Revisitando a descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga

Carlos H. B. Gonçalves (EACH/USP)
Claudio Possani (IME/USP)

Alguém que se disponha a estudar o episódio da descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga encontrará em livros de história da matemática e de matemática duas visões contraditórias sobre o assunto. A primeira delas, que é a mais disseminada, afirma que tal descoberta foi seguida por uma crise no pensamento pitagórico. Nessa versão, a existência da incomensurabilidade seria conflituosa com um princípio pitagórico de que tudo poderia ser explicado ou representado por meio de números. A segunda versão da descoberta dos incomensuráveis é ainda hoje restrita quase que somente aos meios especializados da história antiga ou da história da matemática. Segundo ela, as fontes mais confiáveis para o estudo do assunto não trazem nenhuma evidência de uma crise, que não teria sido senão o resultado de uma leitura pouco rigorosa de fontes menos confiáveis.

O relato que propõe que tenha havido uma crise em meio aos pitagóricos foi e tem sido muito usado em introduções de caráter histórico ao estudo dos números irracionais. Muitas vezes, espera-se mesmo que o estudante fique chocado com a existência de números irracionais, à semelhança do que teria sido o choque dos pitagóricos. Veja, por exemplo, o que nos diz K. Mainzer ([17], p. 27–28): "Quando hoje definimos os números reais como um corpo completamente ordenado, tendemos a esquecer a magnitude de crise intelectual e filosófica trazida pela descoberta de que havia coisas fora do entendimento dos números racionais. [...] Queremos dizer, é claro, a descoberta atribuída a Hipaso de Metaponto, um pitagórico do século V A.E.C., de que há segmentos de reta cujas razões são incomensuráveis."

Entretanto, desde a década de 1960, estudos na área têm apontado uma falta de rigor histórico na posição de que a descoberta dos incomensuráveis teria gerado uma crise entre os pitagóricos. Esse novo entendimento histórico não se deu isoladamente. A leitura rigorosa das fontes gregas sobreviventes e o entendimento mais preciso sobre o modo como elas sobreviveram colocam problemas em várias outras afirmações sobre a matemática da Grécia Antiga ainda hoje muito difundidas, entre elas, que Pitágoras tenha sido um matemático e que Platão tenha posto um aviso na porta da Academia proibindo a entrada de não-geômetras.

Nas seções seguintes, apresentaremos os pontos principais de cada uma das duas versões sobre a descoberta da incomensurabilidade e uma possível crise no meio pitagórico em decorrência dela. Vamos dar especial atenção ao que dizem os autores da Antiguidade, perguntando-nos como eles próprios obtiveram seu conhecimento, isto é, quais foram suas fontes e como lidaram com elas. Na última seção, a partir da questão da forma como a descoberta da incomensurabilidade aparece na história da matemática, traremos algumas conclusões sobre a pesquisa em história da matemática.

Terminamos esta introdução apresentando as palavras de Euclides na abertura do Livro X dos *Elementos*, acompanhadas de uma reflexão. "Definição: Dizem-se grandezas comensuráveis as que se medem pela mesma medida, e incomensuráveis aquelas das quais não é possível nada tornar-se medida comum." ([7])

O leitor percebe algum sinal de dificuldade em lidar com o conceito de incomensuráveis? E sinal de uma crise? É claro que qualquer observador atento poderia argumentar que entre o aparecimento da crise e o registro euclideano há um espaço de séculos e neste período a crise teria sido depurada. Esta possibilidade é razoável, mas antes de apresentá-la como verdadeira não seria adequado encontrar alguma fonte que a embasasse? O que autoriza tantos autores a citá-la como verdade histórica?

É o que discutiremos a seguir.

Em defesa da crise

Para aqueles que defendem que a descoberta dos incomensuráveis gerou uma crise, o argumento central é o seguinte: "Tinha sido uma base fundamental do pitagorismo que a essência de todas as coisas, na geometria bem como nos negócios práticos e teóricos do homem, é explicável em termos de arithmos, ou propriedades intrínsecas de números inteiros ou suas razões." ([3], p.72) Assim, continua outro autor, "a descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. [...] Tão grande foi o 'escândalo lógico' que por algum tempo foram feitos esforços para manter a questão em sigilo, e há uma lenda que conta que o pitagórico Hipaso (ou um outro talvez) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe erigido um túmulo, como se estivesse morto." ([8], p. 60–61)

