

Técnicas em Teoria do Controle

Clodoaldo Grotta Ragazzo

27 de novembro de 2025

Sumário

Prefácio	vi
1 Sistemas Mecânicos Translacionais	1
1.1 Conceitos básicos	1
1.2 Elementos idealizados de um sistema mecânico	3
1.2.1 Massa	3
1.2.2 Mola, Figura 1.2	3
1.2.3 Amortecedor, Figura 1.3	4
1.3 Exemplos de Sistemas Mecânicos	5
1.3.1 Molas em série	5
1.3.2 Molas em paralelo	5
1.3.3 Oscilador Harmônico Amortecido e Forçado	6
1.3.4 Ogata 5 th ed. pg. 66	6
1.4 Forma Canônica das Equações	6
1.5 Exemplos	7
1.5.1 Oscilador harmônico na Figura 1.6	7
1.5.2 Sistema na Figura 1.7	8
2 Sistemas Elétricos e Analogias	10
2.1 Histórico	10

2.2	Conceitos básicos	11
2.3	Lei de Faraday e “Voltagem”	11
2.4	Elementos passivos de um circuito	14
2.5	Elementos ativos de um circuito	17
2.6	Equações diferenciais para um circuito elétrico	18
2.6.1	Exemplo 1, Figura 2.8	19
2.6.2	Exemplo 2, Figura 2.9	20
2.6.3	Exemplo 3: bateria real (Figura 2.10)	21
2.7	Analogias	22
3	Pontos de Equilíbrio e Linearização	24
3.1	Exemplo: Equações Predador-Presa	24
3.2	Linearização em um Ponto de Equilíbrio	25
3.3	Equilíbrios e Linearização	26
3.4	Exemplo: A dinâmica da hiperinflação.	27
3.4.1	Pontos de equilíbrio	28
4	Auto-Valores Complexos.	29
4.1	Equações Lineares com Coeficientes Constantes	29
4.2	Polinômio Característico	30
4.3	Fórmula de Euler	31
4.4	Solução Complexa da Eq. Diferencial	32
4.5	Conclusão	33
4.6	Exemplo	33
5	Exponencial de Matrizes	35
5.1	Motivação	35

5.2	Teorema (Forma Canônica de Jordan) (ver Elon Lages Lima, Álgebra Linear)	36
5.3	Forma Canônica de Jordan Exponencial de Matriz	39
6	Estabilidade de ponto de equilíbrio.	43
6.1	Estabilidade de Liapunov.	43
6.2	Limitação dada pela parte linear	44
6.3	Estabilidade assintótica linear implica estabilidade do equilíbrio da EDO não linear	44
7	Sistemas lineares Forçados (não homogêneos).	46
7.1	Sistemas Lineares Forçados	46
7.1.1	Fórmula da variação das constantes	46
7.1.2	Voltando à variável x	47
7.1.3	Forçante da forma $f(t) = e^{st}\hat{f}$	47
7.1.4	Fórmula da variação das constantes com $f(t) = e^{st}\hat{f}$	48
7.1.5	Uma identidade interessante.	49
7.1.6	Prova que as soluções $e^{st}\hat{x}$, ($\hat{x}$ dada em (12.2)) e $\int_0^\infty e^{(A-sI)\xi} d\xi \hat{f} e^{st}$ são iguais.	50
8	Transformada de Laplace.	51
8.1	Definições	51
8.1.1	Transformada Inversa	51
8.1.2	Observações e Propriedades	52
8.1.3	Aplicação:	52
8.2	Exemplos	54
8.3	Transformada de Laplace de Vetores e Matrizes	55
8.4	Aplicações	56

8.5 Cálculo de $\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ diretamente	57
9 Matriz de Transferência.	59
10 Resposta em frequência: 1ºe 2º ordem.	64
11 Resposta transiente: 1ºe 2ºordem.	72
11.1 Resposta de 1ºordem	72
11.2 Resposta de 2ºordem	78
12 Matriz de Controlabilidade e Estratégia Ótima.	85
13 Controlabilidade: critério do posto de Kalman.	92
14 Forma Normal dos Sistemas Controláveis.	102
14.1 Mudança de variáveis	102
14.2 Sistemas Equivalentes	103
14.3 Teorema (forma de Kalman dos sistemas não controláveis).	103
14.4 Forma canônica para sistemas controláveis com uma entrada, $r = 1$	104
14.5 Controlabilidade do sistema (14.2)	104
14.6 Lema: Forma canônica preliminar para sistemas controláveis.	105
14.7 Prova	106
14.8 Teorema de Cayley-Hamilton	107
14.9 Voltando à equação (14.6):	107
14.10Corolário: O sistema no Lema 14.6 é equivalente à equação (14.1) de ordem n no parágrafo 14.4	109
14.11Matrizes Unitriangulares	109
14.12Teorema: Forma canônica dos sistemas controláveis.	111
14.13Prova.	112

15 Estabilizabilidade	114
15.1 Definição.	114
15.2 Definição.	114
15.3 Prova: Controlável $\Rightarrow$ Completamente Estabilizável. . . .	115
15.4 Matriz de ganho	116
15.5 Nota sobre o Sistema (15.4)	118
15.6 Polinômio Característico Desejado e determinação de $\tilde{K}$. .	118
15.7 Matriz de ganho nas variáveis originais	119
15.8 Estabilizável $\Rightarrow$ Controlável	119
15.9 Matriz de Ganho K	120
16 Observabilidade.	121
16.1 Definição de Observabilidade	121
16.2 Observabilidade para sistemas lineares	122
16.3 Observabilidade e Sistemas Sobre-determinados	122
16.4 Definição de Matriz de Observabilidade R_T	123
16.5 Teorema:	124
16.6 Prova (ideia):	124
17 Observadores.	127
17.1 Exemplo de Sistema Não Estabilizável por Retroalimentação de Saída (Output Feedback)	127
17.2 Construção de Observadores	128
17.3 Definição: Detectabilidade	129
17.4 Prova	130
17.5 Corolário	131
17.6 Análise da Estabilidade do sistema (17.5)	132
17.7 Conclusão.	132

18 Considerações Físicas Relativas à Escolha de Parâmetros. 134

18.1 Introdução	134
18.2 Autovalores	135
18.3 Parâmetros de desempenho (da Aula 10).	136
18.4 Considerações sobre ω_n e ζ	136
18.5 Gráficos	137
18.6 Critério Empírico (Ogata página 171)	137

Prefácio

Estas notas contém partes parcialmente copiadas de diversas fontes encontradas na internet. Elas são de uso exclusivo do curso: MAP2321 Técnicas em Teoria de Controle.

Bibliografia:

- 1) Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica, Johann Baumaister e Antonio Leitão, IMPA 2014.
- 2) Modern Control Engineering, Fifth Edition, Katsuhiko Ogata, Prentice Hall 2010.
- 3) Modern Control Theory, Third Edition, William L. Brogan, Prentice Hall 1991.
- 4) Mathematical Control Theory: An Introduction, Jerzy Zabczyk, Birkhäuser 2008.
- 5) Evans, Lawrence C. "An introduction to mathematical optimal control theory version 0.2."Lecture notes available at <http://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf> (1983).

Capítulo 1

Sistemas Mecânicos

Translacionais

1.1 Conceitos básicos

Sistemas mecânicos translacionais movem-se ao longo de uma linha reta. Esses sistemas consistem principalmente em três elementos básicos: massa, mola e amortecedor.

As leis fundamentais foram propostas por Newton (1687):

- 1) Um corpo permanece em repouso ou em movimento com velocidade constante em linha reta, exceto na medida em que é atuado por uma força.
- 2) Em qualquer instante de tempo, a força resultante em um corpo é igual à aceleração do corpo multiplicada pela sua massa.
- 3) Se dois corpos exercem forças um sobre o outro, essas forças têm a mesma magnitude, mas direções opostas.

A seguir suporemos que a superfície da Terra é um referencial inercial. Os deslocamentos em metros serão sempre medidos com relação a pontos fixos na Terra, Figura 1.1.

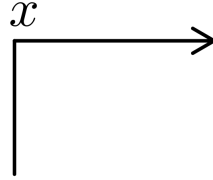


Figura 1.1: Um valor $x = 1$ no eixo horizontal indica um deslocamento de 1 metro em relação à reta horizontal que está fixa na Terra.

Na mecânica a variável independente (da nossa escolha) é o tempo t medido em segundos. As velocidades $v := \dot{x} := \frac{dx}{dt}$ são medidas em metros por segundo e as acelerações $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ são medidas em metros por segundo ao quadrado.

Pela segunda lei de Newton:

$$m\dot{v} = F$$

onde:

- A massa m , medida em quilogramas, é uma propriedade do corpo que não depende do tempo.
- F é a força medida em quilograma vezes metro por segundo ao quadrado (unidade denominada Newton).

As grandezas da mecânica são: tempo, comprimento e massa. Todas as unidades da mecânica, por exemplo Newton, podem ser escritas em função dessas.

Empiricamente, observa-se que muitas forças (gravitacional, de atrito viscoso, etc) dependem apenas da posição e velocidade. Portanto a segunda lei de Newton dá origem à equação de Newton:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}F(x, \dot{x}) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m}F(x, v) \end{cases}$$

Da teoria das equações diferenciais as condições iniciais $x(0), v(0)$ determinam o movimento do sistema por meio da lei de Newton.

As posições e velocidades dos diversos pontos materiais de um sistema mecânico são as variáveis de estado do sistema. Dados os seus valores iniciais, é possível determinar o movimento ou dinâmica do sistema.

1.2 Elementos idealizados de um sistema mecânico

1.2.1 Massa

A massa é a propriedade de um corpo que armazena energia cinética: $m\frac{v^2}{2}$ (medida em Joules:= Newton vezes metro). Se um objeto aplica uma força em um corpo de massa m , então o objeto sofre uma força oposta (terceira lei). A massa ideal é indeformável.

1.2.2 Mola, Figura 1.2

A mola de constante elástica k é um elemento que armazena energia de deformação, definida por $k\frac{(\Delta x)^2}{2}$. Se um objeto exerce uma força na mola k , então a mola exerce uma força oposta no objeto de mesma intensidade.

Essa força oposta é proporcional ao deslocamento da mola $F = k\Delta x$. A mola ideal não possui inércia, portanto, a força resultante em uma mola sempre é nula.

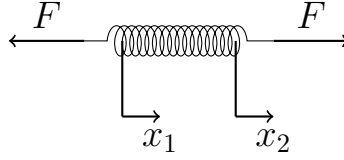


Figura 1.2: A deformação da mola é $\Delta x = x_2 - x_1$. A força que age na mola, $F = k(x_2 - x_1) = k\Delta x$, pode tensionar a mola $\Delta x > 0$ ou comprimir a mola $\Delta x < 0$.

1.2.3 Amortecedor, Figura 1.3

O amortecedor é um elemento que dissipa energia. A potência (energia por unidade de tempo Watt=Joule/segundo) dissipada por um amortecedor é $b(\Delta v)^2$, onde b é o coeficiente de amortecimento viscoso. Se um objeto exerce uma força no amortecedor, então o amortecedor exerce uma força oposta no objeto de mesma intensidade. Essa força oposta é proporcional à velocidade $F = b\Delta v$. O amortecedor ideal não possui inércia, portanto a força resultante em um amortecedor sempre é nula.

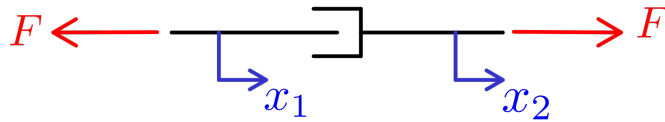


Figura 1.3: A taxa de deformação do amortecedor é $\Delta v = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$. A força que age no amortecedor, $F = b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = b\Delta v$, pode estendê-lo $\Delta v > 0$ ou encurtá-lo $\Delta v < 0$.

