



UNICAMP

**22nd IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN
ENGINEERING**

*2nd Brazilian Congress on Computational
Mechanics*



NOVEMBER 7-9, 2001
Campinas, SP
Brazil

Configuração mínima PC:

IBM PC compatível 486DX2 66Mhz, com 8 Mb de RAM, CD-ROM 4X, SVGA em 640 x 256 cores

Sistema: Windows 3.1 ou superior

Configuração mínima MAC:

CPU 68040, com 8 Mb de RAM, CD-ROM 4X

Sistema: MAC OS 7.5.3 ou superior

Instruções para Instalação:

Caso o sistema operacional seja Windows 95 ou 98 o CD abrirá automaticamente na página inicial dos Anais, se for Windows 3.1 ou 3.11 instale em seu computador o Acrobat Reader 3.0, seguindo como descrito abaixo.

No CD, abrir o diretório ACROBAT.

Escolher o sistema (Win ou Mac)

Usar 32BITS para Windows 95 ou 98 e 16BITS para Windows 3.1 ou 3.11.

Obs: Para Windows 3.1 ou 3.11 utilizar o diretório 3.01.

Executar o arquivo na pasta correspondente, seguindo as instruções.

Concluída a instalação, localizar o arquivo CILAMCE.pdf no CD e executá-lo, para entrar na página inicial dos Anais.

Minimum PC Configuration:

IBM PC compatible 486DX2 66Mhz with 8 Mb of RAM, 4X CD-ROM, SVGA 640x800x256 colors

Operating System: MS-Windows 3.1 or higher

Minimum MAC Configuration:

CPU 68040 with 8 Mb of RAM, 4X CD-ROM

Operating System: MAC OS 7.5.3 or higher

Installation Procedure:

For Windows 95 or 98: The CD-ROM will automatically startup the Annals Initial Page.

For Windows 3.1 or 3.11: Please, install the Acrobat Reader 3.0 following the steps below. From the CD ROM, go to the ACROBAT directory, select the 32BITS directory for Windows 95/98 or the 16BITS directory for Windows 3.1/3.11 (Note: for Windows 3.1 or 3.11 use the 3.01 directory).

Execute the installation file from the selected folder, following its instructions.

When the installation is done, find and double-click on the CILAMCE 2001 startup

ISBN 85-902253-1-3



Produzido por:



Monferrer Produções Ltda

Fone/Fax: (11) 4127-6763

E-mail: monferrer@uol.com.br

SET
03
12
01

2



**22nd IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN
ENGINEERING**

2nd Brazilian Congress on Computational Mechanics
NOVEMBER 7-9, 2001
Campinas, SP - Brazil

**UMA FORMA SIMPLES DE SE INTRODUIZIR VÍNCULOS INTERNOS
GENERALIZADOS EM ESTRUTURAS MODELADAS PELO MEF**

Marcelo Greco * (Aluno de Doutorado)

Humberto Breves Coda * (Professor Associado)

* Universidade de São Paulo / Escola de Engenharia de São Carlos / Departamento de Engenharia de Estruturas

Av. Trabalhador Sãocharlense, 400 / São Carlos, SP / CEP: 13566-590

G 791 f

Resumo. Apresenta-se neste trabalho uma técnica simples para a introdução de vínculos internos com deslocamentos livres em estruturas aporticadas. A modelagem numérica da estrutura baseia-se no Método dos Elementos Finitos (MEF) e a conexão nodal dos graus de liberdade dos elementos é feita via compatibilidade cinemática. A técnica proposta é geral e pode ser aplicada a outros tipos de problemas, inclusive em problemas não-lineares. São apresentados dois exemplos numéricos, um estático e outro dinâmico.

Palavras chave: MEF, Pórticos, Vínculos.

1. INTRODUÇÃO

Os métodos clássicos formulados via elementos finitos para problemas de pórticos planos não possibilitam a consideração de nós com deslocamentos livres, por exemplo: o caso de rótulas. Uma característica interessante nos programas computacionais clássicos baseados no Método dos Elementos Finitos é a capacidade de resolver mais de uma estrutura simultaneamente em um mesmo sistema de equações, com os graus de liberdade das estruturas independentes. Esta independência é obtida através dos próprios dados de entrada do problema. A idéia deste artigo é fazer uso da possibilidade de resolver estruturas independentes adaptando-a para o caso de nós com deslocamentos livres, através de uma compatibilidade cinemática dos graus de liberdade comuns aos elementos estruturais conectados, ver Coda (2000) e Brasil (1990). Deve-se mencionar que outra maneira de se enxergar a técnica proposta é observar que a parametrização

