

TEXTOS EM APLICAÇÕES CIENTÍFICAS COMPUTACIONAIS

Nº 1/91

ANAIS

XIV REUNIÃO REGIONAL DA SOCIEDADE
BRASILEIRA DE MATEMÁTICA APLICADA
E COMPUTACIONAL

I SEMANA DA COMPUTAÇÃO



Editado por:

*José M. Balthazar, Maria Lucia L. Wodewotzki
e Hilda C. de Oliveira*

Rio Claro

1991

O Ajuste Polinomial com Condições de Contorno.

Hans G. Arens

Professor do Departamento de Hidráulica e Saneamento da Escola de Engenharia de São Carlos, USP.

Resumo: O presente artigo apresenta uma metodologia que permite efetuar o ajuste polinomial com o método dos mínimos quadrados, impondo aos polinômios uma ou duas condições de contorno pré-fixadas. A metodologia desenvolvida é comparada com a tradicional, através de um exemplo ilustrativo.

Boundary Conditions at Polynomial Adjustments.

Abstract: This paper presents a methodology for the polynomial adjustment with least squares method, so that polynomials are submitted to one or two boundary condition. The methodology is compared with the traditional through an elucidative example.

1. A metodologia tradicional.

Se uma série de p pontos (x_k, y_k) $k=1, \dots, p$ for ajustada pelo polinômio $y = a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$, o resíduo R_k em cada ponto é

$$R_k = y(x_k) - y_k = a_n \cdot x_k^n + \dots + a_1 \cdot x_k + a_0 - y_k \quad (1.1)$$

e a soma dos seus quadrados é

$$S = \sum_k R_k^2 = \sum_k (a_n \cdot x_k^n + \dots + a_1 \cdot x_k + a_0 - y_k)^2 \quad (1.2)$$

com $k=1, \dots, p$.

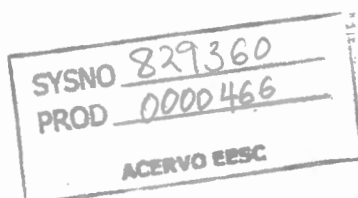
A soma S será mínima se $\partial S / \partial a_i = 0$ para $i=0, \dots, n$ o que implica em

$$\partial S / \partial a_0 = 0 \Rightarrow \sum_k (a_n \cdot x_k^n + \dots + a_1 \cdot x_k + a_0 - y_k) = 0 \quad (1.3)$$

$$\partial S / \partial a_1 = 0 \Rightarrow \sum_k (a_n \cdot x_k^n + \dots + a_1 \cdot x_k + a_0 - y_k) \cdot x_k = 0 \quad (1.4)$$

$$\dots$$

$$\partial S / \partial a_n = 0 \Rightarrow \sum_k (a_n \cdot x_k^n + \dots + a_1 \cdot x_k + a_0 - y_k) \cdot x_k^n = 0 \quad (1.5)$$



At. 829360

que fornecem o sistema linear

$$\sum_k x_k^n \cdot a_n + \dots + \sum_k x_k \cdot a_1 + n \cdot a_0 = \sum y_k \quad (1.6)$$

$$\sum_k x_k^{n+1} \cdot a_n + \dots + \sum_k x_k^2 \cdot a_1 + \sum_k x_k \cdot a_0 = \sum x_k \cdot y_k \quad (1.7)$$

$$\dots$$

$$\sum_k x_k^{2n} \cdot a_n + \dots + \sum_k x_k^2 \cdot a_1 + \sum_k x_k^n \cdot a_0 = \sum x_k^n \cdot y_k \quad (1.8)$$

Este sistema de $(n+1)$ equações com as $(n+1)$ incógnitas $a_0, a_1, \dots, a_n$ pode ser representado pela equação

$$\text{MAT}(A) \cdot \text{MAT}(C) = \text{MAT}(B) \quad (1.9)$$

com as matrizes $\text{MAT}(A)$, $\text{MAT}(B)$ e $\text{MAT}(C)$ definidas por

$$A(i, j) = \sum_k x_k^{n+i-j} \quad (1.10)$$

$$B(i) = \sum_k x_k^{i-1} \cdot y_k \quad (1.11)$$

$$C(j) = a_{n+1-j} \quad (1.12)$$

onde $k=1, \dots, p$, $i=1, \dots, n+1$ e $j=1, \dots, n+1$.

Polinômios pares ou ímpares podem ser obtidos a partir do sistema (1.6)...(1.8) suprimindo-se as linhas e as colunas convenientes, através de uma simples reindexação das matrizes. Os polinômios pares são obtidos fazendo-se

$$A(i, j) \leftarrow A(2i-1, 2j-1)$$

$$B(i) \leftarrow B(2i-1)$$

$$C(j) = a_{2(N1+1-j)}$$

com $i=1, \dots, (N1+1)$

e os polinômios ímpares com

$$A(i, j) \leftarrow A(2i, 2j)$$

$$B(i) \leftarrow B(2i)$$

$$C(j) = a_{2(N2-j)+1}$$

com $i=1, \dots, N2$

onde $N1$ e $N2$ são definidos por $N1 = \text{INT}(n/2)$ e $N2 = \text{INT}((n+1)/2)$.