1.3 Exemplos de Sistemas Mecânicos

1.3.1 Molas em série

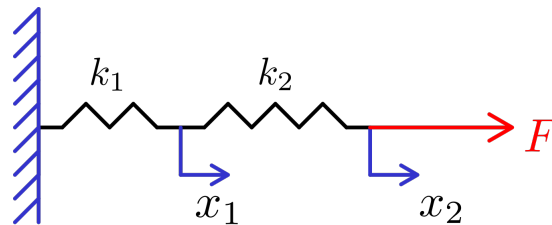


Figura 1.4: O sistema pode ser trocado pela mola equivalente $x_2 k_{eq} = F$ onde $k_{eq} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

1.3.2 Molas em paralelo

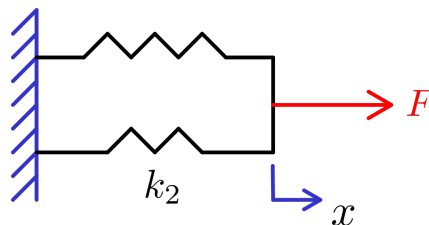


Figura 1.5: O sistema pode ser trocado pela mola equivalente $x k_{eq} = F$ onde $k_{eq} = k_1 + k_2$

1.3.3 Oscilador Harmônico Amortecido e Forçado

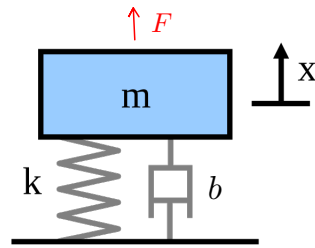


Figura 1.6: A equação de movimento é $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F$.

1.3.4 Ogata 5th ed. pg. 66

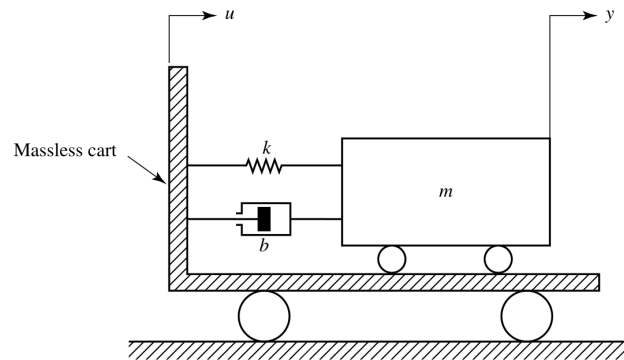


Figura 1.7: A equação de movimento é $m\ddot{y} = -k(y - u) - b(\dot{y} - \dot{u})$. O deslocamento $u(t)$ é prescrito.

1.4 Forma Canônica das Equações

Sejam:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{variáveis de estado (posições e velocidades),}$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} \quad \text{variáveis de entradas (forças, deslocamentos prescritos, etc),}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \text{variáveis de saída (quantidades medidas ou interessantes).}$$

A forma canônica das equações é:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

Onde as dimensões das matrizes são:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

1.5 Exemplos

1.5.1 Oscilador harmônico na Figura 1.6

Para não confundir o vetor de estados $\mathbf{x}$ com a variável de deslocamento, x introduzimos uma nova notação:

$$m\ddot{q} = -kq - b\dot{q} - F(t)$$

Definimos:

$$q = x_1 \quad \text{variáveis de estado}$$

$$\dot{q} = x_2$$

$$F = u_1 \quad \text{entrada}$$

$$q = y_1 \quad \text{saída}$$

Supondo que estejamos interessados na posição q (saída) e a entrada seja a força F , obtemos as equações na forma canônica:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u_1$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1.5.2 Sistema na Figura 1.7

Novamente, reescrevemos as equações usando uma nova notação:

$$\ddot{q} = -\frac{k}{m}(q - u) - \frac{b}{m}(\dot{q} - \dot{u})$$

Estamos interessados na posição q (saída). A entrada é u , como representá-la na forma canônica?

Fazendo

$$x_1 = q$$

$$x_2 = \dot{q} - \beta u,$$

onde β é uma constante a ser determinada, temos

$$\dot{x}_1 = \dot{q} = x_2 + \beta u$$

e

$$\dot{x}_2 = \ddot{q} - \beta \dot{u} = -\frac{k}{m}q - \frac{b}{m}\dot{q} + \frac{k}{m}u + \left(\frac{b}{m} - \beta\right)\dot{u}$$

Como queremos escrever as equações do sistema apenas como função da entrada u , e não de sua derivada $\dot{u}$, impomos:

$$\beta = \frac{b}{m} \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{b}{m}\beta\right)u$$

ou seja:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \frac{b^2}{m^2} \end{pmatrix} u$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Sistemas Elétricos e Analogias

2.1 Histórico

1. **Electricus** = como âmbar = latinização da *elektron* (grego) = âmbar.
(William Gilbert, 1600)

2. **Datas:**

- **Antiguidade:** carregamento eletrostático do âmbar por esfregamento, peixe elétrico e ímãs naturais.
- **1785:** Lei de Coulomb da atração eletrostática.
- **1799:** Alessandro Volta, bateria.
- **1813:** Gauss, campo eletrostático.
- **1820:** Oersted (dinamarquês), corrente elétrica deflete bússola.
- **1823:** Faraday, campo magnético variável cria campo elétrico.
- **1861-1862:** Leis de Maxwell.

2.2 Conceitos básicos

Aqui, por sistema elétrico (ou circuito elétrico) entenderemos uma ligação de elementos elétricos passivos: resistores, indutores, capacitores; e ativos: baterias e fontes de tensão alternada.

Variáveis de estado:

$$q = \text{carga}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \text{corrente}$$

Unidades:

- **Carga** = Coulomb = 6.24×10^{18} elétrons (C). A força entre duas cargas elétricas pontuais de $1\ C$ separadas por um metro ≈ 900 mil toneladas-força! Geralmente, usa-se microcoulomb (μC) ou nanocoulomb (nC).
- **Corrente** = Ampère = $\frac{C}{s}$ (A). Uma corrente elétrica é um fluxo de partículas carregadas, como elétrons ou íons, movendo-se através de um condutor elétrico ou no espaço. A direção convencional da corrente é definida como a direção em que as cargas positivas fluem.
- **Obs:** A corrente $\frac{dq}{dt}$ é a unidade fundamental da eletricidade (e não a carga q), pois é mais fácil de medir (Oersted).

2.3 Lei de Faraday e “Voltagem”

O campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}) := \mathbf{F}/q$ é definido como a razão entre força elétrica $\mathbf{F}$, que age em uma carga q estacionada no ponto $\mathbf{x}$, dividida pela carga. O campo magnético $\mathbf{B}$ é definido usando forças magnéticas.

Lei de Faraday da indução eletromagnética, Figura 2.1:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{Faraday})$$

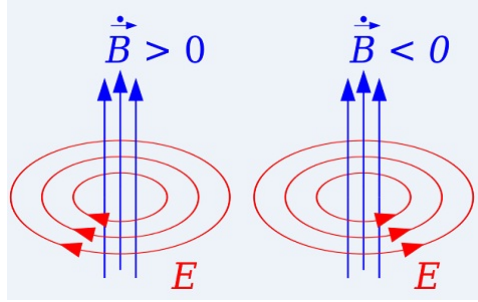


Figura 2.1: A integral de linha do campo elétrico $\mathbf{E}$ ao longo de um círculo na figura é igual à integral de $-\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n}$ sobre uma superfície cujo bordo é o círculo, $\mathbf{n}$ é a normal à superfície .

Em um campo magnético estático $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ e

$$V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}_o) = - \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.1)$$

independe da curva que liga o ponto $\mathbf{x}_o$ a $\mathbf{x}$. Suponha que o ponto $\mathbf{x}_o$ está fixo na superfície da Terra¹. Neste caso, $V(\mathbf{x})$ é uma função da variável $\mathbf{x}$ chamado de potencial eletrostático (com referência à Terra).

Note: se há campos magnéticos variáveis, então $V(\mathbf{x})$ na equação (2.1) depende do caminho que liga $\mathbf{x}_o$ a $\mathbf{x}$.

Se multiplicarmos a equação (2.1) dos dois lados por q , obtemos

$$qV(\mathbf{x}) - qV(\mathbf{x}_o) = - \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.2)$$

que é igual ao trabalho, ou energia, para levar a carga de $\mathbf{x}_o$ até $\mathbf{x}$.

¹O campo elétrico na superfície da Terra pode ser assumido como nulo, de outro modo haveria movimento de cargas elétricas sob a Terra. Portanto, para quaisquer dois pontos $\mathbf{x}_o$ e $\mathbf{x}'_o$ na superfície da Terra $V(\mathbf{x}_o) = V(\mathbf{x}'_o)$. Ou seja, a superfície da Terra é conveniente como referência para o cálculo do potencial eletrostático.

Sinal. $\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{x})$ é a força na carga devida ao campo elétrico $\mathbf{E}$. Suponha que a carga está em repouso, pois está segura por algum dispositivo mecânico. Então, a força que o dispositivo mecânico exerce na carga é $-q\mathbf{E}(\mathbf{x})$. Caso a carga se mova lentamente, sem aceleração, entre x_o e x

$$x_o \rightarrow x$$

o dispositivo mecânico realizará sobre a carga um trabalho igual a

$$V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}_o).$$

Se $V(\mathbf{x}) > V(\mathbf{x}_o)$, o dispositivo mecânico realiza trabalho sobre a carga.

Se $V(\mathbf{x}) < V(\mathbf{x}_o)$, a carga realiza trabalho sobre o dispositivo mecânico.

Na teoria de circuitos elétricos, onde usam-se elementos idealizados (capacitores, resistores e indutores), os efeitos de campos magnéticos variáveis produzidos pelo circuito são devidamente contidos em cada elemento. Sob essas suposições, o campo elétrico na região externa a cada componente satisfaz $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, e as “Voltagens” ou tensões entre os nós a e b do circuito estão bem definidas por

$$\Delta V_{ab} = V(b) - V(a) = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

desde que o caminho de integração não passe pelo interior de nenhum componente. Esta integral, com o caminho de integração sendo ao longo dos fios de teste, é o que um voltímetro realmente medirá.

Unidade de tensão: Volt $= \frac{\Delta E}{C} =$ Variação de energia por unidade de carga $= \mathbf{Joules/Coulomb} = \frac{kg\,m^2}{s^2C}$

Obs: A energia conecta a eletricidade à mecânica e a outras áreas da física, como por exemplo à termodinâmica.

2.4 Elementos passivos de um circuito

- Capacitor

$$V = \frac{q}{C}$$

$$C = \text{Capacitância (Farad)} = \text{Coulomb/Volt}$$

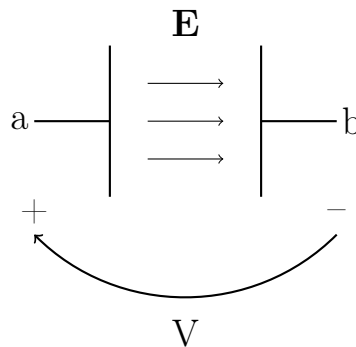


Figura 2.2: Capacitor: $V(b) - V(a) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} < 0$. Se os extremos a e b forem conectados, as cargas positivas fluirão de a para b . As duas placas do capacitor estão isoladas. As cargas não podem ir de uma para outra por dentro do capacitor. A flexa curva indica a direção em que o potencial elétrico cresce: $V = V(a) - V(b)$. Este é o V que aparece na lei do capacitor $V = q/C$.

- Resistor

$$V = RI$$

$$R = \text{Resistência (Ohm)} = \text{Volt/Ampère}$$

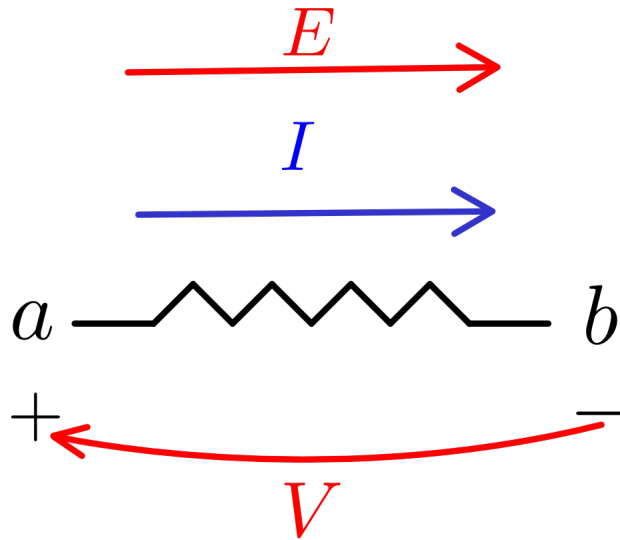


Figura 2.3: Resistor: $V(b) - V(a) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} < 0 \Rightarrow V(a) > V(b)$. A corrente de cargas positivas flui de a para b . A flexa curva indica a direção em que o potencial elétrico cresce: $V = V(a) - V(b)$. Este é o V que aparece na lei de Ohm $V = RI$.