1224656
050302

SYSNO	1224656
PROD	003417
ACERVO EESC	

nodal¹ do funcional de energia que gera a matriz de rigidez² do problema permite total liberdade na associação destes parâmetros aos nós. Assim, dois elementos vizinhos podem possuir nós de extremidade em uma mesma posição geométrica, porém com numeração nodal distinta, significando que os graus de liberdade não estão associados entre si, ou, no caso da técnica proposta, que apenas os graus de liberdade de interesse estejam associados, ficando os restantes livres. A técnica elaborada é geral, podendo ser utilizada em qualquer tipo de modelagem. Aqui esta é aplicada em problemas de pórticos planos, estáticos e dinâmicos.

2. CONEXÃO NODAL

A idéia principal é somar as contribuições das matrizes de rigidez, no caso estático, nos graus de liberdade comuns às estruturas acopladas. No caso dinâmico, as contribuições a serem somadas são nas matrizes de rigidez, massa e amortecimento.

Para montar o sistema é utilizada uma re-numeração dos graus de liberdade nodais conectados. Por exemplo, para o caso de uma rótula, tem-se os seguintes graus de liberdade iniciais e reordenados.

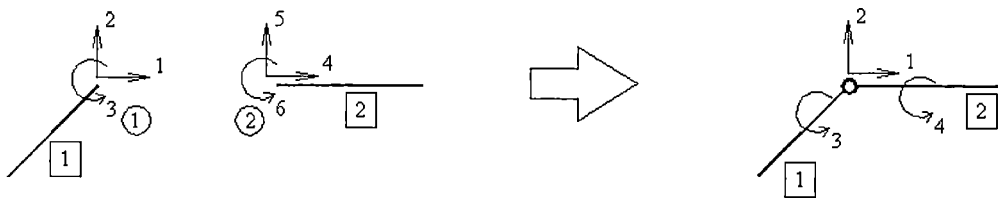


Figura 1 - Graus de liberdade iniciais e reordenados.

As parcelas das matrizes de rigidez K dos elementos finitos 1 e 2 ilustrados na Fig.1, em coordenadas globais, relacionadas aos nós conectados, possuem inicialmente a seguinte forma:

$$K_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Após a conexão dos graus de liberdade, as parcelas relacionadas com os nós conectados adquirem a seguinte configuração:

$$K = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & A_{13} & B_{13} \\ A_{12} + B_{12} & A_{22} + B_{22} & A_{23} & B_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 \\ B_{13} & B_{23} & 0 & B_{33} \end{bmatrix} \quad (2)$$

¹ Graus de liberdade.

² Caso estático.

No caso dinâmico, acoplam-se também as matrizes de massa M e amortecimento C , de maneira análoga.

Para o caso usual de pórticos planos formulados pelo MEF, tem-se a conexão dos três graus de liberdade comuns aos elementos finitos, em coordenadas globais.

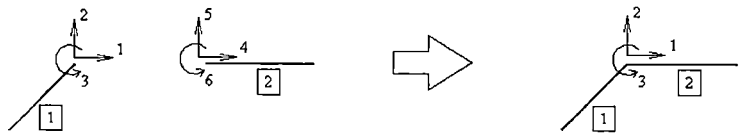


Figura 2 - Conexão nodal sem movimento livre.

Quando for necessário reordenar os graus de liberdade³, o nó de conexão será chamado de nó duplo, seguindo uma notação clássica do Método dos Elementos de Contorno encontrada em Venturini (1988). O artifício do nó duplo no local da conexão pode ser aplicado em vários de casos de compatibilidade cinemática entre elementos.

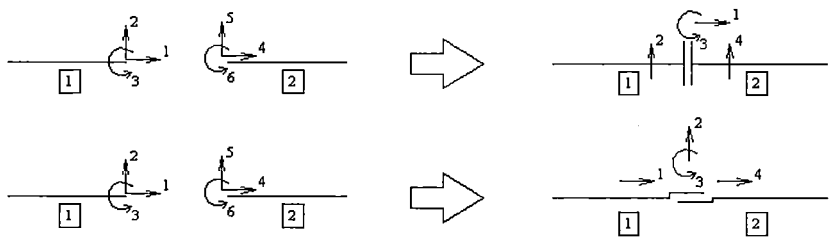


Figura 3 - Casos de conexão nodal com movimentos livres entre dois elementos.