Em alguns autores, encontramos certos detalhes a mais, como que para explicar melhor as dificuldades técnicas que levaram à crise. A seguinte (longa) passagem é ilustrativa e bastará para nossos propósitos: "Números para os pitagóricos significavam apenas números inteiros. Uma razão de dois números inteiros não era uma fração nem, portanto, um outro tipo de número, como ocorre modernamente. Frações verdadeiras, expressando partes de uma unidade monetária ou uma medida, eram empregadas no comércio, mas tais usos comerciais de aritmética estavam fora do campo da matemática grega propriamente. Daí os pitagóricos terem se surpreendido e perturbado pela descoberta de que algumas razões – por exemplo, a razão entre a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles e o cateto ou a razão entre a diagonal e o lado do quadrado – não podem ser expressas por números inteiros. Uma vez que os pitagóricos tinham se ocupado com ternos de números inteiros que poderiam ser os lados de um triângulo retângulo, é muito provável que eles tenham descoberto essas novas razões nesse trabalho. Eles chamavam razões expressas por números inteiros razões comensuráveis, o que significa que as duas quantidades são medidas por uma unidade comum, e eles chamavam razões não exprimíveis assim razões incomensuráveis. Assim o que expressamos como $\sqrt{2}/2$ é uma razão incomensurável. A razão de magnitudes incomensuráveis foi chamada ἄλογος (alogos, inexprimível). O termo ἄρρητος (arratos (*sic*), não tendo uma razão) também foi usado. A descoberta de razões incomensuráveis é atribuída a Hipaso de Metaponto (Séc. V a.C.). Supõe-se que os pitagóricos estavam no mar no momento e lançaram Hipaso para fora do barco por ter produzido um elemento no universo que negava a doutrina pitagórica de que todos os fenômenos do universo podem ser reduzidos a números inteiros ou suas razões." ([15], p. 32)

Porém, não é apenas nos autores das últimas décadas que a "crise dos incomensuráveis" está presente. Paul Tannery, no começo do século XX, falou da descoberta dos incomensuráveis como "um verdadeiro escândalo lógico, uma pavorosa pedra no caminho." ([25], p. 259)

Uma tradição tão difundida tinha (e tem) suas fontes, isto é, um conjunto de autores e obras da Antiguidade que pareciam indicar em primeiro lugar a descoberta dos incomensuráveis como obra de Pitágoras, tido por matemático, ou por Hipaso, ou pelos primeiros pitagóricos. Em segundo lugar, o choque da incomensurabilidade com uma teoria de caráter filosófico afirmando que "tudo é número", depois o episódio da revelação de segredos matemáticos pitagóricos (certamente algo ligado à incomensurabilidade) e finalmente a punição do traidor que fizera tal revelação.

Em primeiro lugar, que Pitágoras foi um matemático era decorrente de um trecho de Proclo (m. 485 E.C.), em que ele recorre a uma história da geometria que fora escrita pelo filósofo peripatético Eudemo (f. 320 A.E.C.), discípulo de Aristóteles. O texto de Eudemo hoje está perdido, mas podemos supor que Proclo tivesse uma cópia diante de si quando o citou. Em particular, sobre Pitágoras, lemos em Proclo: "E após esses, Pitágoras transformou a filosofia sobre ela [a geometria] em um esquema de educação liberal, procurando os princípios dela a partir do alto e perseguindo os teoremas de um modo imaterial e intelectual; e ele descobriu, então, tanto o assunto dos irracionais como a construção dos esquemas cósmicos [isto é, os sólidos regulares].” ([21])

Assim, de acordo com Proclo, Pitágoras descobriu a incomensurabilidade e a construção dos sólidos regulares. Esses mesmos temas aparecem sob uma luz ligeiramente diferente em Jâmblico (c. 285 - c. 330 E.C.): “Dizem sobre Hipaso que estava entre os pitagóricos e, por ter exposto e escrito primeiro a esfera a partir de doze pentágonos [o dodecaedro regular], morreu no fundo do mar, porque fora ímpio, e ficou com a fama de descobridor, mas dizem que tudo provém daquele homem [Pitágoras].” ([14], p. 88; o mesmo trecho é repetido por Jâmblico em [13], 77.18)

Como a medida das arestas do dodecaedro regular é incomensurável com o raio de sua esfera (inscrita ou circunscrita), viu-se nessa passagem de Jâmblico a possibilidade de que o descobridor da incomensurabilidade tivesse sido Hipaso de Metaponto (f. 470 A.E.C.) e que isso se dera no contexto da investigação geométrica sobre o dodecaedro regular.[1]