- **Indutor**

$$V = L\dot{I} = L \frac{dI}{dt}$$

$$L = \text{Indutância (Henry)} = \text{Volt segundo} / \text{Ampère}$$

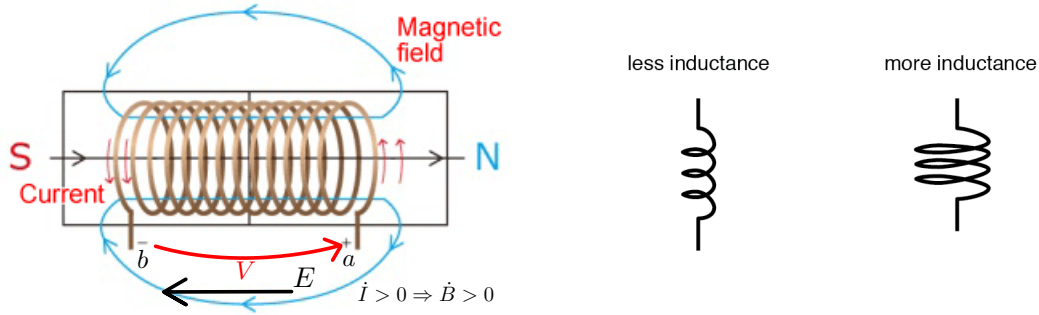


Figura 2.4: Indutor. A corrente I de cargas positivas flui de a para b . Se $\dot{I} > 0$, então $\dot{B} > 0$, onde o campo magnético está indicado em azul claro. Considere um circuito que vai de a até b por dentro do fio e de b até a por fora do fio. Dentro do fio $E = 0$, pois o fio é suposto sem resistência e qualquer $V \neq 0$ causaria uma corrente infinita. Fora do fio, o campo elétrico tem que ter a orientação como na figura acima, devido à lei de Faraday como mostrada na Figura 2.1. Como fora do indutor (ideal) não há campo magnético, para qualquer caminho que liga a a b fora do fio: $V(b) - V(a) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} < 0$. A flecha curva indica a direção em que o potencial elétrico cresce e $V := V(a) - V(b)$. Este é o V que aparece na lei de indução $V = L\dot{I}$.

- **Resumo dos sinais em elementos passivos de um circuito**

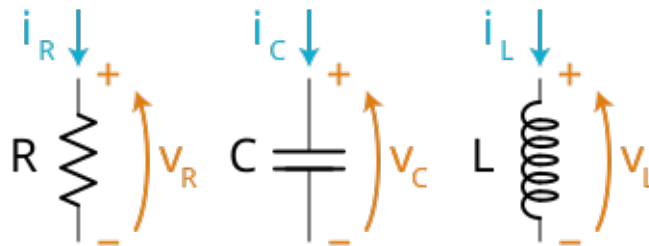


Figura 2.5: Retirado de <https://www.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/circuit-elements/a/ee-ideal-circuit-elements>

2.5 Elementos ativos de um circuito

- **Bateria:** Uma bateria ideal é um componente elétrico que fornece uma diferença de potencial elétrico constante (uma tensão fixa) em seus terminais.

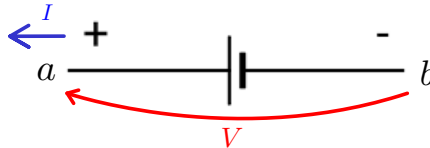


Figura 2.6: Bateria ideal: $V(a) - V(b) = V$ constante independentemente da corrente que passa pela bateria. A corrente de cargas positivas sai de a e entra em b . No caso de baterias recarregáveis, a corrente pode sair de b e entrar em a .

- **Gerador ou fonte de tensão variável:** Uma fonte de tensão variável ideal, gera uma tensão conhecida $V(t)$ como uma função do tempo, independentemente da corrente extraída pelos componentes conectados aos seus terminais. Ver “The Feynman Lectures on Physics” vol. 2, parágrafo 22.2.

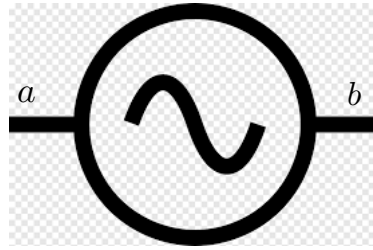


Figura 2.7: Fonte de tensão variável: $V(a) - V(b) = V$, onde $V(t)$ pode ser qualquer função, geralmente periódica no tempo. Tipicamente, $V(t) = A \sin(\omega t)$, onde A é uma amplitude e ω a frequência angular da tensão. A rede elétrica em São Paulo usa $A = 110$ Volts (ou 220 V) e a frequência de 60 Hertz (ciclos por segundo), que corresponde à frequência angular $\omega = 60 \times 2\pi \frac{rad}{seg}$.

2.6 Equações diferenciais para um circuito elétrico

Leis básicas de Kirchhoff:

- 1) A soma das correntes em um nó é nula (conservação da carga).
- 2) A variação da tensão (voltagem) em qualquer laço fechado é nula, decorrência da lei da indução eletromagnética de Faraday e da hipótese de não haver campo magnético fora dos elementos idealizados (ver “The Feynman Lectures on Physics” vol. 2 capítulo 22).

2.6.1 Exemplo 1, Figura 2.8

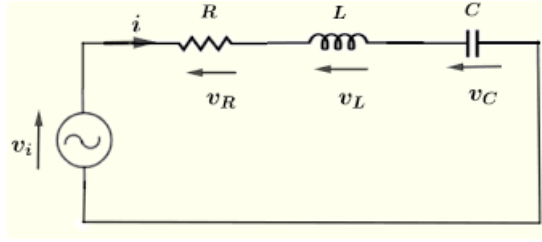


Figura 2.8: Suponha que $v_i(t)$ é dada e que a saída é $v_c(t)$. Note a corrente é a mesma em todos os elementos. Da segunda lei de Kichhoff: $v_c + v_c + v_l = v_i$. Substituindo as leis de cada elemento e usando $I = \dot{q}$, obtemos: $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = v_i$.

As equações do sistema são iguais às obtidas para o oscilador harmônico amortecido após as identificações: $L \rightarrow m$, $R \rightarrow b$, $k \rightarrow C^{-1}$ e $v_i \rightarrow F$. As equações na forma canônica são obtidas fazendo: $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$ (variáveis de estado), $y_1 = v_c = q/C = C^{-1}x_1$ (saída), $u_1 = v_i$ (entrada).

Logo,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}}_{A_{2 \times 2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}}_{B_{2 \times 1}} u_1, \quad y_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}_{C_{1 \times 2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2.6.2 Exemplo 2, Figura 2.9

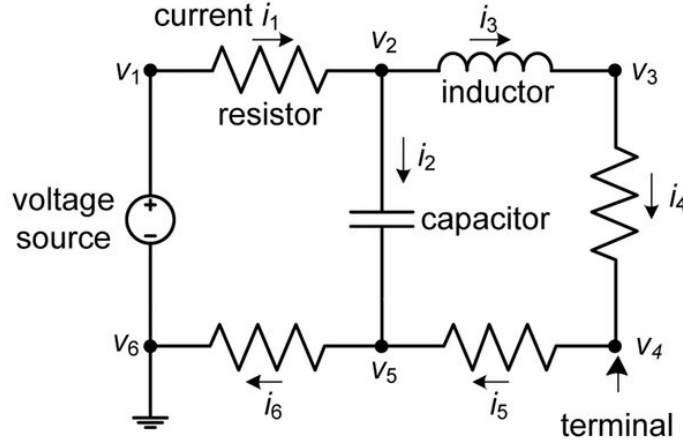


Figura 2.9: Primeira lei de Kirchhoff: $i_2 = i_1 - i_3$, $i_4 = i_3$, $i_5 = i_3$, $i_6 = i_3 + i_2 = i_1$. Todas as correntes ficam determinadas por $i_1 = \dot{q}_1$ e $i_3 = \dot{q}_3$. A tensão $v_i(t) = v_1 - v_6$ é dada (entrada). v_6 é o potencial da Terra e pode ser assumido como zero ou não. Da segunda lei de Kirchhoff aplicada ao primeiro laço: $(v_1 - v_2) + (v_2 - v_5) + (v_6 - v_5) = v_i$. Usando as leis dos elementos, obtemos $R_1 i_1 + C^{-1} q_2 + R_6 i_6 = v_i$ ou $(R_1 + R_6) \dot{q}_1 + C^{-1} (q_1 - q_3) = v_i$. Da segunda lei de Kirchhoff aplicada ao laço externo: $(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_4) + (v_4 - v_5) + (v_5 - v_6) = v_i$. Usando as leis dos elementos, obtemos $R_1 i_1 + L \dot{i}_3 + R_4 i_4 + R_5 i_5 + R_6 i_6 = v_i$ ou $(R_1 + R_6) \dot{q}_1 + (R_4 + R_5) \dot{q}_3 + L \ddot{q}_3 = v_i$.

Para escrever as equações na forma canônica, faremos: $x_1 = q_1$, $x_2 = q_3$, $x_3 = \dot{q}_3$, $u_1 = v_i$ e $r_1 := R_1 + R_6$, $r_2 := R_4 + R_5$. A saída é $y_1 = v_4 - v_6 = (v_4 - v_5) + (v_5 - v_6) = R_5 i_5 + R_6 i_6 = R_5 \dot{q}_3 + R_6 \dot{q}_1$.

Com isso, obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r_1 C} & \frac{1}{r_1 C} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{r_1}{L} & -\frac{r_2}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u_1, \quad y_1 = \begin{pmatrix} R_6 & R_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2.6.3 Exemplo 3: bateria real (Figura 2.10)

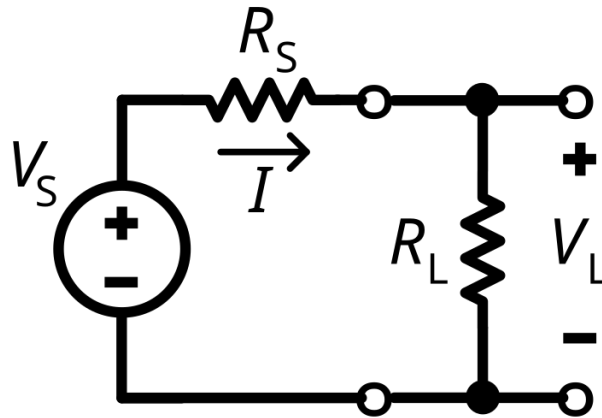


Figura 2.10: Uma bateria real pode ser modelada como uma bateria ideal, V_S na figura (S representa “source”=fonte), mais uma resistência interna, R_S . Na figura, R_L representa uma carga (“load”) resistiva. A voltagem V_L é aquela que efetivamente é aplicada à carga.

Aplicando as leis de Kirchhoff ao circuito na Figura 2.10², chegamos a:

$$I = \frac{V_S}{R_S + R_L}$$

A potência dissipada no elemento resistivo é

$$P_L = V_L I = R_L I^2 = \frac{V_S^2 R_L}{(R_S + R_L)^2}$$

Teorema 2.1. *Se a voltagem V_S e a resistividade interna R_S da bateria são dadas e constantes, então a transferência máxima de potência da bateria para a carga ocorre quando a resistência da carga é igual à resistência interna da bateria: $R_L = R_S$.*

Para provar basta mostrar que a função P_L tem um máximo quando $R_L = R_S$.

²By Cjp24 - Own work based on: Source and load circuit.png by Omegatron, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=57112455>

A eficiência é a razão entre a potência $P_L = V_L I$ dissipada pela carga R_L , e a potência total dissipada pelo circuito $P_T = I(V_S + V_L)$:

$$\text{eficiência} = \frac{P_L}{P_T} = \frac{R_L I^2}{(R_S + R_L) I^2} = \frac{R_L}{(R_S + R_L)}$$

Se $R_S = 0$, então a eficiência é máxima, igual a 1. Isso ocorre pois toda a energia retirada da bateria é usada pela carga. Não há dissipação de energia na bateria.

