \alpha_b \quad (40)$$

$$q_3 = \alpha_a + \alpha_b \quad (41)$$

onde  $a$  e  $b$  identificam as extremidades do elemento.  $q_1$  mede o alongamento da corda, enquanto  $q_2$  e  $q_3$  medem a flexão simétrica e antissimétrica respectivamente.

Os graus de liberdade cartesianos do elemento são reunidos no vetor



$$\mathbf{p} = \{ u_a \ v_a \ \theta_a \ u_b \ v_b \ \theta_b \} = \{ p_i \} \quad (42)$$

E importante relacionar-se os graus de liberdade  $q_\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ ) com os graus de liberdade  $p_i$  ( $i=1,\dots,6$ ). O alongamento linear  $q_1$ , é dado por (38) com

$$l_r = [(x_{rb}-x_{ra})^2 + (y_{rb}-y_{ra})^2]^{1/2} \quad (43)$$

$$l_c = [(x_{cb}-x_{ca})^2 + (y_{cb}-y_{ca})^2]^{1/2} \quad (44)$$

Os graus de liberdade  $q_2$  e  $q_3$  são, por sua vez, dados por

$$q_2 = (\theta_a - \theta_b) - (\beta_a - \beta_b) \quad (45)$$

$$q_3 = (\theta_a + \theta_b) - (\beta_a - \beta_b) - 2(\Phi_c - \Phi_r) \quad (46)$$

onde

$$\Phi_c - \Phi_r = \arcsen\{l_r^{-1}[(x_{rb}-x_{ra})\sin\Phi_c - (y_{rb}-y_{ra})\cos\Phi_c]\} \quad (47)$$

$$\cos\Phi_c = (x_{cb}-x_{ca})/l_c \quad (48)$$

$$\sin\Phi_c = (y_{cb}-y_{ca})/l_c \quad (49)$$

E oportuno determinar-se as derivadas de  $q_\alpha$  em relação a  $p_i$ , indicando-as por  $q_{\alpha,i}$ . Elas podem, então, ser reunidas numa matriz  $3 \times 6$  dada pelo seguinte produto

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} \ \mathbf{T} \quad (50)$$

com

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -1/l_r & 0 & 0 & 1/l_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2/l_c & 1 & 0 & -2/l_c & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t & 0_3 \\ 0_3 & t \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \cos\Phi_c & \sin\Phi_c & 0 \\ -\sin\Phi_c & \cos\Phi_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$



$T$  é a tradicional matriz de mudança de sistema de coordenadas e  $\tilde{B}$  é a forma local de  $B$ .  $O_3$  é a matriz nula  $3 \times 3$ .

As segundas derivadas de  $q_\alpha$  em relação a  $p_i$ , aqui denotadas por  $q_{\alpha,ij}$ , são reunidas em três matrizes simétricas  $G_\alpha$  de dimensão  $6 \times 6$ , cujos elementos são os  $q_{\alpha,ij}$ , expressas pelos produtos:

$$G_\alpha = TT^T \tilde{G}_\alpha T \quad (54)$$

com

$$\tilde{G}_1 = \frac{1}{l_r l_c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\tilde{G}_2 = O_6 \quad (56)$$

$$\tilde{G}_3 = \frac{2}{l_c^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Admitindo que as deformações  $\epsilon$  de um elemento de arco sejam funções de  $q_\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ ), tem-se

$$\epsilon = \epsilon(q_\alpha) \quad (58)$$

A deformação virtual de uma fibra, designada por  $\delta\epsilon$ , é obtida por diferenciação de (58), através da regra da cadeia, resultando em

$$\delta\epsilon = \epsilon_{,\alpha} q_{\alpha,i} \delta p_i \quad (59)$$

onde a convenção da somatória foi adotada com os índices gregos variando de 1 a 3 e os índices latinos de 1 a 6. Ademais a diferenciação foi indicada por uma vírgula, como usual.

O trabalho virtual interno de um elemento é dado por



$$\delta W_I = \int_V \sigma \delta \epsilon dV \quad (60)$$

onde  $V$  é o volume do elemento.