Pode-se ainda aplicar o esquema apresentado na conexão parcial ou total de mais de dois elementos.

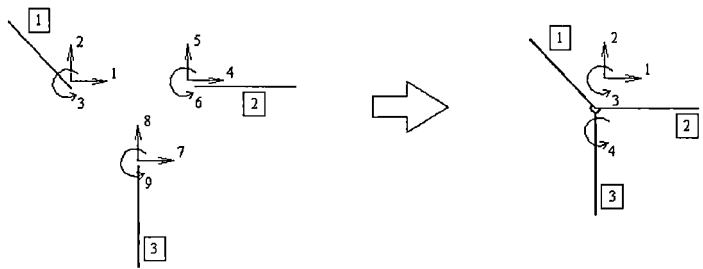


Figura 4 - Conexão parcial entre três elementos finitos.

Este conceito simples pode ser facilmente estendido para formulações de pórticos tridimensionais e com uma pouco mais de esforço para placas e outros tipos de sólidos, levando-se em consideração acoplamentos em coordenadas locais, ver Greco (2000).

³ Na existência de vínculos internos.

3. ROTINA DE IMPLEMENTAÇÃO PROPOSTA

Apresenta-se neste item a rotina computacional de implementação da re-numeração dos graus de liberdade. A linguagem de programação utilizada é o FORTAN77.

Pela entrada de dados, definem-se os graus de liberdade nodais a serem redirecionados. O valor nulo na coordenada redirecionada indica que existe um grau de liberdade livre na posição. Por exemplo, na Fig. 1, o nó acoplado da barra 2 teria a seguinte entrada:

NÓ, COORD.1, COORD.2, COORD.3
2, 1, 2, 0

É criada uma variável chamada de CGL que armazena os graus de liberdade de cada nó, com dimensões (NNO,3). A variável NNO representa o número de nós total da estrutura. Inicialmente, CGL é montada apenas com os graus de liberdade redirecionados, no caso da Fig.1, tem-se:

CGL(1,1)=0
CGL(1,2)=0
CGL(1,3)=0
CGL(2,1)=1
CGL(2,2)=2
CGL(2,3)=0

Em seguida, faz-se a reordenação da matriz CGL. Sendo necessária também a mudança de vinculação dos graus de liberdade. A variável que armazena a vinculação das coordenadas é chamada de VINC; tem dimensão (3*NNO). Utilizou-se valor 1 para coordenada com deslocamento prescrito e valor 0 para coordenada com força prescrita. No código computacional, I e AUX são contadores. O símbolo de exclamação indica comentário; portanto não é compilado⁴.

AUX=1	!Valor da primeira coordenada
DO I=1,NNO	!Inicia a organização da matriz CGL, nó a nó
IF (CGL(I,1).EQ.0) THEN	!Verifica se a 1ª coordenada do nó I é livre
CGL(I,1)=AUX	!Atribui valor à 1ª coordenada global do nó I
VINC(AUX)=VINC(3*I-2)	!Atribui o valor da vinculação antiga à 1ª coordenada global do nó I
AUX=AUX+1	!Valor da próxima coordenada
ENDIF	!Fim da verificação da 1ª coordenada
IF (CGL(I,2).EQ.0) THEN	!Verifica se a 2ª coordenada do nó I é livre
CGL(I,2)=AUX	!Atribui valor à 2ª coordenada global do nó I
VINC(AUX)=VINC(3*I-1)	!Atribui o valor da vinculação antiga à 2ª coordenada global do nó I
AUX=AUX+1	!Valor da próxima coordenada
ENDIF	!Fim da verificação da 2ª coordenada
IF (CGL(I,3).EQ.0) THEN	!Verifica se 3ª coordenada do nó I é livre
CGL(I,3)=AUX	!Atribui valor à 3ª coordenada global do nó I

⁴ Nem todos compiladores FORTRAN aceitam este tipo de comentário.

VINC(AUX)=VINC(3*I)	!Atribui o valor da vinculação antiga à 3ª coordenada
	!global do nó I
AUX=AUX+1	!Valor da próxima coordenada
ENDIF	!Fim da verificação da 3ª coordenada
ENDDO	!Fim da re-numeração dos graus de liberdade

Seguindo a rotina proposta, a matriz CGL, reordenada, para o exemplo da Fig.1 fica expressa por:

```

CGL(1,1)=1
CGL(1,2)=2
CGL(1,3)=3
CGL(2,1)=1
CGL(2,2)=2
CGL(2,3)=4

```

As coordenadas nodais redirecionadas já tiveram os valores de seus graus de liberdade impostos na entrada de dados. É importante ressaltar que para utilização do código acima é necessário que a re-numeração no nó duplo seja feita do nó de maior índice para o de menor.