Se $R_S > 0$ está fixa, então quanto maior a resistência da carga maior a eficiência. No entanto a potência dissipada pela carga é cada vez menor pois a corrente no circuito é cada vez menor.

Se $R_S = R_L$, a potência dissipada pela carga é máxima e a eficiência é 50%. Metade da potência é dissipada pela carga e a outra metade pela bateria.

Algo análogo vale para circuitos de corrente alternada.

2.7 Analogias

Vimos que sistemas mecânicos translacionais e sistemas elétricos conduzem a equações diferenciais da mesma forma. Há de fato mais de uma analogia entre sistemas elétricos e mecânicos, seguiremos uma atribuída a Maxwell (ver Busch-Vishniac, Ilene J. Electromechanical sensors and actuators; Springer, 1998, capítulo 2).

Chamamos de variáveis conjugadas de potência duas variáveis que, quando multiplicadas, produzem a potência. Essa definição permite um grande número de escolhas de conjuntos de variáveis, mas é tradicional escolher aquelas variáveis mais facilmente medidas. Por exemplo, em sistemas mecânicos translacionais, poderíamos usar força e velocidade, ou

a taxa de variação da força e o deslocamento. O primeiro par é a escolha padrão. As variáveis conjugadas de potência padrão estão listadas abaixo:

- **Mecânico:** força, F , e velocidade, v .
- **Rotacional:** torque, τ , e velocidade angular, ω .
- **Elétrico:** tensão, V , e corrente, I .
- **Fluido:** pressão, P , e taxa de fluxo volumétrico, Q .
- **Térmico:** Temperatura, T , e taxa de variação de entropia, DS/dt .

Variáveis de estado Hamiltonianas são aquelas que, quando diferenciadas produzem as variáveis conjugadas de potência. No caso da mecânica: $\dot{p} = F$ e $\dot{x} = v$, onde $p = mv$. O momento linear $p = mv$ e a posição x podem ser tomadas como variáveis de estado (nos exemplos escolhemos a velocidade, que é proporcional ao momento, como variável de estado).

As variáveis conjugadas de potência podem ser classificadas como:

- F , τ , V , P e T são variáveis de esforço.
- v , ω , I , Q e S (entropia) são variáveis de fluxo.

O produto de uma variável de esforço vezes a sua variável conjugada Hamiltoniana é uma forma de energia. A lei da conservação da energia diz que a energia pode transmutar de uma forma a outra, mas deve ser conservada, ou seja:

$$F\Delta x + \tau\delta\theta + V\Delta q + P\Delta vol + T\Delta S = constante$$

onde: x é deslocamento, θ é ângulo, vol é volume, q é carga e S é entropia.

Capítulo 3

Pontos de Equilíbrio e Linearização

3.1 Exemplo: Equações Predador-Presa

1. Considere o sistema de Lotka-Volterra:

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2) \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(-c + dx_1) \quad (3.2)$$

onde: $a > 0$ (taxa de natalidade da presa), $b > 0$ (taxa de predação), $c > 0$ (taxa de mortalidade da presa), $d > 0$ (taxa de natalidade do predador) são constantes positivas. As variáveis de estado são:

- x_1 densidade de presas,
- x_2 densidade de predadores.

2. Os equilíbrios da equação são os pontos onde o campo de velocidades

se anula:

$$\begin{aligned} 0 = \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2) &\Rightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = \frac{a}{b} \\ 0 = \dot{x}_2 = x_2(-c + dx_1) &\Rightarrow x_2 = 0 \text{ ou } x_1 = \frac{c}{d} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Há 2 pontos de equilíbrio:

$$(x_1, x_2) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (x_1, x_2) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

onde $\bar{x}_1 = \frac{c}{d}$ e $\bar{x}_2 = \frac{a}{b}$.

3.2 Linearização em um Ponto de Equilíbrio

1. Para linearizarmos a equação no ponto de equilíbrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, fazemos uma mudança de variáveis:

$$x_1 = \bar{x}_1 + \delta_1$$

$$x_2 = \bar{x}_2 + \delta_2$$

e depois desprezamos todos os termos em δ_1 e δ_2 que não sejam os lineares, pois supomos que $|\delta_1|$ e $|\delta_2|$ são pequenos (logo δ_1^2 e δ_2^2 são desprezíveis).

Obtemos:

$$\dot{x}_1 = \dot{\bar{x}}_1 + \dot{\delta}_1 = (\bar{x}_1 + \delta_1)(a - b(\bar{x}_2 + \delta_2))$$

$$\dot{x}_2 = \dot{\bar{x}}_2 + \dot{\delta}_2 = (\bar{x}_2 + \delta_2)(-c + d(\bar{x}_1 + \delta_1))$$

Ou:

$$\dot{\delta}_1 = \bar{x}_1(a - b\bar{x}_2) + (a - b\bar{x}_2)\delta_1 - \bar{x}_1b\delta_2 + \dots$$

$$\dot{\delta}_2 = \bar{x}_2(-c + d\bar{x}_1) + (-c + d\bar{x}_1)\delta_2 + \bar{x}_2d\delta_1 + \dots$$

Desprezando os termos de ordem $\delta_1^2 + \delta_2^2$, temos:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= 0\delta_1 - \frac{bc}{d}\delta_2 \\ \dot{\delta}_2 &= \frac{ad}{b}\delta_1 + 0\delta_2\end{aligned}$$

ou:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

2. Se na equação acima (3.1) fizermos $a = b = c = d = 1$, o equilíbrio não trivial fica: $\bar{x}_1 = \frac{c}{d} = 1$ e $\bar{x}_2 = \frac{a}{b} = 1$. A linearização em $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1, 1)$ fica:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

3.3 Equilíbrios e Linearização

1. Em geral, considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

ou, abreviadamente, a equação diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

2. Os equilíbrios são as soluções de $\dot{\mathbf{x}} = 0 = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, ou seja,

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

ou ainda

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0 \end{cases}$$

3. Para obter a linearização em $\bar{\mathbf{x}}$ fazemos $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\delta}$. Após substituir na equação, desprezamos termos de ordem $|\boldsymbol{\delta}|^2$ e obtemos:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})\boldsymbol{\delta}$$

onde

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

é a matriz $n \times n$ com coeficientes constantes.

3.4 Exemplo: A dinâmica da hiperinflação.

Considere o seguinte modelo para a inflação¹:

$$\dot{m} = f - m\pi$$

$$\dot{\pi} = -k + \beta \ln m + \gamma \pi$$

onde:

- m = é a quantidade real de moeda.
- f = déficit público real.

¹Ver: Barbosa, Fernando de Holanda, Waldyr Muniz Oliva, and Élvia Mureb Sallum. "A dinâmica da hiperinflação." *Brazilian Journal of Political Economy* 13.1 (1993): 3-23.

- π = taxa de inflação.
- k , β e γ são parâmetros positivos associados à taxa desejada de aumento de salários, ao atraso no ajuste dos salários, a taxa de inflação esperada entre outros (ver referência 1).

3.4.1 Pontos de equilíbrio

Fazendo-se $\dot{m} = 0$ e $\dot{\pi} = 0$ nas equações, obtêm-se os valores de equilíbrio de m através da solução da seguinte equação:

$$g(m) = \beta \ln m + \frac{\gamma f}{m} = k$$

Exercício: Mostre que condição necessária e suficiente para que existam dois valores de equilíbrio é (ver Figura 3.1):

$$k > \beta \left(1 + \ln \frac{\gamma f}{\beta} \right)$$

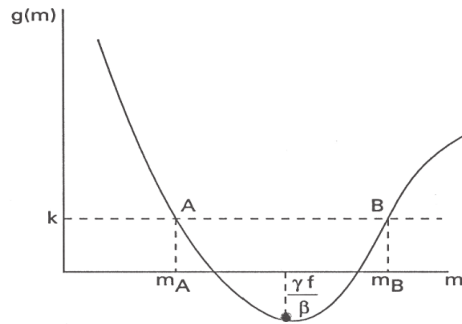


Figura 3.1: Gráfico da função $g(m)$ com dois pontos de equilíbrio A e B .

Capítulo 4

Auto-Valores Complexos.

4.1 Equações Lineares com Coeficientes Constantes

Considere a equação

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Tentemos uma solução da forma

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}e^{\lambda t}, \quad \text{onde} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \text{ é constante no tempo.}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}\lambda e^{\lambda t} = A\hat{\mathbf{x}}e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda\hat{\mathbf{x}} = A\hat{\mathbf{x}} \Leftrightarrow (\lambda I - A)\hat{\mathbf{x}} = 0$$

Note que $(\lambda I - A)\hat{\mathbf{x}} = 0$ sempre possui a solução trivial $\hat{\mathbf{x}} = 0$. Se $\det(\lambda I - A) \neq 0$, esta é a única solução.

Existe $\hat{\mathbf{x}}$ solução não trivial de $(\lambda I - A)\hat{\mathbf{x}} = 0$ se, e somente se, λ é raiz de $\det(\lambda I - A) = 0$.

4.2 Polinômio Característico

O polinômio característico de A é

$$P(\lambda) := \det(\lambda I - A)$$

Para cada raiz de $P(\lambda) = 0$, existe solução da forma $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}e^{\lambda t}$ com $\hat{\mathbf{x}} \neq 0$ para a equação $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.

Para a equação da seção 4.1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \lambda^2 + 1$$

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

A equação

$$(\lambda I - A)\hat{\mathbf{x}} = 0$$

para $\lambda = i$ fica

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = 0 \\ -\hat{x}_1 + i\hat{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{equações equivalentes})$$

$$\Rightarrow \hat{x}_2 = -i\hat{x}_1$$

Se $\hat{x}_1 = 1$, então $\hat{x}_2 = -i$, e temos a solução complexa

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{it}$$

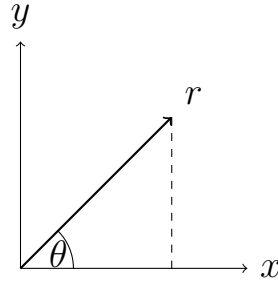


Figura 4.1: Representação polar de z : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$

4.3 Fórmula de Euler

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$e^0 = 1 + 0 + \frac{0^2}{2!} + \frac{0^3}{3!} + \frac{0^4}{4!} + \dots$$

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \dots\right)$$

$$= \cos t + i \sin t$$

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t} \quad (\text{Euler})$$

- Representação polar

$$z = x + iy \quad \text{onde} \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

- Números complexos somam como vetores

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

• Multiplicação de números complexos

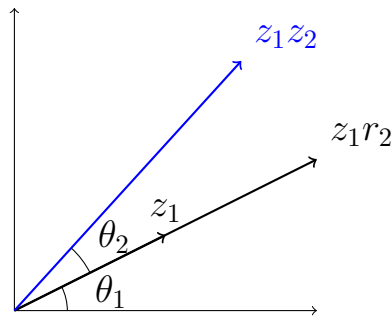
$$i^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ou

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad \Rightarrow \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet & z_1 \text{ é dilatado pelo fator } r_2 = |z_2| \\ \bullet & z_1 \text{ é rodado do ângulo } \theta_2 \end{cases}$$

Geometricamente



4.4 Solução Complexa da Eq. Diferencial

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \sin t - i \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note:

$$\dot{z}(t) = Az \Rightarrow \dot{x} + i\dot{y} = A(x + iy) = Ax + iAy$$

Dois números complexos são iguais se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais.

Logo temos duas soluções reais

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{y} = Ay$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

Como a equação é

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

é fácil verificar por diferenciação que x e y são soluções.

4.5 Conclusão

Seja $\dot{x} = Ax$ com $x \in \mathbb{R}^n$ e A uma matriz real $n \times n$.

Se $z(t) = \hat{z}e^{\lambda t}$, onde $\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y} \in \mathbb{C}^n$ é autovetor de A e $\lambda \in \mathbb{C}$ é o autovalor associado, então

$$\operatorname{Re}\{(\hat{x} + i\hat{y})e^{\lambda t}\} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\{(\hat{x} + i\hat{y})e^{\lambda t}\}$$

são soluções reais de $\dot{x} = Ax$.