Definindo-se o vetor das forças nodais internas  $P$  de tal forma que

$$\delta W_I = P^T \delta p \quad (61)$$

chega-se, com a ajuda de (50), (59) e (60), em

$$P = T^T \bar{P} \quad (62)$$

com

$$\bar{P} = \bar{B}^T Q \quad (63)$$

$Q$  é um vetor de dimensão 3, cujas componentes  $Q_\alpha$  são dadas por

$$Q_\alpha = \int_V \sigma \epsilon_{,\alpha} dV \quad (64)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento é denotada por  $k$ , e suas componentes  $k_{ij}$  são dadas pela diferenciação de  $P_i$  em relação a  $p_j$ . Para isso, coloca-se, inicialmente, a expressão (62) e (63) em forma indicial.

$$P_i = Q_\alpha q_{\alpha,i} \quad (65)$$

A seguir, por diferenciação de (65), tem-se

$$k_{ij} = Q_{\alpha,B} q_{\alpha,i} q_{B,j} + Q_\alpha q_{\alpha,ij} \quad (66)$$

O termo  $Q_{\alpha,B}$  é dado pela diferenciação de (64):

$$Q_{\alpha,B} = \int_V (D \epsilon_{,\alpha} \epsilon_{,\beta} + \sigma \epsilon_{,\alpha\beta}) dV \quad (67)$$

onde

$$D = d\sigma/d\epsilon \quad (68)$$

é o módulo de rigidez tangente do material.

A matriz de rigidez tangente pode, então, ser colocada de forma matricial como se segue.

A  
B  
C

D

E

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}} \mathbf{T} \quad (69)$$

$$\bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{k}}_c + \bar{\mathbf{k}}_g \quad (70)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_c = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} \quad (71)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_g = Q_1 \bar{\mathbf{G}}_1 + Q_3 \bar{\mathbf{G}}_3 + \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} \quad (72)$$

onde  $\bar{\mathbf{k}}_c$  é matriz de rigidez constitutiva e  $\bar{\mathbf{k}}_g$  é matriz de rigidez geométrica do elemento no sistema local. As matrizes simétricas  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$ , que constam de (71) e (72), têm dimensão  $3 \times 3$ , e suas componentes são dadas por

$$D_{\alpha\beta} = \int_V D \epsilon_{,\alpha} \epsilon_{,\beta} dV \quad (73)$$

$$H_{\alpha\beta} = \int_V \sigma \epsilon_{,\alpha\beta} dV \quad (74)$$

Resta, agora, determinar-se (58) para que as expressões de  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$  possam ser explicitadas. Para isso, precisa-se introduzir algum esquema de interpolação para os deslocamentos e rotações das seções transversais. Pode-se generalizar a interpolação de [2] da seguinte maneira:

$$x_c = \lambda_c x_r = (1+q_1) x_r \quad (75)$$

$$\alpha = q_2 \Gamma_s(x_r) + q_3 \Gamma_a(x_r) \quad (76)$$

onde

$$\Gamma_s(x_r) = -x_r/l_r \quad \Gamma_a(x_r) = 3(x_r/l_r)^2 - 1/4 \quad (77)$$

Reescrevendo (13), tem-se

$$\epsilon = \frac{\tilde{\epsilon} \frac{d\tilde{s}_r}{dx_r} - r \frac{d\alpha}{dx_r}}{\frac{d\tilde{s}_r}{dx_r} - r \frac{d\beta}{dx_r}} \quad (78)$$

E fácil ver que

$$\frac{d\tilde{s}_r}{dx_r} = [1 + (dy_r/dx_r)^2]^{1/2} = [1 + \tan^2 \beta]^{1/2} = \sec \beta \quad (79)$$

Invertendo, tem-se

2

2

2

$$\frac{dx_r}{d\bar{s}_r} = \cos\beta \quad (80)$$

O alongamento linear no eixo é dado, com a ajuda de (75) e (80), por

$$\bar{\epsilon} = \frac{d\bar{s}_a}{d\bar{s}_r} - 1 = \frac{d\bar{s}_a}{dx_c} \frac{dx_c}{dx_r} \frac{dx_r}{d\bar{s}_r} - 1 = \sec(\alpha+\beta) \lambda_c \cos\beta - 1 \quad (81)$$

e a rotação específica  $d\alpha/dx_r$  por

$$\frac{d\alpha}{dx_r} = q_2 \Gamma_{s'} + q_3 \Gamma_a' \quad (82)$$

onde

$$\Gamma_{s'}(x_r) = -1/l_r \quad \Gamma_a'(x_r) = 6x_r/l_r^2 \quad (83)$$

Introduzindo-se (79), (81) e (83) em (78) chega-se, finalmente, em

$$\epsilon = \frac{(1+q_1)\sec(\alpha+\beta) - \sec\beta - r(q_2\Gamma_{s'} + q_3\Gamma_a')}{\sec\beta - r(d\beta/dx_r)} \quad (84)$$

Para o cálculo das integrais de (64), (73) e (74) é, ainda, necessário encontrar a expressão do elemento de volume  $dV$ . Vê-se, imediatamente, que

$$\begin{aligned} dV = dr d\bar{s}_r &= [1 - r(d\beta/d\bar{s}_r)] dr d\bar{s}_r = \\ &= [\sec\beta - r(d\beta/dx_r)] dr dx_r \end{aligned} \quad (85)$$