As matrizes de rigidez K , massa M e amortecimento C da estrutura são montadas a partir das contribuições das matrizes locais KE , ME , CE de cada elemento. As posições onde as matrizes dos elementos são somadas dependem da variável CGL, já reordenada. Segue abaixo a rotina de montagem da matriz de rigidez. As matrizes de massa e amortecimento seguem esquema análogo. A variável NEL armazena o número total de elementos da estrutura, a variável I é um contador e as variáveis GL1, GL2, GL3, GL4, GL5 e GL6 armazenam os graus de liberdade do elemento, sendo os três primeiros valores relacionados ao nó inicial e os três últimos ao nó final. A variável INCID armazena os nós inicial e final de cada elemento; tem dimensão (NEL,2)

I=1,NEL	!Inicia a montagem da matriz de rigidez,
	!considerando a contribuição de cada elemento
GL1=CGL(INCID(I,1),1)	!Grau de liberdade da 1ª coordenada do nó inicial
	!do elemento
GL2=CGL(INCID(I,1),2)	!Grau de liberdade da 2ª coordenada do nó inicial
	!do elemento
GL3=CGL(INCID(I,1),3)	!Grau de liberdade da 3ª coordenada do nó inicial
	!do elemento
GL4=CGL(INCID(I,2),1)	!Grau de liberdade da 1ª coordenada do nó final
	!do elemento
GL5=CGL(INCID(I,2),2)	!Grau de liberdade da 2ª coordenada do nó final
	!do elemento
GL6=CGL(INCID(I,2),3)	!Grau de liberdade da 3ª coordenada do nó final
	!do elemento
:	!Cálculo da matrizes de rigidez KE de cada
	!elemento (em coordenadas globais)
K(GL1,GL1)=K(GL1,GL1)+KE(1,1)	!Monta a matriz de rigidez da estrutura K em
K(GL1,GL2)=K(GL1,GL2)+KE(1,2)	!função das matrizes de rigidez dos elementos

```

:
K(GL6,GL6)=K(GL6,GL6)+KE(6,6)
ENDDO
! KE e dos graus de liberdade redirecionados
!Fim das contribuições dos elementos

```

Foi apresentada a montagem da matriz quadrada, por simplicidade, porém a transformação da rotina para montagem de matriz em banda ou semibanda é imediata.

4. EXEMPLOS

Para ilustrar a técnica descrita, são apresentados dois exemplos numéricos, um estático e um dinâmico. Os graus de liberdade iniciais e reordenados são apresentados na forma de tabelas. Apresentam-se ainda, em figuras, os resultados obtidos e os graus de liberdades reordenados.

4.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo é uma treliça, estaticamente indeterminada uma vez, composta por três barras de características físicas iguais. A solução analítica deste problema é clássica na Teoria das Estruturas, e pode ser encontrada em Timoshenko & Gere (1982).

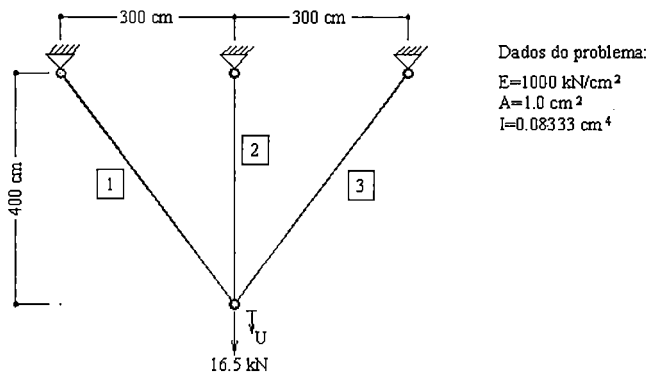


Figura 5 - Dados do exemplo 1.