4.6 Exemplo

$$\dot{x}_1 = -\nu x_1 - \omega x_2, \quad \dot{x}_2 = -\nu x_2 + \omega x_1 \quad \text{com} \quad \nu > 0, \omega > 0$$

$$z = \hat{z}e^{\lambda t}, \quad \hat{z} = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{z} = Az \Rightarrow \begin{cases} \lambda \hat{z}_1 = -\nu \hat{z}_1 - \omega \hat{z}_2 \\ \lambda \hat{z}_2 = \omega \hat{z}_1 - \nu \hat{z}_2 \end{cases}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \lambda + \nu & \omega \\ -\omega & \lambda + \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = (\lambda + \nu)^2 + \omega^2 = \lambda^2 + 2\nu\lambda + \nu^2 + \omega^2$$

$$\lambda = \frac{-2\nu \pm \sqrt{4\nu^2 - 4(\nu^2 + \omega^2)}}{2} = -\nu \pm i\omega$$

Se $\lambda = -\nu + i\omega$, então:

$$(\lambda + \nu)\hat{z}_1 + \omega\hat{z}_2 = 0 \Rightarrow i\omega\hat{z}_1 + \omega\hat{z}_2 = 0 \Rightarrow \hat{z}_2 = -i\hat{z}_1$$

Impondo $\hat{z}_1 = 1$, temos $\hat{z}_2 = -i$.

$$\begin{aligned} z(t) = \hat{z}e^{\lambda t} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-\nu+i\omega)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-\nu t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \\ &= e^{-\nu t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) + i \cos(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercício: Esboce o gráfico das soluções.

Capítulo 5

Exponencial de Matrizes

5.1 Motivação

1. Considere o sistema linear

$$\dot{x} = Ax \quad \text{com } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n$$

Dada uma condição inicial $x(0)$, queremos encontrar a solução.

2. Método de Euler (aproximado)

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \approx \dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$\Rightarrow x(t+h) = x(t) + hAx(t) = (I + hA)x(t)$$

onde I é a matriz identidade.

3. Dado $x(0)$ e $T > 0$

$$x(h) = (I + hA)x(0)$$

$$x(2h) = (I + hA)x(h) = (I + hA)^2 x(0)$$

$\vdots$

$$x(Nh) = (I + hA)^N x(0) \Rightarrow x(T) = \left(I + \frac{T}{N}A\right)^N x(0)$$

Aproximação do método de Euler com $h = \frac{T}{N}$.

4. Número de Euler

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{tn} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^t = e^t$$

5. Da mesma forma que se prova a convergência e equivalência do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots = e^t$$

Mostra-se para $N \rightarrow \infty$ em (3) que vale

$$x(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{T}{N}A\right)^N = I + TA + \frac{T^2 A^2}{2!} + \frac{T^3 A^3}{3!} + \cdots \equiv e^{AT}$$

5.2 Teorema (Forma Canônica de Jordan) (ver Elon Lages Lima, Álgebra Linear)

1. Seja $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ o polinômio característico de A e $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ as suas raízes com $m \leq n$.

Existe uma matriz M , possivelmente complexa, tal que

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_\ell \end{pmatrix} \quad \text{com } m \leq \ell \leq n$$

onde cada bloco A_j possui a forma

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j I_{k_j} + N_{k_j}$$

onde I_{k_j} é a matriz identidade de dimensão k_j e

$$N_{k_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz de dimensão $k_j \times k_j$.

- A multiplicidade algébrica de um autovalor λ_j de A , é a multiplicidade da raiz de $P(\lambda) = 0$. Ela é o numero de vezes que λ_j aparece na diagonal da matriz na forma canônica de Jordan.
- Mais de um bloco de Jordan pode estar associado ao mesmo autovalor.
- A multiplicidade geométrica de um autovalor λ_j é a dimensão do espaço dos autovetores v de λ_j , ou seja a dimensão do núcleo de $\lambda_j I - A$, e é também o número de blocos de Jordan que correspondem a λ_j .
- Se λ_j é raiz simples de $P(\lambda) = 0$, então seu bloco de Jordan é simplesmente unidimensional.

2. Exemplos:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = 0$$

$\lambda = 1 \Rightarrow$ multiplicidade algébrica = multiplicidade geométrica
= 2.

A matriz já está na sua forma canônica de Jordan.

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

$\lambda = 1 \Rightarrow$ multiplicidade algébrica 2

multiplicidade geométrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 + v_2 = v_1 \Rightarrow v_2 = 0$$

Logo, todo autovetor é múltiplo de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{multiplicidade geométrica } 1$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Forma canônica de Jordan

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

3. A matriz N é dita nilpotente de ordem R se $N^R = 0$ e $N^{R-1} \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é nilpotente de ordem 2.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é nilpotente de ordem 3.

4. Cada bloco de Jordan é a soma

$$(\lambda_j \mathbf{1} + N)$$

onde N é nilpotente de ordem k_j

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{k_j \times k_j}$$

5.3 Forma Canônica de Jordan Exponencial de Matriz

Seja $\dot{x} = Ax$ e $x = My$, onde M é invertível. Na nova variável y a equação fica:

$$\dot{x} = M\dot{y} = Ax = AMy \Rightarrow \dot{y} = M^{-1}AMy$$

Se M é a matriz que transforma A na forma canônica de Jordan, então

$$\begin{pmatrix} \dot{y}^1 \\ \dot{y}^2 \\ \dots \\ \dot{y}^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \dots \\ y^l \end{pmatrix}$$

onde $y^j \in \mathbb{R}^{k_j}$.

Para resolver o sistema $\dot{y} = M^{-1}AMy$, basta resolvê-lo em cada um dos blocos de Jordan.

- Se o bloco de Jordan tem dimensão 1, o que ocorre para autovalores simples, então

$$\dot{y}^j = \lambda_j y^j \Rightarrow y^j(t) = e^{\lambda_j t} y^j(0)$$

Note λ_j pode ser real ou complexo.

- Se o bloco de Jordan tem dimensão 2

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1^j \\ \dot{y}_2^j \end{pmatrix} = \left\{ \lambda_j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \end{pmatrix}$$

e a solução é

$$y^j(t) = e^{(\lambda_j I + N)t} y^j(0)$$

- **Teorema:** Se duas matrizes A e B comutam, $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$ (se A, B são 1×1 , esta é a propriedade usual).

Note: se $AB \neq BA$, $e^{A+B} \neq e^A e^B$

- Como I comuta com qualquer matriz, temos

$$y^j(t) = e^{\lambda_j I t} e^{N t} y^j(0)$$

onde

$$e^{\lambda_j It} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix}$$

e

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2!} + \frac{N^3 t^3}{3!} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pois N é nilpotente de ordem 2.

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo

$$\begin{pmatrix} y_1^j(t) \\ y_2^j(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^j(0) \\ y_2^j(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow y_1^j(t) = e^{\lambda_j t} (y_1^j(0) + t y_2^j(0)) \\ & y_2^j(t) = e^{\lambda_j t} y_2^j(0) \end{aligned}$$

- Se o bloco de Jordan tem dimensão 3, então:

$$\exp \left[t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1^j(t) &= e^{\lambda_j t} \left(y_1^j(0) + t y_2^j(0) + \frac{t^2}{2} y_3^j(0) \right) \\ \Rightarrow y_2^j(t) &= e^{\lambda_j t} (y_2^j(0) + t y_3^j(0)) \\ y_3^j(t) &= e^{\lambda_j t} y_3^j(0) \end{aligned}$$

- Para blocos de Jordan de dimensão maior que 3 o cálculo é semelhante.

- Como $x(t) = My(t)$ e $y(t) = e^{M^{-1}AMt}y(0)$, temos $y(0) = M^{-1}x(0)$
e

$$x(t) = Me^{M^{-1}AMt}M^{-1}x(0)$$

$$\text{Mas } Me^{M^{-1}AMt}M^{-1} = M \left(I + M^{-1}AMt + \frac{(M^{-1}AM)^2t^2}{2!} + \dots \right) M^{-1}$$

$$= I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots = e^{At}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At}x(0) \quad \text{como esperado.}$$

- Com isso concluimos que cada componente de uma solução $x(t)$ é da forma de uma soma de exponenciais (possivelmente complexas) multiplicadas por polinômios em t . Se todos os autovalores de A são simples, só aparecem as exponenciais.

Capítulo 6

Estabilidade de ponto de equilíbrio.

6.1 Estabilidade de Liapunov.

1) Considere a EDO $\dot{x} = f(x)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $\bar{x}$ é um equilíbrio, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$.

Dizemos que $\bar{x}$ é estável no sentido de Liapunov se, dado um $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

2) Dizemos que o equilíbrio é assintoticamente estável se existir $\delta > 0$ tal que:

$$\text{para todo } x(0) \text{ tal que } \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}. \quad (6.1)$$

6.2 Limitação dada pela parte linear

Teorema (Veja Figueiredo e Neves, Teorema 7.3): Seja α tal que $\alpha > \operatorname{Re} \lambda$ para todo autovalor λ da matriz A . Então, existe uma constante M tal que, para toda a solução de $\dot{x} = Ax$, vale:

$$\|x(t)\| \leq M e^{\alpha t} \|x(0)\|.$$

Prova: Simples no caso em que todos os autovalores são simples. Basta diagonalizar a matriz A . Veja Figueiredo e Neves (cópia fornecida na aula passada) para o caso geral.

Corolário: Se $\operatorname{Re} \lambda < 0$ para todo autovalor λ de A , então, para todo $0 < \epsilon < \min\{-\operatorname{Re} \lambda\}$, existe $M(\epsilon) > 0$ tal que:

$$\|x(t)\| \leq M e^{-\epsilon t} \|x(0)\|$$

para toda solução de $\dot{x} = Ax$.

Ou seja, $x = 0$ é um equilíbrio assintoticamente estável de $\dot{x} = Ax$.

6.3 Estabilidade assintótica linear implica estabilidade do equilíbrio da EDO não linear

Teorema: Considere a EDO $\dot{x} = f(x)$ onde $x \in \mathbb{R}^n$ possui o equilíbrio $\bar{x}$ como solução. Considere a equação linearizada em $\bar{x}$, ou seja:

$$\dot{y} = Df(\bar{x})y$$

onde $y \in \mathbb{R}^n$.

Se todo autovalor λ de $Df(\bar{x})$ satisfaz $\operatorname{Re}\lambda < 0$, então o equilíbrio $\bar{x}$ de $\dot{x} = f(x)$ é assintoticamente estável (ver parágrafo (2) da Seção 1).

Prova: Teorema 7.7 em Figueiredo e Neves. O conhecimento da prova, deste teorema fundamental na teoria das EDO, não será cobrada neste curso.

Capítulo 7

Sistemas lineares Forçados (não homogêneos).

7.1 Sistemas Lineares Forçados

$$\dot{x} = Ax + f$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f(t)$ é a função forçante.

7.1.1 Fórmula da variação das constantes

Considere a mudança de variável dependente do tempo:

$$x = e^{At}y$$

Substituindo na equação:

$$\dot{x} = Ae^{At}y + e^{At}\dot{y} = Ae^{At}y + f(t)$$

$$\Rightarrow e^{At}\dot{y} = f(t) \Rightarrow \dot{y} = e^{-At}f(t)$$

onde e^{-At} é a inversa de e^{At} .

Logo, integrando componente a componente:

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A\eta} f(\eta) d\eta$$

7.1.2 Voltando à variável x

$$e^{At}y(t) = e^{At}y(t_0) + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\eta} f(\eta) d\eta$$

com

$$x = e^{At}y$$

temos

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\eta)} f(\eta) d\eta$$

7.1.3 Forçante da forma $f(t) = e^{st}\hat{f}$

Quando

$$f(t) = e^{st}\hat{f}$$

onde $s = a + i\omega t \in \mathbb{C}$ é constante e

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_n \end{pmatrix} \text{ com } \hat{f}_j \in \mathbb{C} \text{ constante}$$

temos a equação:

$$\dot{x} = Ax + e^{st}\hat{f}$$

Seja $x(t) = e^{st}\hat{x}$, onde $\hat{x} \in \mathbb{C}^n$ constante, uma tentativa de solução.

Substituindo:

$$\dot{x} = se^{st}\hat{x} = e^{st}A\hat{x} + e^{st}\hat{f} \Rightarrow (sI - A)\hat{x} = \hat{f}$$

Se s não é um autovalor de A , então

$$\hat{x} = (sI - A)^{-1} \hat{f} \quad (7.1)$$

Observação: O caso mais interessante é aquele no qual $s = i\omega$ (a forçante é da forma $(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \hat{f}$) e $\text{Re} \lambda < 0$ para todo autovalor de A . Neste caso, s não é autovalor de A .