As integrais de (64) são, portanto, dadas por

$$Q_1 = \int N \sec(\alpha+\beta) dx_r \quad (86)$$

$$Q_2 = \int [N \lambda_c \sec(\alpha+\beta) \operatorname{tg}(\alpha+\beta) + M \Gamma_{s'}] dx_r \quad (87)$$

$$Q_3 = \int [N \lambda_c \sec(\alpha+\beta) \operatorname{tg}(\alpha+\beta) + M \Gamma_a'] dx_r \quad (88)$$

as integrais de (74) por

20  
21  
22  
23

24  
25  
26

$$H_{11} = 0 \quad (89)$$

$$H_{12} = \int N \sec(\alpha+\beta) \operatorname{tg}(\alpha+\beta) \Gamma_s dx_r \quad (90)$$

$$H_{13} = \int N \sec(\alpha+\beta) \operatorname{tg}(\alpha+\beta) \Gamma_a dx_r \quad (91)$$

$$H_{22} = \int N \lambda_c \sec^3(\alpha+\beta) \Gamma_s \Gamma_s dx_r \quad (92)$$

$$H_{23} = \int N \lambda_c \sec^3(\alpha+\beta) \Gamma_s \Gamma_a dx_r \quad (93)$$

$$H_{33} = \int N \lambda_c \sec^3(\alpha+\beta) \Gamma_a \Gamma_a dx_r \quad (94)$$

e as integrais de (73) por

$$D_{11} = \int C_1 \sec^2(\alpha+\beta) dx_r \quad (95)$$

$$D_{12} = \int [ C_1 \lambda_c \sec^2(\alpha+\beta) \operatorname{tg}(\alpha+\beta) - C_2 \sec(\alpha+\beta) \Gamma_s' ] dx_r \quad (96)$$

$$D_{13} = \int [ C_1 \lambda_c \sec^2(\alpha+\beta) \operatorname{tg}(\alpha+\beta) - C_2 \sec(\alpha+\beta) \Gamma_a' ] dx_r \quad (97)$$

$$D_{22} = \int [ C_1 \lambda_c^2 \sec^2(\alpha+\beta) \operatorname{tg}^2(\alpha+\beta) \Gamma_s \Gamma_s - 2 C_2 \lambda_c \sec(\alpha+\beta) \operatorname{tg}(\alpha+\beta) \Gamma_s \Gamma_s' + C_3 \Gamma_s' \Gamma_s' ] dx_r \quad (98)$$

$$D_{23} = \int [ C_1 \lambda_c^2 \sec^2(\alpha+\beta) \operatorname{tg}^2(\alpha+\beta) \Gamma_s \Gamma_a - C_2 \lambda_c \sec(\alpha+\beta) \operatorname{tg}(\alpha+\beta) (\Gamma_s \Gamma_a' + \Gamma_s' \Gamma_a) + C_3 \Gamma_s' \Gamma_a' ] dx_r \quad (99)$$



$$D_{33} = \int [ C_1 \lambda_c^2 \sec^2(\alpha+\beta) \operatorname{tg}^2(\alpha+\beta) \Gamma_a \Gamma_a' \\ - 2 C_2 \lambda_c \sec(\alpha+\beta) \operatorname{tg}(\alpha+\beta) \Gamma_a \Gamma_a' \\ + C_3 \Gamma_a' \Gamma_a' ] dx_r \quad (100)$$

Os limites de integração de (86) a (100) são de  $-z_{lr}$  a  $z_{lr}$ . Em (95) a (100), introduziu-se as seguintes grandezas:

$$C_1 = \int \frac{D}{A \sec\beta - r(d\beta/dx_r)} dA \quad (101)$$

$$C_2 = \int \frac{D r}{A \sec\beta - r(d\beta/dx_r)} dA \quad (102)$$

$$C_3 = \int \frac{D r^2}{A \sec\beta - r(d\beta/dx_r)} dA \quad (103)$$

Note-se que as expressões deduzidas são bastante semelhantes às de [2], e se reduzem a elas no caso da curvatura inicial da barra ser nula, isto é, se  $\beta = d\beta/dx_r = 0$ .

E também importante lembrar que outras generalizações da interpolação de [2] são possíveis. A em (76) poderia ter sido interpolado segundo a variável  $S_r$  ou qualquer outro parâmetro que defina a curva inicial do eixo da barra.

#### 4. Referências

- [1] Pimenta, P.M. e Mazzilli, C.E.N., Minima correctio methodi inveniendi lineas curvas elasticici, Anais EPUSP, Vol I, Fasciculo IB, 1988, 606-620
- [2] Pimenta, P.M., Análise não-linear de pórticos planos, Anais EPUSP, Vol I, Fasciculo IA, 1988, 561-582