A condição $a_0=0$, que obriga o polinômio a passar pela origem, é obtida pela reindexação

$$A(i, j) \leftarrow A(i+1, j)$$

$$B(i) \leftarrow B(i+1)$$

com $i=1, \dots, n$ e $j=1, \dots, n$

que suprime a primeira linha e a última coluna do sistema original. Também a supressão da segunda linha ($a_1=0$), pode ser obtida por uma reindexação conveniente, para obrigar o polinômio a admitir uma derivada nula na origem.

2. A introdução de condições de contorno.

Condições de contorno do tipo $y'(x_a)=m_a$ ou $y(x_b)=y_b$ não podem ser otidas por uma simples reindexação, mas devem ser introduzidas no sistema pela substituição de duas linhas quaisquer (r) e (s) do sistema (1.3)...(1.5) pelas expressões

$$n \cdot x_a^{n-1} \cdot a_n + \dots + 2 \cdot x_a \cdot a_2 + a_1 = m_a \quad (2.1)$$

e

$$x_b^n \cdot a_n + \dots + x_b^2 \cdot a_2 + x_b \cdot a_1 + a_0 = y_b \quad (2.2)$$

que transformam os coeficientes a_r e a_s , correspondentes às linhas substituídas, em parâmetros dependentes dos $(n-1)$ coeficientes restantes. Se forem escolhidos a_1 e a_2 ($r=1, s=2$), segue que

$$a_1 = f(a_n, \dots, a_3, a_0) \quad (2.3)$$

$$a_2 = f(a_n, \dots, a_3, a_0) \quad (2.4)$$

As derivadas de a_1 e a_2 em relação aos demais coeficientes

$$\partial a_1 / \partial a_i = (x_a x_b / (x_b - 2x_a)) (2x_b^{i-2} - x_a^{i-2}) \quad (2.5)$$

$$\partial a_2 / \partial a_i = (x_a^{i-1} - x_b^{i-1}) / (x_b - 2x_a) \quad (2.6)$$

($i=0,3,\dots,n$), modificam o sistema linear característico do método dos mínimos quadrados em

$$\text{MAT}(A) \cdot \text{MAT}(C) = \text{MAT}(B)$$

com as matrizes $\text{MAT}(A)$, $\text{MAT}(B)$ e $\text{MAT}(C)$ assumindo

$$A(i,j) = \sum_k x_k^{n+1-j} \cdot [x_k^{i-1} + x_k^2 \cdot \{(i-1)x_a^{i-2} - x_b^{i-2}\} / (x_b - 2x_a) + x_k \cdot x_a x_b \{2x_b^{i-3} - (i-1)x_a^{i-3}\} / (x_b - 2x_a)] \quad (2.7)$$

$$A(2,j) = (n+1-j) \cdot x_a^{n-j} \quad (2.8)$$

$$A(3,j) = x_b^{n+1-j} \quad (2.9)$$

$$B(i) = \sum_k y_k \cdot [x_k^{i-1} + x_k^2 \cdot \{(i-1)x_a^{i-2} - x_b^{i-2}\} / (x_b - 2x_a) + x_k \cdot x_a x_b \{2x_b^{i-3} - (i-1)x_a^{i-3}\} / (x_b - 2x_a)] \quad (2.10)$$

$$B(2) = m_a \quad (2.11)$$

$$B(3) = y_b \quad (2.12)$$

com $k=1, \dots, p$ $i=1, 4, \dots, n+1$ e $j=1, \dots, n+1$.

$$C(j) = a_{n+1-j} \quad \text{para } j=1, \dots, n+1 \quad (2.13)$$

A condição $a_0=0$ é introduzida pela reindexação $A(i,j) \leftarrow A(i+1,j)$ e $B(i) \leftarrow B(i+1)$ para $i=1, \dots, n$ e $j=1, \dots, n$.