Com relação ao tema da punição pela revelação do segredo, além de Jâmblico, o historiador Plutarco (c.45-c.120 E.C.) também tem algo a dizer: “[...] dizem que os pitagóricos providenciaram que seus preceitos não fossem escritos mas que, antes, fossem preservados na memória viva daqueles que mereciam recebê-los; e quando algum desses processos geométricos incomuns e abstratos foi divulgado para uma pessoa não merecedora, eles disseram que os deuses ameaçavam punir essa maldade e profanação com um sinal e com uma avassaladora calamidade.” ([20], p. 100–101) Vale a pena também ler o trecho seguinte de Papo (c. 330 - c. 405) em que a morte por afogamento é interpretada de modo figurado: “Essa ciência (ou conhecimento) teve sua origem na seita (ou escola) de Pitágoras, mas passou por um importante desenvolvimento nas mãos do ateniense, Teeteto [...] De fato, a seita (ou escola) de Pitágoras foi de tal forma afetada por sua reverência por essas coisas que uma história tornou-se corrente nela, a saber, aquele que primeiro desvendou o conhecimento de inexprimíveis ou irracionais e o divulgou entre a massa de gente comum pereceu por afogamento; o que é mais provavelmente uma parábola pela qual eles procuraram expressar sua convicção de que, primeiro, é melhor esconder todo inexprimível, ou irracional ou inconcebível no universo e, segundo, a alma que por erro ou descuido desvela ou revela qualquer coisa dessa natureza que esteja nela ou neste mundo, vaga (por isso) aqui e ali no mar da não-identidade (isto é, carecendo de toda similaridade de qualidade ou acidente), imersa no fluxo do vir-a-ser e do deixar-de-ser, onde não há padrão de medida.” (Papo *apud* Walter Burkert, em [5], p. 457–458; essa é uma tradução para o inglês de [4], de 1962)

Em suma, esses trechos (e outros que não citamos aqui) alimentaram a versão da história em que descoberta, revelação e punição se seguem uma à outra. Passemos, agora, à ligação desses elementos com uma possível contradição do princípio pitagórico de que “tudo é número”. Em outras palavras, vejamos como se tem defendido que a existência da incomensurabilidade teria sido uma dificuldade fundamental na filosofia pitagórica.

A base disso é a leitura que Oskar Becker fez de um trecho do Livro IX dos *Elementos* de Euclides. Nesse livro, há uma sequência de proposições relativamente simples sobre números pares e ímpares (proposições de 21 a 34). Becker, partindo dos fatos bem conhecidos de que (a) essas proposições parecem ter chegado a Euclides a partir de uma tradição aritmética mais antiga e mais simples do que se encontra no restante dos livros

[1] São várias as passagens de obras de Jâmblico que retornam ao tema. Especialmente ilustrativa é a seguinte: “O primeiro homem que revelou a natureza da comensurabilidade e da incomensurabilidade àqueles que não mereciam compartilhar dos ensinamentos, assim se diz, foi violentamente detestado e não somente foi excluído de sua vida e refeição comuns como também lhe construíram um túmulo, como se seu antigo amigo estivesse morto. E alguns dizem também que o poder sobrenatural vingou-se daqueles que publicaram os feitos de Pitágoras; pois foi afogado como um blasfemo o que revelou a construção da figura de vinte ângulos [isto é, vinte vértices]. Ele, digo, esticou em uma esfera o dodecaedro, um dos cinco chamados esquemas sólidos. E outros dizem que assim foi o sofrimento daquele que revelou as coisas sobre a irracionalidade e a incomensurabilidade.” (Jâmblico, *De vita Pythagorica*, 246 ff.)

aritméticos (Livros de VII a IX dos *Elementos*) e (b) pares e ímpares constituem um tema de profundo interesse no pitagorismo, conclui que esta parte dos *Elementos* é a sistematização lógico-dedutiva da aritmética pitagórica ([1, 2]). Becker usara também um testemunho de Aristóteles, em que se menciona que os pitagóricos usavam seixos em conexão com sua aritmética.

Assim, Becker, usando pontinhos representando seixos, elaborou demonstrações para os teoremas sobre números pares e ímpares como aparecem no Livro IX dos *Elementos*. Com isso, sustentava que os primeiros pitagóricos teriam a seu dispor todo o conhecimento sobre pares e ímpares necessário para elaborarem a famosa prova por redução ao absurdo de que o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis, reportada por Aristóteles e presente em alguns manuscritos do Livro X dos *Elementos*.

É a reconstrução de Becker que está na base de textos como os de Kline, citado mais acima. Se os pitagóricos podiam demonstrar a incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado, então teriam encontrado algo que não podia ser explicado em termos de números inteiros, portanto, algo que contrariaria seu princípio filosófico de que tudo é número.

A crise em crise

Há um número de autores que discordam que a descoberta da incomensurabilidade tenha causado uma crise no pensamento pitagórico.