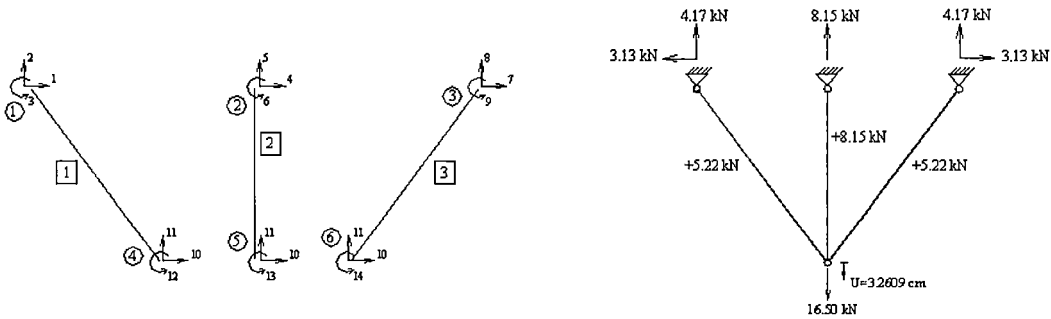


Figura 6 - Coordenadas reordenadas e resultados.

São apresentados na Tabela 1 apenas os graus de liberdade nodais modificados, para os nós 1, 2, 3 e 4 não há mudança de numeração.

Tabela 1 - Coordenadas iniciais e reordenadas, nos graus de liberdade modificados

Nó	GL inicial	GL reordenado
5	13	10
	14	11
	15	13
6	16	10
	17	11
	18	14

4.2 Exemplo 2

O segundo exemplo é um pórtico estaticamente determinado, no qual é feita uma análise dinâmica, com e sem a consideração de amortecimento físico, em confronto com a resposta estática do problema correlato. No caso dinâmico, todas as cargas são aplicadas instantaneamente na estrutura.

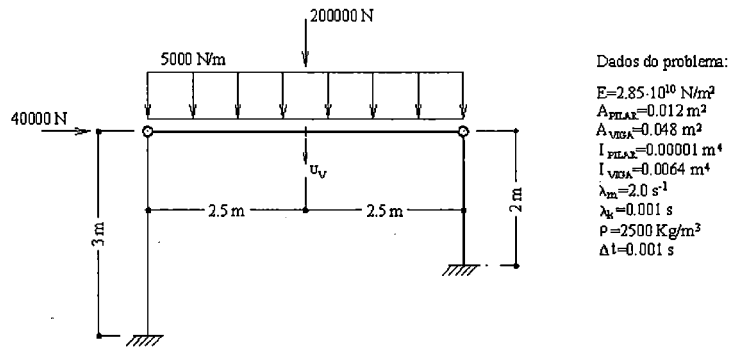


Figura 7 - Dados do exemplo 2.

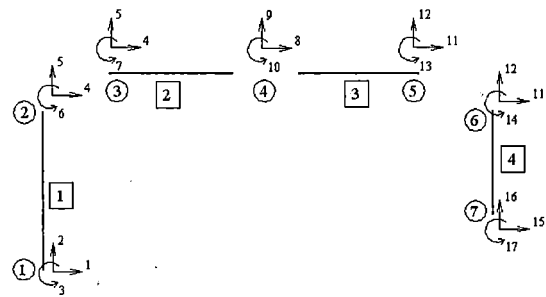


Figura 8 - Coordenadas reordenadas.

Tabela 2 - Coordenadas iniciais e reordenadas, nos graus de liberdade modificados

Nó	GL inicial	GL reordenado	Nó	GL inicial	GL reordenado
3	7	4	6	16	11
	8	5		17	12
	9	7		18	14
4	10	8	7	19	15
	11	9		20	16
	12	10		21	17
5	13	11			
	14	12			
	15	13			

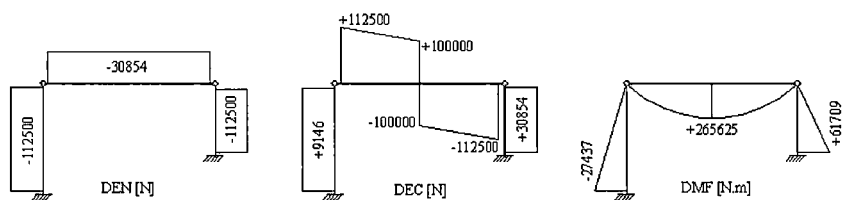


Figura 9 - Resultados da análise estática⁵.