7.1.4 Fórmula da variação das constantes com $f(t) = e^{st} \hat{f}$

A fórmula da variação das constantes pode ser reescrita como:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\eta)} f(\eta) d\eta$$

$$t - \eta = \xi \Rightarrow -d\eta = d\xi \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_0^{t-t_0} e^{A\xi} f(t - \xi) d\xi \\ &= e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_0^{t-t_0} e^{A\xi} e^{s(t-\xi)} \hat{f} d\xi \end{aligned}$$

ou

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + e^{st} \int_0^{t-t_0} e^{(A-sI)\xi} \hat{f} d\xi \quad (7.2)$$

Se $0 > \text{Re} \lambda$ para todos os autovalores de A , então para qualquer $x(t_0)$:

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} e^{A(t-t_0)} x(t_0) = 0$$

Neste caso a solução obtida para $t \gg t_0$ não depende da condição inicial.

Se existirem autovalores de A com parte real positiva, então escolhemos $x(t_0) = 0$ de tal modo que a equação (7.2) fica

$$x(t) = e^{st} \int_0^{t-t_0} e^{(A-sI)\xi} \hat{f} d\xi$$

Neste caso tomando o limite $t_0 \rightarrow -\infty$ obtemos

Se $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \lambda$ para todos os autovalores de A , então:

$$x(t) = e^{st} \int_0^\infty e^{(A-sI)\xi} d\xi \hat{f} \quad (7.3)$$

7.1.5 Uma identidade interessante.

Comparando a solução na equação (7.3) com a solução $x(t) = e^{st} \hat{x}$ onde, da equação (12.2),

$$\hat{x} = (sI - A)^{-1} \hat{f}$$

e supondo que ambas as soluções são iguais obtemos:

$$\boxed{(sI - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{(A-sI)\xi} d\xi} \quad (7.4)$$

Note, para qualquer número $a < 0$

$$\int_0^\infty e^{a\xi} d\xi = -\frac{1}{a}$$

A fórmula (7.4) generaliza, para matrizes, esta identidade.

7.1.6 Prova que as soluções $e^{st}\hat{x}$, ($\hat{x}$ dada em (12.2))

e $\int_0^\infty e^{(A-sI)\xi} d\xi \hat{f} e^{st}$ são iguais.

Seja

$$\tilde{x}(t) = (sI - A)^{-1} \hat{f} e^{st}$$

e

$$x(t) = \int_0^\infty e^{(A-sI)\xi} d\xi \hat{f} e^{st},$$

A diferença dessas soluções

$$y(t) := x(t) - \tilde{x}(t)$$

é solução da equação homogênea

$$\dot{y}(t) = Ay(t).$$

Qualquer solução não trivial da equação homogênea pode ser decomposta como a soma de funções de forma $P(t)e^{\lambda t}$, onde λ é um autovalor de A e $P(t)$ é um polinômio (em geral constante).

Como supusemos que s não é autovalor de A , então y é a solução trivial.

Capítulo 8

Transformada de Laplace.

8.1 Definições

Definição: Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $|f(t)| \leq Ke^{rt}$ para algum $r > 0$, $K > 0$ constante.

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

onde $s \in \mathbb{C}$ com $\Re(s) > r$.

8.1.1 Transformada Inversa

Se $F(s)$ é a transformada de alguma f , então:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

onde β é uma constante tal que $\beta > r$.

8.1.2 Observações e Propriedades

Note: A transformada de Laplace é linear.

$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\}$$

(propriedade da integral) onde $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}$.

Propriedade:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= f(\infty)e^{-\infty} - f(0) + s\mathcal{L}\{f\} \\ \mathcal{L}\{f'\} &= sF(s) - f(0)\end{aligned}\tag{8.1}$$

onde $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$ e $\Re(s) > r$.

Logo:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0)}$$

8.1.3 Aplicação:

Considere a equação $\dot{x} = ax + f(t)$ onde $x \in \mathbb{R}$.

Aplicamos a transformada de Laplace a ambos os lados:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = \mathcal{L}\{ax + f\} = a\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{f\}$$

Utilizando a propriedade (8.1):

$$-x(0) + sX(s) = aX(s) + F(s)$$

Portanto:

$$X(s) = \frac{x(0) + F(s)}{s - a}$$

Logo, o problema que no domínio do tempo era de resolver uma equação diferencial, passa a ser, no domínio da transformada (s), o de resolver uma equação algébrica.

Entretanto, para escrever $X(s)$ no domínio do tempo, precisamos encontrar $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$.

Propriedade:

$$\mathcal{L}\{f''\} = -f'(0) - f(0)s + s^2 F(s)$$

(Integração por partes duas vezes, façam.)

Propriedade:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(u)du\right) dt \\ &= -\frac{1}{s}e^{-st} \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}F(s)\end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

8) **Propriedade:**

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = F(s-a)$$

Propriedade (relevante em probabilidade):

$$\begin{aligned}F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ F'(s) &= \frac{dF}{ds} = \int_0^\infty (-t)e^{-st}f(t)dt \Rightarrow \mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s) \\ F^{(n)}(s) &= \frac{d^n F}{ds^n} = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-st}f(t)dt \Rightarrow \mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)\end{aligned}$$

Nota:

$$F(0) = \int_0^\infty f(t)dt$$

$$F'(0) = - \int_0^{\infty} t f(t) dt$$

$$F^{(n)}(0) = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n f(t) dt$$

Logo os momentos da função f são dados pelas derivadas de $F(s)$ em $s = 0$.

8.2 Exemplos

Exemplos:

a)

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Logo:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

b)

$$\mathcal{L}\{t\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t 1 d\tau\right\} = \frac{1}{s^2}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

c)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \frac{1}{s^{n+1}}$$

Basta aplicar a propriedade 7 repetidamente.

d)

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \mathcal{L}\{e^{-at} \cdot 1\} = \frac{1}{s+a}$$

e)

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at} \frac{t^n}{n!}\right\} = \frac{1}{(s+a)^{n+1}}$$

Usei as propriedades (8) e (c).

f)

$$\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} = \frac{1}{s - i\omega} \quad (\text{de (d) com } a = -i\omega)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right\} &= \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{2i} [\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} - \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

g) Analogamente:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

8.3 Transformada de Laplace de Vetores e Matrizes

11) Se $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, então:

$$X(s) = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{pmatrix}$$

Se $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$, então:

$$A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s) & \cdots & A_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(s) & \cdots & A_{nn}(s) \end{pmatrix}$$

Aplica-se a transformada de Laplace componente a componente.

8.4 Aplicações

Considere a equação $\dot{x} = Ax$ com $x \in \mathbb{R}^n$ e $x(0)$ dado.

Aplicando a transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = \mathcal{L}\{Ax\} = A\mathcal{L}\{x\} \Rightarrow -x(0) + sX(s) = AX(s)$$

$$(sI - A)X(s) = x(0) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$$

onde $s \in \mathbb{C}$ e não é um autovalor de A , ou seja, $\det(sI - A) \neq 0$.

Sabemos que $x(t) = e^{At}x(0)$ resolve $\dot{x} = Ax$. Logo:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{e^{At}x(0)\} = \mathcal{L}\{e^{At}\}x(0)$$

Portanto:

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{At}\}x(0)$$

Concluimos que:

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = \int_0^{\infty} e^{(A-Is)t} dt = (sI - A)^{-1} = (sI - A)^{-1} \quad \text{ou} \quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

que é o resultado na equação (7.4)

8.5 Cálculo de $\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ diretamente

Suponha que $\Re(s)$ é suficientemente grande, tal que:

$$\left\| \frac{A}{s} \right\| < 1 \quad \text{onde} \quad \|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

Proposição: Sob a hipótese acima, vale:

$$(sI - A)^{-1} = I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \frac{A^3}{s^3} + \dots$$

Prova:

$$\begin{aligned} & \left(I - \frac{A}{s} \right) \left(I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \frac{A^3}{s^3} + \dots + \frac{A^N}{s^N} \right) \\ &= I + \frac{A}{s} - \frac{A}{s} - \frac{A^2}{s^2} + \frac{A^2}{s^2} - \dots - \frac{A^N}{s^N} - \frac{A^{N+1}}{s^{N+1}} = I - \frac{A^{N+1}}{s^{N+1}} \end{aligned}$$

Quando $N \rightarrow \infty$, como $\left\| \frac{A}{s} \right\| < 1$, temos que:

$$\frac{A^{N+1}}{s^{N+1}} \rightarrow 0$$

Logo, a soma converge para I .

Temos

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= s^{-1} \left(I - \frac{A}{s} \right)^{-1} = s^{-1} \left(I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \frac{A^3}{s^3} + \dots \right) \\ &= \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots + \frac{A^k}{s^{k+1}} + \dots \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots + \frac{A^k}{s^{k+1}} + \dots \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{I}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{A}{s^2} \right\} + \dots = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{I}{s} \right\} I + \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^2} \right\} A + \dots \end{aligned}$$

Vale:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^{k+1}} \right\} = \frac{t^k}{k!}, \quad \text{logo :}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots + \frac{t^k A^k}{k!} + \cdots = e^{At}$$

Conclusão

$$\mathcal{L} \{ e^{At} \} = \int_0^{\infty} e^{(A - Is)t} dt = (sI - A)^{-1}$$

que é o resultado na equação (7.4)

Ver o livro: “Modern Control Engineering”, Fifth Edition, by Katsuhiko Ogata, ou a Wikipedia para um resumo sobre a transformada de Laplace.

Capítulo 9

Matriz de Transferência.

1. Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{9.1}$$

$$y = Cx$$

onde:

- $x \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estados,
- $u \in \mathbb{R}^r$ é a entrada,
- $y \in \mathbb{R}^m$ é a saída,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são matrizes reais.

2. Seja $u = \hat{u}e^{st}$ onde $s = \nu + i\omega \in \mathbb{C}$ e $\hat{u} \in \mathbb{R}^r$ (constantes)

Procuramos por soluções tais que:

$$x = \hat{x}e^{st}, \quad y = \hat{y}e^{st}$$

onde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ são constantes.

3. Substituindo (2) em (1), obtemos

$$(sI - A)\hat{x} = B\hat{u} \quad (9.2)$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\hat{x} = (sI - A)^{-1}B\hat{u}$$

Substituindo em $\hat{y}$:

$$\hat{y} = C\hat{x} = C(sI - A)^{-1}B\hat{u}$$

4. No caso em que $r = 1$ e $m = 1$, a matriz de transferência é chamada

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \text{função de transferência.}$$

A seguir vamos considerar apenas o caso $r = 1$ e $m = 1$.

5. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e A_{ij} o cofator do elemento a_{ij} , isto é, $(-1)^{i+j}$ vezes o determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$ constituída pela eliminação da i -ésima linha e j -ésima coluna de A .

Denotamos por

$$A_c = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

a matriz dos cofatores de A e por A_c^T sua transposta.

6. Vale

$$A^{-1} = \frac{A_c^T}{\det(A)}$$

se $\det(A) \neq 0$.

7. De (5) e (6) temos que

$$(sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)_c^T}{\det(sI - A)}$$

onde $\det(sI - A) = p(s)$ é o polinômio característico de A de grau n .

Cada entrada de $(sI - A)_c^T$ tem grau no máximo $n - 1$ em s (teste em uma matriz 2×2).

8. Como $C(sI - A)_c^T B$ é uma combinação linear de elementos da matriz $(sI - A)$, temos que $C(sI - A)_c^T B$ é um polinômio de grau $\leq n - 1$.

9. Logo, a função de transferência

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{C(sI - A)_c^T B}{\det(sI - A)} = \frac{q(s)}{p(s)}$$

onde grau $q(s) \leq n - 1$ e grau $p(s) = n$.

10. Expansão em frações parciais

Suponha que todas as raízes de $p(\lambda)$ sejam simples. Então podemos escrever:

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q(s)}{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)} = \frac{a_1}{s - \lambda_1} + \frac{a_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - \lambda_n}$$

onde

$$a_j = \lim_{s \rightarrow \lambda_j} \frac{q(s)(s - \lambda_j)}{p(s)}$$

Logo, a função de transferência pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{a_1}{s - \lambda_1} + \frac{a_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - \lambda_n}$$

onde $a_1, \dots, a_n$ são constantes, possivelmente complexas, caso haja autovalores complexos.