Ivor Grattan-Guinness parece resumir as ideias centrais desse conjunto de autores: "Outra descoberta famosa atribuída aos pitagóricos é usualmente formulada assim: O número $\sqrt{2}$ é irracional; mas essa formulação é anacronística em vários modos. [...] a descoberta é tida como tendo provocado uma crise nos fundamentos da matemática daquele tempo; mas comentadores como o próprio Aristóteles não a mencionam, e a ideia pode ser uma interpolação anistórica de alguns gregos posteriores, ou mesmo um mal-entendido. [...] Assim, longe de experimentar uma crise de fundamentos, os gregos antigos podem ter gozado uma época de grandes jornadas matemáticas." ([11], p. 47–48)

Como mencionamos anteriormente, o questionamento da ideia de uma crise seguindo-se a uma descoberta da incomensurabilidade está acompanhado do questionamento de várias outras ideias ainda bastante comuns em relatos de história da matemática provenientes de âmbitos externos ao da pesquisa profissional no tema. Um exemplo desses questionamentos é o da ideia do próprio Pitágoras como um matemático, hoje bastante desacreditada. Um recente texto nos diz: "De fato, tudo o que sabemos sobre suas descobertas e interesses matemáticos [dos pitagóricos] provém de séculos posteriores, frequentemente muito posteriores, e é de modo geral tido como não confiável [...] A maior parte dos estudiosos irá concordar que houve uma escola pitagórica de filosofia desde o século VI A.E.C. até provavelmente o IV, que eles estiveram envolvidos em política e que eles tinham certas crenças sobre a vida e o universo, incluindo talvez o princípio de que 'tudo é número', ou que o número guarda a chave para entender a realidade. Mas a maior parte dos estudiosos também pensa, por exemplo, que Pitágoras nunca descobriu o teorema que leva o seu nome." ([6], p. 30–31)

Um dos estudos críticos mais antigos sobre a história da tradição pitagórica é o de Eva Sachs, em que a autora põe em dúvida se os pitagóricos fizeram uma construção matemática do dodecaedro. Ela supõe que os pitagóricos conhecessem o dodecaedro apenas de uma maneira empírica ([23]). Além disso, Walter Burkert nos diz que a expressão δωδεκάσκυτοι σφαῖραι em Platão (*Fedro*, 110b) e em Plutarco (*Quaestiones Platonicae* 5.1. 1003d) mostra que bolas de crianças eram feitas em 12 partes; e, adicionalmente, dodecaedros de bronze existem como evidência arqueológica do século IX ao VI A.E.C. ([5], p. 460–461). Assim, é improvável que o dodecaedro tenha se tornado conhecido fora dos círculos pitagóricos por obra de Hipaso.

Entretanto, o trabalho mais sistemático no tocante à desconstrução crítica de uma série de dados tidos por conhecimento histórico inabalável relativo à matemática pitagórica é o de Burkert, já mencionado ([4], [5]). Seu impacto para a história da matemática grega é tão grande que se chegou a dizer que "Pitágoras, o matemático, faleceu por fim em 1962", ano da edição em alemão do livro de Burkert ([18]).

Em primeiro lugar, o relato de Eudemo, tal como conservado por Proclo, é a fonte mais importante para a defesa de Pitágoras como matemático. Entretanto, há duas evidências que sugerem fortemente que o relato de Eudemo não fizesse originalmente referência a Pitágoras. A primeira é o uso da expressão "de um modo imaterial e intelectual" (ἄϋλῶς καὶ νοερῶς). Por que Eudemo, um prestigioso discípulo de Aristóteles, se expressaria assim em relação à matemática de Pitágoras, se o próprio Aristóteles afirma que os pitagóricos aplicaram suas proposições a corpos, a fim de distinguir os pitagóricos dos verdadeiros matemáticos? (*Metafísica*, 1083b18). A segunda é o fato de o trecho sobre Pitágoras ser uma reformulação muito próxima de Jâmblico, no *De communi mathematica scientia* ([13]). Jâmblico refere-se à pureza, sutileza e exatidão do método de Pitágoras e a como sua matemática purifica a alma e a conduz para os mais altos princípios e para o reino do ser puro e imaterial ([5], p. 410). Uma descrição que aproxima a expressão de Proclo ("imaterial e intelectual") muito mais de Jâmblico do que do peripatético Eudemo. Como resultado, tornou-se consenso entre os historiadores da matemática e da filosofia gregas que Proclo interpolou o texto de Jâmblico no de Eudemo, possivelmente porque Eudemo dizia muito pouco ou mesmo nada sobre Pitágoras. Teria Pitágoras realmente sido um matemático ou tal ideia foi uma invenção de neopitagóricos como Jâmblico (que viveu 800 anos depois de seu mestre)? Eis a questão.

Isso nos leva aos textos de Jâmblico. Segundo ele, Hipaso revelou a construção do dodecaedro e, por isso, morreu no mar. Esse episódio aparece nos dois trechos acima, sendo que no segundo trecho Hipaso não é nomeado. Jâmblico narra também que o primeiro que revelou a incomensurabilidade foi excluído da comunidade pitagórica e ganhou um túmulo simbólico. Em nenhuma das duas passagens, Jâmblico diz que os dois segredos foram revelados pela mesma pessoa. Pelo contrário, admite uma pluralidade "daqueles que revelaram os feitos de Pitágoras." A dúvida repousa sobre qual foi a punição para aquele que revelou a incomensurabilidade, pois "outros dizem" que o afogamento "foi o sofrimento" dele.