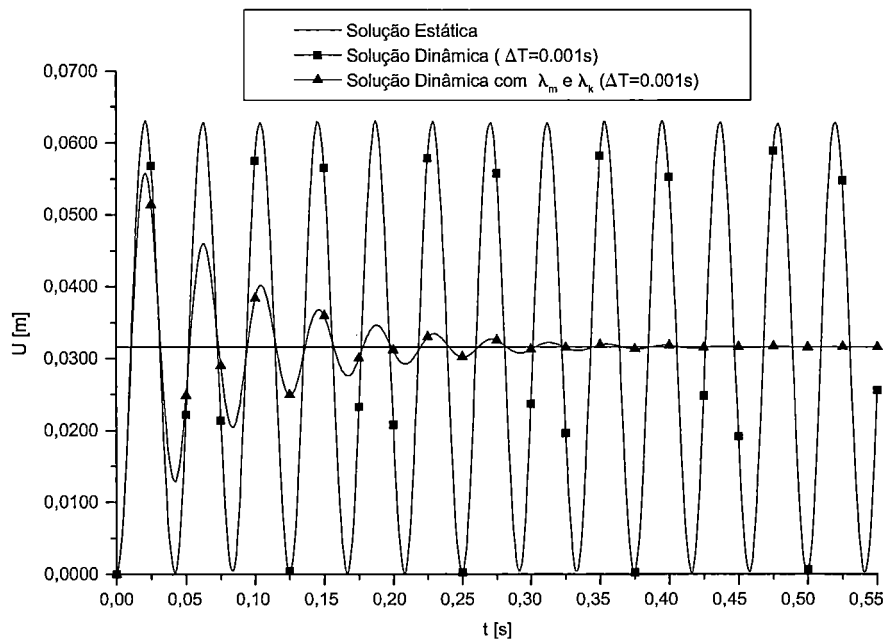


Figura 10 - Deslocamento vertical U_V .

⁵ Sinais na convenção usual de esforços de Engenharia.

Pela Fig. 10, observa-se que a resposta dinâmica sem amortecimento possui resposta harmônica, com amplitude igual ao dobro da resposta estática. No caso da resposta dinâmica com amortecimento, o deslocamento oscila no tempo, até convergir para o valor estático⁶. As respostas dinâmicas com e sem amortecimento possuem o mesmo período.

Considera-se agora, o carregamento aplicado na estrutura de forma suave, atingindo os valores máximos no instante $t = 1.0\text{ s}$, e a densidade dos elementos com um valor pequeno, $\rho = 0.001\text{ kg/m}^3$. Neste caso, tem-se a resposta convergente para a solução estática, sem as oscilações características dos problemas dinâmicos. Portanto, conclui-se que nestas condições, mesmo utilizando-se a solução dinâmica, os resultados tendem para o comportamento estático, caso chamado de quase-estático.

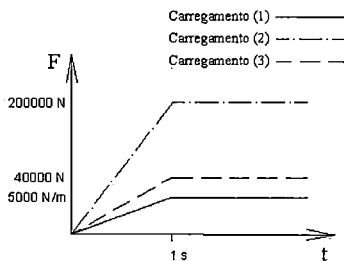


Figura 11 - Carregamento aplicado de forma suave.

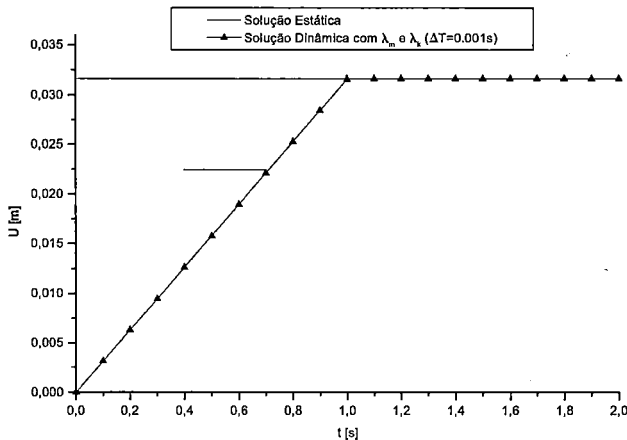


Figura 12 - Deslocamento vertical U_V para o carregamento aplicado de forma suave.

Agradecimentos

A FAPESP pelo apoio financeiro.

⁶ Comportamento esperado para o exemplo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brasil, R.M.L.R.F., 1990, Não-linearidade geométrica na dinâmica de estruturas aporticadas planas: um tratamento pelo método dos elementos finitos, Tese (Doutorado), Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Coda, H.B., 2000, Contribuição à análise dinâmica transiente de meios contínuos pelo método dos elementos de contorno, Texto (Livre-docência), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Greco, M., 2000, Análise do problema harmônico de radiação e dispersão acústica, usando o método dos elementos de contorno, Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Timoshenko, S.P. & Gere, J.E., 1982, Mecânica dos sólidos, vol. 2, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.
- Venturini, W.S., 1988, Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia, Texto (Livre-Docência), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.