3. Dois casos simplificados.

Mostra-se que, se apenas uma das condições (2.1) ou (2.2) for imposta ao polinômio, os termos das matrizes se reduzem a:

a) Condição: $y'(x_a)=m_a$

$$A(i,j) = \sum_k x_k^{n+1-j} [x_k^{i-1} - (i-1)x_a^{i-2}] \quad (3.1)$$

$$A(2,j) = (n+1-j) \cdot x_a^{n-j} \quad (3.2)$$

$$B(i,j) = \sum_k y_k \cdot [x_k^{i-1} - (i-1)x_a^{i-2}] \quad (3.3)$$

$$B(2) = m_a \quad (3.4)$$

$$C(j) = a_{n+1-j} \quad (3.5)$$

com $k=1, \dots, p$ $i=1, 3, \dots, n+1$ e $j=1, \dots, n+1$

b) $y(x_b)=y_b$

$$A(i,j) = \sum_k x_k^{n+1-j} (x_k^{i-1} - x_b^{i-3}) \quad (3.6)$$

$$A(3,j) = x_b^{n+1-j} \quad (3.7)$$

$$B(i) = \sum_k y_k \cdot (x_k^{i-1} - x_b^{i-3}) \quad (3.8)$$

$$B(3) = y_b \quad (3.9)$$

$$C(j) = a_{n+1-j} \quad (3.10)$$

com $k=1, \dots, p$ $i=1, 2, 4, \dots, n+1$ e $j=1, \dots, n+1$.

Também nestes casos a condição $a_0=0$ é obtida pela reindexação $A(i,j) \leftarrow A(i+1,j)$ e $B(i) \leftarrow B(i+1)$ para $i=1, \dots, n$ e j .

4. Um exemplo.

A figura n.º1 mostra duas curvas características adimensionais de uma bomba centrífuga. Ambas passam pelo ponto $(1,1)$, que representa o funcionamento da máquina nas condições nominais. Desta forma $\psi(1)=1$, $y(1)=1$. O rendimento $y(x)$ no ponto nominal é máximo, o que implica também em $y'(1)=0$. Os 9 pontos obtidos das curvas de catálogo

	x	$\psi(x)$	$y(x)$
1)	0	1,181	0
2)	0,167	1,178	0,413
3)	0,333	1,170	0,646
4)	0,5	1,156	0,783
5)	0,667	1,119	0,891
6)	0,833	1,067	0,961
7)	1	1	1
8)	1,167	0,919	1,006
9)	1,333	0,830	0,951

fornecem os polinômios

$$\psi(x)=1,1811-0,0514x+0,2845x^2-0,7929x^3+0,4769x^4-0,0988x^5$$

e

$$y(x)=1,194 \cdot 10^{-4}+3,2686x-5,7152x^2+6,2194x^3-3,4945x^4+0,7251x^5$$

obtidos pelo método dos mínimos quadrados tradicional.

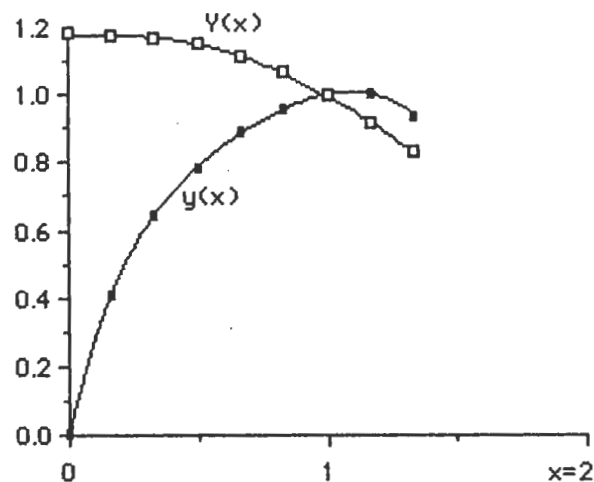


fig.n.º1 Curvas características de uma bomba centrífuga
(KSB Etanorm 40/160-1750)

Os valores que estes polinômios assumem no ponto nominal $Y(1)=0,9994$ $y(1)=1,0035$, mostram que ambos passam muito perto do ponto nominal $(1,1)$. Porém $y'(1)=0,1439$ se afasta muito da condição desejada $y'(1)=0$.

Se os polinômios $Y(x)$ e $y(x)$ forem condicionados a satisfazer efetivamente as condições $Y(1)=1$ e $y(1)=1$ e $y'(1)=0$, pode-se recorrer a metodologia apresentada, obtendo-se respectivamente as expressões

$$Y(x)=1,1811-0,0476x+0,2601x^2-0,7424x^3+0,4370x^4-0,08821x^5$$

e

$$y(x)=6,4557 \cdot 10^{-4}+3,455x-7,1953x^2+9,9244x^3-7,0797x^4+1,8962x^5$$

As funções assim obtidas descrevem as curvas características da máquina sem alterar as propriedades do ponto nominal, mantendo-o na coordenada $x=1$. Esta condição é importante quando estas funções são usadas na solução dos sistemas de equações diferenciais dos modelos numéricos, usados para simular os transientes hidráulicos em estações elevatórias. Evidentemente a metodologia apresentada também é muito útil em um grande número de casos nos quais a fixação efetiva de condições de contorno é importante.

5. Bibliografia.

Kreyszig E.; Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons, 3ª Ed, New York, 1988, p. 1294.

Stark Peter A; Introdução aos Métodos Numéricos, Editora Interciência Ltda. 1979.