A imprecisão de Jâmblico não nos permite dizer com certeza quais foram os traidores (teria sido Hipaso? somente ele?) nem o que cada um revelou. E, caso tenham revelado algo, com que termos o fizeram. Os trechos de Jâmblico também não nos permitem concluir nenhuma ligação entre a construção do dodecaedro e o problema da incomensurabilidade. Se houvesse essa ligação e se ela fosse realmente crucial, não deveria ser mencionada? Por fim, e mais importante, os textos de Jâmblico não relacionam a incomensurabilidade (nem o dodecaedro) a um conflito com a doutrina de que "tudo é número". Poder-se-ia alegar que Jâmblico, um neopitagórico, não relaciona esses conhecimentos um ao outro para esconder a crise por que teria passado o conhecimento pitagórico. Mas, na mesma linha, Jâmblico, caso fosse ciente de uma tal crise, poderia mencionar como o próprio Pitágoras fora capaz de harmonizar número, dodecaedro e incomensurabilidade.

Interessantemente, tanto Plutarco (c.45-c.120 E.C.) como Papo (f. 320 E.C.) não tomam as punições no sentido literal. Plutarco é anterior a Jâmblico; Papo, seu contemporâneo. Ambos dão uma nuance ao assunto que o neopitagórico não contempla. Mas nenhum dos dois faz a ligação entre incomensurabilidade e a teoria de que "tudo é número".

Para fazer essa ligação, são necessários, como dissemos na seção anterior, três elementos:

- o conhecimento da importância da oposição par e ímpar no pensamento pitagórico;
- a reconstrução de uma suposta aritmética pitagórica capaz de demonstrar teoremas sobre números pares e ímpares;
- uma prova de incomensurabilidade que recorra a números pares e ímpares.

O primeiro elemento é de aceitação consensual. Aristóteles é o apoio mais forte para isso: "Também os pitagóricos identificam o ilimitado com o par. Pois esse, dizem, quando está rodeado e limitado pelo ímpar, proporciona o elemento ilimitado aos seres existentes.

Uma mostra disso é o que acontece com os números." (*Física*, Livro Γ, 4, 203a10).

O segundo ponto, hoje, é menos consensual do que já foi. Como dissemos na seção anterior, Oskar Becker propôs uma leitura das proposições de 21 a 34 do Livro IX dos *Elementos* de Euclides como uma sistematização, em um quadro axiomático, de resultados da aritmética pitagórica. Becker enfatizou o testemunho de que os pitagóricos usassem seixos para a representação de números (Aristóteles, *Metafísica*, 1092b10ff.). O problema básico da reconstrução de Becker é apontado por Burkert: "Em Euclides, a teoria se desenrola de um modo sistemático, e cada proposição pressupõe a anterior, de uma maneira estritamente dedutiva, enquanto uma prova com ψῆφοι [seixos] é essencialmente indutiva e pictórica. [...] É claro que os Pitagóricos sabiam que ímpar mais ímpar é par, e que ímpar mais par é ímpar [...], mas eles não deduziam uma proposição da outra. Eles viam, diretamente, que o número ímpar 'masculino' mostrava-se dominante na associação com o número par 'feminino'." ([5], p. 435) Voltaremos, mais adiante, a essa distinção entre provar proposições dedutivamente e ver proposições com seixos.

O terceiro elemento usado para ligar o problema da incomensurabilidade com a doutrina de que "tudo é número" é uma prova da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado. A demonstração é bem conhecida e, por isso, não precisamos reproduzi-la aqui. É reportada por Aristóteles, mas sem explicitar os detalhes nem deixar claro que se trata do lado e da diagonal de um quadrado (por exemplo, poderiam ser de um pentágono regular) (*Primeiros Analíticos*, 41a23ff, 50a35ff.). Interessantemente, Aristóteles nunca afirma que a incomensurabilidade gerou uma crise entre os pitagóricos, ainda que na *Metafísica* ele os critique fortemente.

Uma demonstração completa nessa linha, da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado, foi adicionada aos *Elementos* de Euclides por volta do século III E.C.