11. Podemos decompor a resposta do sistema como

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{st} \hat{y}, \quad \hat{y} \in \mathbb{C} \\ \hat{y} &= G(s) \hat{u}, \quad \hat{u} \in \mathbb{C} \\ \hat{y} &= \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \dots + \hat{y}_n = \frac{a_1}{s - \lambda_1} \hat{u} + \dots + \frac{a_n}{s - \lambda_n} \hat{u} \end{aligned} \quad (9.3)$$

12. Se λ_j é real, então

$$a_j = \lim_{s \rightarrow \lambda_j} \frac{q(s)}{(s - \lambda_j)p(s)} \quad \text{é real.}$$

O termo correspondente na decomposição dada na equação (9.3) é:

$$\hat{y}_j = \frac{a_j}{s - \lambda_j} \hat{u}$$

Este tipo de termo é dito de 1ª ordem, pois é o mesmo que resulta da equação:

$$\dot{y} = \lambda_j y + a_j u$$

onde $y \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}$.

13. Se $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ então $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \in \mathbb{C}$ (complexo conjugado)

Se $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, então $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.

E

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} \frac{q(s)(s - \lambda_1)}{p(s)} = \gamma + \delta i$$

e

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow \bar{\lambda}_1} \frac{q(s)(s - \bar{\lambda}_1)}{p(s)} = \gamma - \delta i.$$

Com isso:

$$\frac{a_1}{s - \lambda_1} + \frac{a_2}{s - \lambda_2} = \frac{\gamma + \delta i}{s - (\alpha + \beta i)} + \frac{\gamma - \delta i}{s - (\alpha - \beta i)}$$

$$= \frac{2\gamma s - 2(\alpha\gamma + \beta\delta)}{s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2}.$$

14. O termo correspondente a (13)

$$\hat{y}_1 + \hat{y}_2 = \frac{a_1}{s - \lambda_1} \hat{u} + \frac{a_2}{s - \lambda_2} \hat{u}$$

é dito de 2º ordem, pois é o mesmo que resulta da equação:

$$\ddot{y} - 2\alpha\dot{y} + (\alpha^2 + \beta^2)y = 2\gamma\dot{u} - 2(\alpha\gamma + \beta\delta)u.$$

Capítulo 10

Resposta em frequência: 1ºe 2º ordem.

1º Ordem

1) Da aula 9, parágrafo (12), temos que em um sistema com uma entrada e uma saída, cada autovalor simples λ corresponde a uma parcela da forma

$$\frac{a}{s - \lambda}$$

na função de transferência, $a \in \mathbb{R}$. Este termo é o mesmo que se obtém da equação

$$\dot{y} = \lambda y + au$$

com $u(t) = \hat{u}e^{st}$, onde $\hat{u} = 1$, $\hat{u}$ real, $\sigma > 0$, $a = 1$ e $\lambda = -\nu < 0$.

2) Seja $s = i\sigma$, nós temos que

$$y(t) = \hat{y}e^{i\sigma t}$$

com

$$\hat{y} = \frac{a}{s - \lambda} \hat{u} = G(s) \hat{u} = \frac{1}{i\sigma + \nu} = \frac{\nu - i\sigma}{\nu^2 + \sigma^2}$$

3)

$$G(i\sigma) = \frac{\nu - i\sigma}{\sigma^2 + \nu^2} = \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}}$$

$$\tan \delta = \frac{-\sigma}{\nu} < 0$$

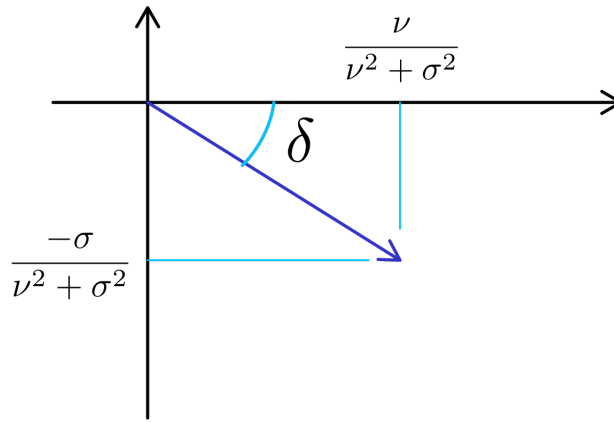


Figura 10.1: Representação geométrica da função de transferência para um particular valor de σ .

4) Com isso,

$$y(t) = \hat{y} e^{i\sigma t} = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}} e^{i\sigma t} = \frac{e^{i(\sigma t + \delta)}}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}}$$

5) Portanto, tomando a parte real e imaginária da entrada $u = e^{i\sigma t}$ e da correspondente saída $y(t) = \frac{e^{i(\sigma + \delta)t}}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}}$, obtemos:

$$\text{Entrada: } \cos(\sigma t) \longrightarrow \text{Saída: } \frac{\cos((\sigma + \delta)t)}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}}$$

$$\text{Entrada: } \sin(\sigma t) \longrightarrow \text{Saída: } \frac{\sin((\sigma + \delta)t)}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}}$$

6) Vamos normalizar a função de transferência de 1ª ordem de tal modo que para $\sigma = 0$ a resposta seja igual à entrada. Como

$$G(i\sigma) = \frac{e^{i\delta}}{\nu \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\nu^2}}}$$

temos a função de transferência normalizada

$$K(\sigma) = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\nu}\right)^2}} = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{1 + (\tau\sigma)^2}}$$

onde

$$\tau = \frac{1}{\nu}$$

é a chamada constante de tempo, que possui unidade de tempo. Note

$$\tan \delta = -\frac{\sigma}{\nu} = -\tau\sigma$$

7) A função de ganho é definida como

$$|K(\sigma)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma\tau)^2}} = \text{Ganho}$$

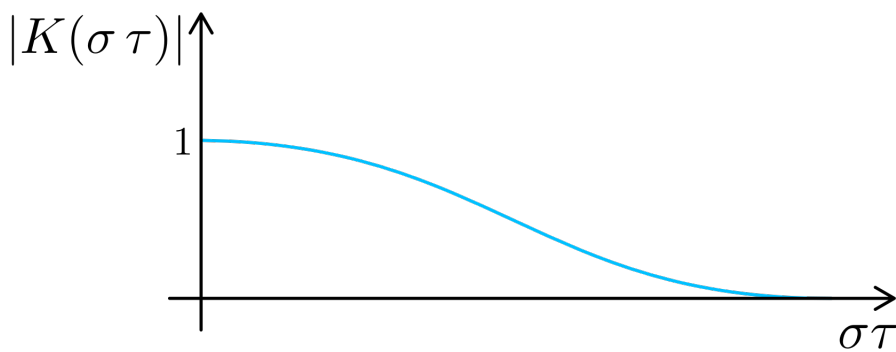


Figura 10.2: Esboço da função de ganho.

8) $\delta \in \mathbb{R}$ é o chamado ângulo de fase (phase shift). Quando $\delta < 0$, o ângulo de fase é chamado de atraso de fase (phase delay).

$$\delta = -\arctan\left(\frac{\sigma}{\nu}\right) = \arctan(-\tau\sigma) < 0$$

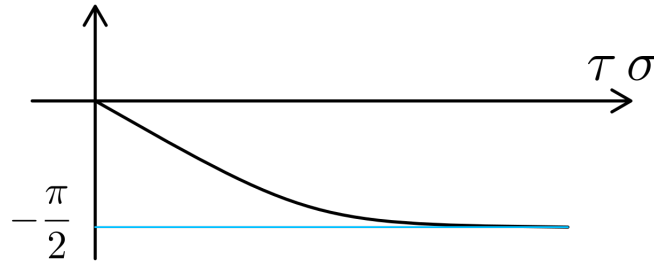


Figura 10.3: Esboço da função atraso de fase.

9)

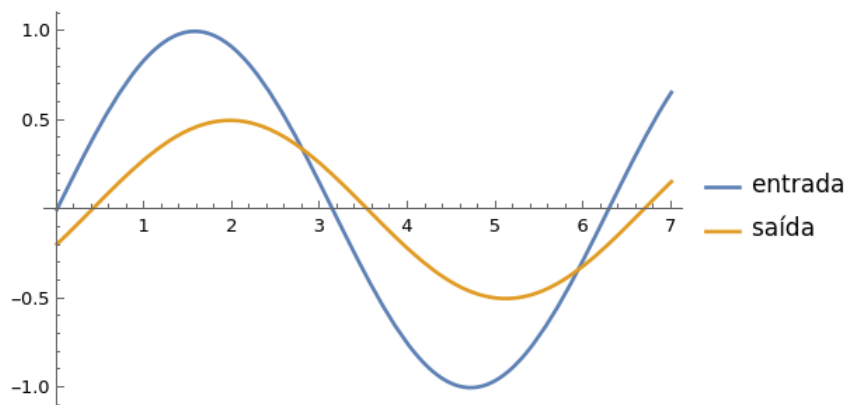


Figura 10.4: Esboço de uma saída para a entrada $u(t) = \sin(t)$. O ganho é 0.5 e o atraso de fase é 0.4 rad.

2ª Ordem

15) Da aula 9, parágrafo (14), a resposta de 2ª ordem está associada a um autovalor complexo:

$$\lambda = -\nu + i\omega \quad (\text{ou } = \alpha + \beta i \text{ na notação de aula 10})$$

Os termos na expansão em frações parciais da função de transferência que correspondem à resposta de 2ª ordem, produzem a mesma resposta dinâmica que a seguinte equação de segunda ordem (ver aula 9, parágrafo (14):

$$\ddot{y} + 2\nu\dot{y} + (\nu^2 + \omega^2)y = 2\gamma\dot{u} - 2(-\nu\gamma + \omega\tilde{\delta})u$$

16) Vamos simplificar a forçante e dar uma interpretação física aos coeficientes. Escolhendo $\gamma = 0$ e $\tilde{\delta} = -\frac{1}{2m\omega}$ obtemos

$$\ddot{y} = -(\nu^2 + \omega^2)y - 2\nu\dot{y} + \frac{1}{m}e^{i\sigma t} \quad (10.1)$$

Faremos a seguinte redefinição de parâmetros

$$\frac{k}{m} := \nu^2 + \omega^2, \quad \frac{b}{m} := 2\nu \quad (10.2)$$

Com isso reescrevemos a equação (10.1) como

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}\dot{y} + \underbrace{\frac{1}{m}e^{i\sigma t}}_{=F/m} \quad (10.3)$$

Esta é a equação do sistema massa-mola-amortecedor forçado representado na Figura 10.5.

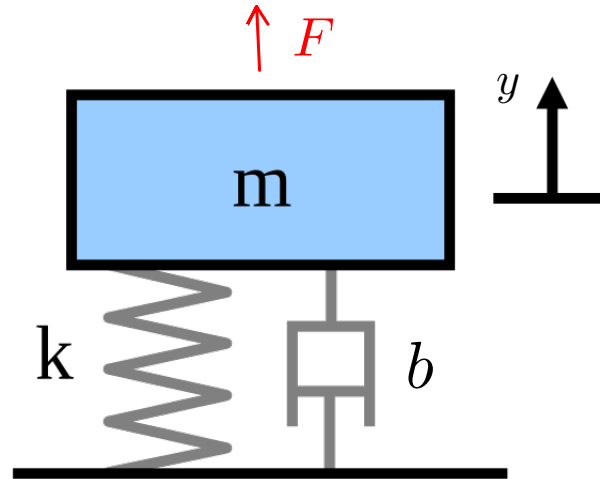


Figura 10.5: Sistema massa-mola-amortecedor forçado associado à equação (10.3).

A função de transferência associada às equações (10.1) e (10.3) é:

$$G(\sigma) = \frac{1/m}{-\sigma^2 + (\nu^2 + \omega^2) + 2\nu\sigma i}$$

ou

$$G(\sigma) = \frac{1/m}{-\sigma^2 + \frac{k}{m} + \frac{b}{m}\sigma i} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \frac{m}{k}\sigma^2 + \frac{b}{k}\sigma i}$$

17) Introduzimos a notação:

•

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \text{“quadrado da frequência natural”}$$

onde a frequência natural é aquela de oscilações do sistema autônomo não amortecido:

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= -ky \\ \frac{k}{m} &:= \nu^2 + \omega^2, \quad \frac{b}{m} := 2\nu \end{aligned} \quad (10.4)$$

•

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{b}{m \omega_n} \quad \text{“razão de amortecimento” (damping ratio)}$$

Note ζ é adimensional.