Para Becker, seria possível reconstruir a demonstração da incomensurabilidade com a aritmética pitagórica dos seixos. Entretanto, uma séria dificuldade é apontada, novamente por Burkert: "[...] Aqui também Becker tenta reconstruir a prova com figuras de seixos: 'Dados $\ldots a^2 = 2b^2 \ldots$ Imagine o número a^2 disposto uma vez com seixos e b^2 disposto duas vezes...' Agora, não há a possibilidade de os pitagóricos meramente 'imaginarem' seus ψῆφοι: eles os tinham em suas mãos e os arranjavam em padrões visíveis, como é óbvio dos testemunhos sobre Eurito [por exemplo, o de Aristóteles, como mencionamos]. Se alguém tenta, entretanto, seguindo o espírito da reconstrução de Becker, representar a^2 e b^2 com pedrinhas, percebe rapidamente que isso é impossível [...] Becker pede [...] que se prossiga, sem se desencorajar por essa experiência, 'pensando' que as condições irrealizáveis estão satisfeitas [...] até que as contradições lógicas saltem à vista (b teria de ser par e ímpar ao mesmo tempo) [...]." ([5], p. 436) Além disso, como também reporta Aristóteles, para os pitagóricos, a unidade é ao mesmo tempo par e ímpar (*Metafísica*, 985b23ss.), portanto o fato de b ser par e ímpar, supondo que pudessem chegar aí, não revelaria necessariamente uma contradição, mas talvez confirmasse que cada número é feito de unidades, carregando, portanto, em si o par e o ímpar.

Dessa forma, a leitura mais apurada dos testemunhos mais antigos e das reconstruções racionais modernas coloca a história de uma crise dos incomensuráveis mais como uma criação historiográfica posterior do que como um relato fidedigno – tanto quanto isso é possível para a história – daquilo que aconteceu.

Outro momento importante na história da historiografia da incomensurabilidade são os trabalhos de David Fowler ([9]). Partindo das análises de Burkert e de Wilbur Knorr ([16]), Fowler adiciona mais uma camada de argumentação contra a versão da história em que a descoberta da incomensurabilidade teria provocado uma crise de fundamentos da matemática.

A análise de Fowler não se restringe apenas a mostrar que as fontes documentais não indicam nenhuma incompatibilidade da incomensurabilidade com o princípio pitagórico de que tudo é número. Ele também sugere quais ferramentas matemáticas e quais pontos de vista estavam disponíveis para os matemáticos gregos lidarem com a incomensurabilidade sem uma crise de fundamentos. Seu argumento central, com relação a isso, é que, em primeiro lugar, a geometria grega tinha um caráter fortemente não-aritmetizado, de modo a ser possível fazer geometria sem necessariamente ter de associar um número a cada segmento ou área. Assim, os geômetras gregos poderiam perfeitamente trabalhar com o lado e a diagonal (de um quadrado ou de um pentágono regular, por exemplo) sem ter de associar medidas a esses segmentos.

O segundo ponto importante do argumento de Fowler era que o conceito de razão pré-eudoxano estava ligado (ou era igual) ao resultado da subtração recíproca e contínua (ἀνθυφαίρεσις ou ἀνταναίρεσις) de dois números ou grandezas. Assim, para obter uma razão, "dados dois números ou duas linhas [...], então conte: quantas vezes a segunda linha pode ser subtraída da primeira linha; quantas vezes o resto pode ser subtraído da segunda linha; quantas vezes o próximo resto pode ser subtraído desse resto; etc." ([9], p. 366–367) Por exemplo, para obter a razão entre 12 e 7,

– subtraia 7 de 12 tantas vezes quanto possível: 1 vez, e ficamos com 7 e 5;

– subtraia 5 de 7 tantas vezes quanto possível: 1 vez, e ficamos com 5 e 2;

– subtraia 2 de 5 tantas vezes quanto possível: 2 vezes, e ficamos com 2 e 1;

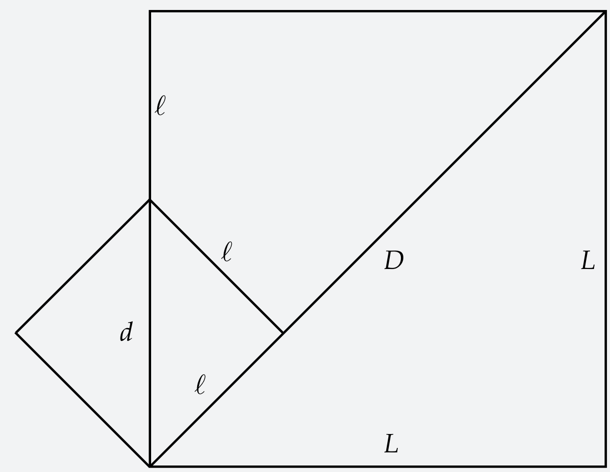
– subtraia 1 de 2 tantas vezes quanto possível: 2 vezes, e ficamos apenas com o 1.

Assim, a razão entre 12 e 5 estaria relacionada com a sequência de resultados 1 vez, 1 vez, 2 vezes, 2 vezes, isto é, à subtração recíproca e contínua dos dois números.

Fowler, então, argumenta que, através desse conceito de razão, ou procedimento, poder-se-ia lidar com o problema da incomensurabilidade sem necessariamente ter-se de repensar os fundamentos da matemática. Reproduzimos, no Quadro 1, sua argumentação para o caso do lado e diagonal de um quadrado (nesse caso não temos dois números, mas duas grandezas).

Em razão dos trabalhos de Burkert e de Fowler, historiadores da matemática e da Antiguidade têm estado

Quadro 1. Expressando a diagonal do quadrado em números.



Sejam L e D o lado e a diagonal do quadrado maior; e ℓ e d os segmentos correspondentes no quadrado menor. A figura é construída de modo que L seja composto de ℓ e d (implicando também que $D - \ell = L$). Vamos procurar a razão entre $D + L$ e L, inicialmente, que é a mesma que entre $d + \ell$ e ℓ. Temos que L cabe duas vezes em $D + L$, sobrando $D - L = \ell$; procuramos agora quantas vezes ℓ cabe em L, isto é, quantas vezes ℓ cabe em $\ell + d$. Ora isso é o mesmo que perguntar quantas vezes L cabe em $L + D$, e voltamos, assim, à situação inicial.

Portanto o resultado das subtrações recíprocas contínuas entre $D + L$ e L, quer dizer, a razão entre $D + L$ e L em termos da ἀνθυφαίρεσις é $2, 2, 2 \ldots$.

Por fim, a razão em termos da ἀνθυφαίρεσις entre D e L é $1, 2, 2, \ldots$, que dessa forma, está expressa em números, sem necessariamente causar uma crise de fundamentos.

bastante convencidos de que a descoberta da incomensurabilidade não gerou uma crise. Ou, se gerou, não deixou nenhum traço convincente nas fontes para o trabalho historiográfico.

Conclusão

A crise da incomensurabilidade parece só existir quando lemos os textos gregos com os nossos termos, esquecendo-nos de prestar atenção no modo como os atores históricos viam a matemática. Quando tentamos nos colocar no ponto de vista dos antigos gregos, em especial dos primeiros pitagóricos, os motivos para a crise como que desaparecem.

A história da história da incomensurabilidade fornece assim um exemplo dos mal-entendidos que podem ser formulados quanto se tenta interpretar os personagens históricos não nos termos deles, mas nos do interpretador. Isso não é tão incomum quanto parece. Por exemplo, grande parte da historiografia que o século XX produziu sobre a matemática da Mesopotâmia ocupou-se de interpretar os números dos tabletes com textos matemáticos, mas teve pouco cuidado com as palavras e os contextos em que esses números apareciam. Como resultado, somente mais recentemente, a partir da década de 1990, é que se percebeu o forte caráter geométrico da matemática escrita em cuneiforme ([22]). Entretanto, a história da matemática não é o único campo em que tais mal-entendidos podem surgir. Na história da literatura, por exemplo, o Barroco como um movimento literário, concentrado no século XVII, é um conceito formulado não pelos próprios indivíduos do século XVII mas por românticos e pós-românticos, através de análises que utilizam categorias antes dos analisantes do que dos analisados, como, para citar apenas um exemplo, a da intenção autoral literária, de difícil senão impossível identificação no século XVII ([12]). Igualmente, o conceito de Idade Média foi formulado pelos Renascentistas, em certa medida para enaltecer o momento dos interpretadores (renascentistas) em oposição à uma suposta Era das Trevas ([10]) Também o conceito de Oriente, como tem sido sustentado, foi formulado não de acordo com os habitantes das regiões geográficas a que o termo intenta fazer referência, mas segundo uma intricada teia de interesses coloniais dos séculos XIX e XX ([24]). Os exemplos são inúmeros. O exercício de classificar eventos, períodos e conceitos é natural e legítimo, mas sempre devemos ter em mente os riscos de se atribuir a um determinado contexto, ideias que lhe são totalmente estranhas e não pertinentes.

O caso da incomensurabilidade também nos indica que a própria disciplina história da matemática tem, por sua vez, uma história. Por isso, às vezes, deparamo-nos com visões e reconstruções conflitantes sobre o mesmo objeto de pesquisa. No caso da história da incomensurabilidade, o rigor historiográfico mais aceito atualmente entre os historiadores indica que uma versão da história sem a crise de fundamentos entre pitagóricos é a mais compatível com as fontes.

Isso, no entanto, não quer dizer que os trabalhos que defenderam no passado a ideia de uma crise não tenham tido seu valor. Muito pelo contrário. É preciso que tenhamos, na análise desses historiadores, a mesma sensibilidade que usamos para tratar dos pitagóricos, a fim de que entendamos que a historiografia que praticaram estava condicionada a outros pressupostos sobre a natureza da matemática grega, a história da Grécia Antiga e sobre a própria disciplina historiográfica.

Por fim, a história da incomensurabilidade, ou melhor, a história de como os historiadores da matemática e da Antiguidade escreveram essa história revela-nos um aspecto importante que talvez se aplique a qualquer investigação histórica. O conhecimento historiográfico se dá por aproximações. Essas aproximações dependem dos instrumentos que o historiador usa, bem como das perguntas que é capaz de fazer para suas fontes. Cada geração propõe assim novas aproximações, às vezes, para as mesmas perguntas, às vezes, para perguntas só aproximadamente iguais. Como já se disse, "em história não pode haver a obra definitiva; tudo a que podemos aspirar são aproximações." ([19]) Nesse sentido são perfeitamente conciliáveis as afirmações de que a história, como investigação, possa passar por revisões ou atualizações e ainda assim cultive critérios de rigor inteligíveis e coerentes.

Referências

[1] BECKER, O. Die Lehre von Geraden und Ungeraden in neuten Buch der Euklidischen Elemente. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, v. 3, p. 533–553, 1936.

[2] BECKER, O. *Das Mathematischen Denken der Antike.* Göttingen: Vanderhoeck & Ruprecht, 1957.

[3] BOYER, C. *A history of mathematics.* 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

[4] BURKERT, W. *Weisheit und Wissenschaft: Studien zur Pythagoras, Philolaos und Platon.* Nürnberg: Hans Carl, 1962.

[5] BURKERT, W. *Lore and science in ancient pythagoreanism.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1972.

[6] CUOMO, S. *Ancient mathematics.* London: Routledge, 2001.

[7] EUCLIDES. *Elementa. v.III: Liber X cum appendice.* Heiberg J. L., Stamatis E. S. (Eds.). Leipzig: Teubner, 1971. (Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana)

[8] EVES, H. *An introduction to the history of mathematics.* 3. ed. New York: Holt & Rinehart Winston, 1969.

[9] FOWLER, D. *The mathematics of Plato´s Academy. A new Reconstruction.* 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 1999.

[10] FRANCO JÚNIOR, H. *Idade Média, o nascimento do Ocidente*. 2. ed. São Paulo: Brasiliense, 2006.

[11] GRATTAN-GUINNESS, I. *The Fontana history of the mathematical sciences. The rainbow of mathematics.* London: Fontana Press, 1997.

[12] HANSEN, J. A. Barroco, neobarroco e outras ruínas. *Estudios Portugueses*, v. 3, p. 171–217, 2003.

[13] JÂMBLICO. *Communi mathematica scientia.* Nicola Festa (ed.). Leipzig: Teubner, 1891. (Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, 1443)

[14] JÂMBLICO. *De vita Pithagorica.* Ludwig Deubner (ed.). Leipzig: Teubner, 1937.

[15] KLINE, M. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford: Oxford University Press, 1972. v. 1.

[16] KNORR, W. *The evolution of the Euclidean Elements: a study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance.*. Dordrecht: D. Reidel, 1975.

[17] MAINZER, K. Real numbers. In: EBBINGHAUS, H.-D. ET AL. *Numbers.* New York: Springer, 1991. p. 27–53. (Graduate texts in mathematics, 123. Readings in mathematics)

[18] NETZ, R. *The shaping of deduction in greek mathematics: a study in cognitive history.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999. (Ideas in Context, 51)

[19] NOVAIS, F. A. *Aproximações: estudos de história e historiografia.* São Paulo: Cosac & Naify, 2005.

[20] PLUTARCO. *Plutarch's Lives*, vol. II. New York: The Modern Library, 1992.

[21] PROCLO. *In Primum Euclidis Elementorum Libri Commentarii.* G. Friedlein (ed.). Hildesheim: Georg Olms, 1992. 2ª impressão da edição de Leipzig: Teubner, 1873, 65, 15-21.

[22] ROBSON, E.; STEDALL, J. (EDS.) *Oxford handbook of the history of mathematics.* Oxford: Oxford University Press, 2008. (Oxford Handbooks)

[23] SACHS, E. *Die fünf Platonischen Körper.* Berlin: Weidmann, 1917.

[24] SAID, E. W. *Orientalism.*. London: Penguin Books, 1995.

[25] TANNERY, P. *Pour l'histoire de la science hellène, de Thàles à Empédocle.* 2. ed. Paris: Gauthiers-Villars, 1930. (A primeira edição é de 1887.)

Carlos H. B. Gonçalves
Escola de Artes, Ciências e Humanidades da USP
`bgcarlos@usp.br`

Claudio Possani
Instituto de Matemática e Estatística da USP
`cpossani@ime.usp.br`