Se usarmos as relações na equação (10.4) obtemos a condição

$$\zeta = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \omega^2}} < 1 \quad (10.5)$$

que é necessária e suficiente para que os autovalores associados à equação (10.3) sejam complexos. Caso contrário eles são reais e temos as respostas de primeira ordem.

Com isso

$$G(\sigma) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m}{k}\sigma^2 + \frac{b}{m}\frac{\sigma i}{\omega_n}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right) i}$$

18) Após cálculos, temos o ganho:

$$\text{ganho} = K(\sigma) = k|G(i\sigma)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right)^2 \zeta^2}}$$

E o ângulo de fase:

$$\text{ângulo de fase} = -2\zeta \frac{\frac{\sigma}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right)^2}$$

19) O máximo do ganho $K(\sigma)$ ocorre para as frequências:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{\omega_n} &= \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{se } 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sigma &= 0 \quad \text{se } \zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

A frequência de ressonância é

$$\sigma_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

que para sistemas com pequena razão de amortecimento, $\zeta \approx 0$, é:

$$\sigma_r \approx \omega_n(1 - \zeta^2)$$

20) Pico da ressonância (resonance peak) ou valor máximo de $K(\sigma)$:

$$K_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{se } 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$K_{max} = K(0) = 1 \quad \text{se } \zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

21) Se $\zeta < 1$ então

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} > \sigma_r$$

é a frequência da oscilação livre amortecida, onde $\lambda = -\nu + i\omega$.

Capítulo 11

Resposta transiente: 1ºe 2ºordem.

11.1 Resposta de 1ºordem

1) Dada a equação $\dot{x} = Ax + f$, onde $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$ e A é diagonalizável sobre os complexos, existe uma mudança de base $x = Pz$ tal que

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{f}$$

onde

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}$$

e

$$\tilde{f} = P^{-1}f.$$

2)

Suponha que $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ é um autovalor simples. Neste caso, a 1ª coluna da matriz P é o autovetor associado a λ_1 :

$$v_1 = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

com

$$Av_1 = \lambda_1 v_1.$$

3) Suponha dados $x(0) \in \mathbb{R}^n$ e $f(t) \in \mathbb{R}^n$ da forma:

$$x(0) = \xi(0)v_1, \quad f(t) = f_1(t)v_1,$$

onde $\xi(t) \in \mathbb{R}$ e $f_1(t) \in \mathbb{R}$. Substituindo $x(t) = \xi(t)v_1$ e $f(t) = f_1(t)v_1$ na equação $\dot{x} = Ax + f$, temos:

$$\dot{\xi}v_1 = A\xi v_1 + f_1 v_1.$$

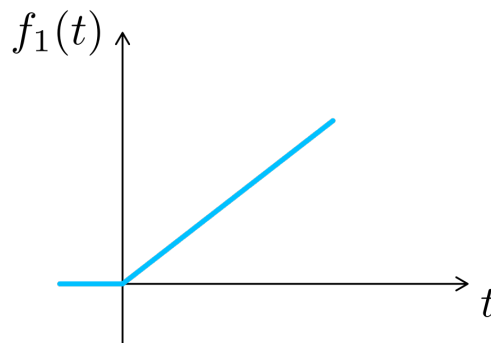
Como $Av_1 = \lambda_1 v_1$, isso implica que:

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi + f_1.$$

Forças usadas no estudo do comportamento transiente

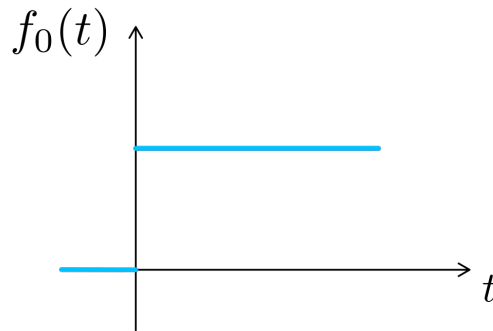
4) Função Rampa

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



5) Função degrau unitário

$$f_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

**6) Observação**

$$f_0(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(t), \quad \text{onde} \quad f_\epsilon(t) = \frac{e^{t/\epsilon}}{1 + e^{t/\epsilon}}.$$

A função degrau é obtida no limite $\epsilon \rightarrow 0$.

7) Função impulso (ou função δ , ou δ -Dirac)

$$\delta(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f'_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

A integral da função impulso é dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'_\epsilon(t) dt = f_\epsilon(\infty) - f_\epsilon(-\infty) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt.$$

E vale também:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f'_\epsilon(t) g(t) dt = g(0),$$

onde usamos $g(0) + tg'(0) + \dots$

8) Fórmula da variação das constantes:

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-As} f(s) ds$$

No caso da equação escalar $\dot{\xi} = -\nu\xi + f$, $\xi \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$, com $\lambda_1 = -\nu$, $\nu > 0$, a solução é dada por:

$$\xi(t) = e^{-\nu t} \xi(0) + e^{-\nu t} \int_0^t e^{\nu s} f(s) ds$$

9) É padrão na teoria de controle analisar a resposta transiente usando $\xi(0) = 0$.

10) Resposta transiente de 1ª ordem à função impulso. Se $f(s) = \delta(s)$ em $s = 0$, então:

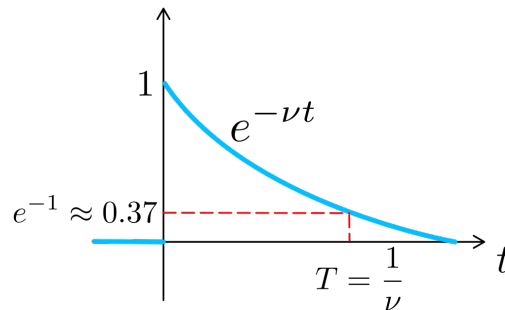
$$\xi(t) = e^{-\nu t} \int_0^t e^{\nu s} f(s) ds$$

Como $e^{\nu \cdot 0} = 1$, temos:

$$\xi(t) = e^{-\nu t}.$$

11) Observação A função impulso vale 0 para $t > 0$, logo o sistema é livre para $t > 0$, e o efeito do impulso é equivalente ao de tornar as condições iniciais não nulas.

12) Representação gráfica da resposta de 1ª ordem à função impulso



ν = “decay rate” = taxa de decaimento

$\frac{1}{\nu}$ = “time constant” = constante de tempo = T

$\frac{1}{\nu}$ = também chamado de tempo de amortecimento (“damping time”)

$T_h = \frac{\ln 2}{\nu}$ = “half life” = meia vida

$$e^{-\nu T_h} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad T_h = \frac{\ln 2}{\nu}.$$

Observação: A constante de tempo T é a vida média.

Note:

$$\xi(t) - \xi(t + dt) = -\dot{\xi}(t)dt = \text{número de mortes entre } t \text{ e } t + dt.$$

A vida média é:

$$\frac{-\int_0^\infty t \dot{\xi}(t) dt}{-\int_0^\infty \dot{\xi}(t) dt} = \frac{\int_0^\infty \xi(t) dt}{\xi(0)}$$

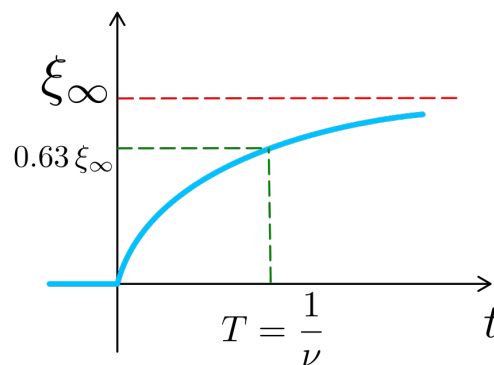
onde fizemos integração por partes do numerador. Usando que $\xi(t) = \xi(0)e^{-\nu t}$ integramos o numerador e obtemos

$$\text{Vida Média} = \frac{1}{\nu} = T$$

13) Resposta à função degrau.

Da fórmula da variação das constantes:

$$\xi(t) = e^{-\nu t} \int_0^t e^{\nu s} ds = e^{-\nu t} \left[\frac{e^{\nu t} - 1}{\nu} \right]$$



Portanto, temos:

$$\xi(t) = \frac{1 - e^{-\nu t}}{\nu}, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad \xi(t) = 0, \quad t < 0.$$

$$T = \frac{1}{\nu}$$

Se T é pequeno, $\xi(t)$ se aproxima rapidamente do valor de equilíbrio

$$\xi_\infty = \frac{1}{\nu} = T$$

Note:

$$\xi(0) = 0 \quad \text{para qualquer } \nu.$$

14) Resposta de 1ª ordem à função rampa

Da fórmula da variação das constantes:

$$\xi(t) = e^{-\nu t} \int_0^t s e^{\nu s} ds = e^{-\nu t} \left[\frac{s e^{\nu s}}{\nu} \right]_0^t - \int_0^t \frac{e^{\nu s}}{\nu} ds.$$

obtemos:

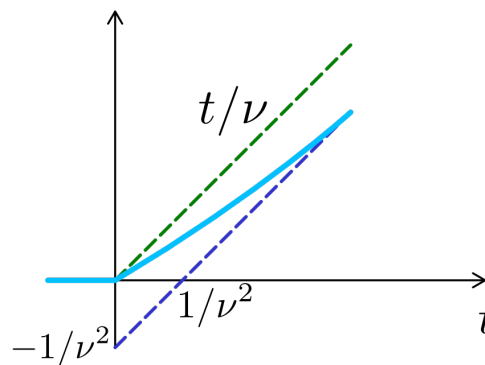
$$\xi(t) = \frac{t}{\nu} - \frac{1}{\nu^2} + \frac{e^{-\nu t}}{\nu^2}.$$

Com as condições inicial:

$$\xi(0) = 0$$

Note:

$$\dot{\xi}(0) = 0.$$



O erro de estado estacionário (steady-state error) é dado por:

$$\frac{1}{\nu^2} = T^2.$$

Logo, se T^2 é pequeno, temos um erro pequeno no estado estacionário.

15) Conclusão A resposta de 1ª ordem é determinada por $T = \frac{1}{\nu}$. Para T pequeno (ν grande), o transiente é curto.

11.2 Resposta de 2ª ordem

1) Resposta transiente de 2ª ordem (Ogata, Seção 5.3)

Suponha que A possua um autovalor complexo isolado $\lambda = -\nu + i\omega$, onde $\nu > 0$ e $\omega > 0$. Como A é real, $\bar{\lambda} = -\nu - i\omega$ também é autovalor.

2)

O autovetor $v \in \mathbb{C}^n$ associado a λ pode ser escrito como:

$$v = v_1 + iv_2, \quad \text{onde } v_1 \in \mathbb{R}^n \text{ e } v_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Substituindo na equação do autovalor:

$$Av = \lambda v \quad \Rightarrow \quad A(v_1 + iv_2) = (-\nu + i\omega)(v_1 + iv_2),$$

e expandindo, temos:

$$Av_1 + iAv_2 = (-\nu v_1 + \omega v_2) + i(\omega v_1 - \nu v_2).$$

Igualando as partes reais e imaginárias:

$$\begin{cases} Av_1 = -\nu v_1 - \omega v_2 \\ Av_2 = \omega v_1 - \nu v_2 \end{cases} \quad (*)$$

O subespaço invariante associado a λ tem dimensão (real) 2.

3)

Considere a equação $\dot{x} = Ax + f(t)$, onde:

$$x(0) = \xi_1(0)v_1 - \xi_2(0)v_2 \quad \text{e} \quad f(t) = f_1(t)v_1 - f_2(t)v_2,$$

$$x(t) = \xi_1(t)v_1 - \xi_2(t)v_2.$$

Substituindo em $\dot{x} = Ax + f(t)$:

$$\dot{x} = \dot{\xi}_1 v_1 - \dot{\xi}_2 v_2 = \xi_1 Av_1 - \xi_2 Av_2 + f_1 v_1 - f_2 v_2.$$

Sabemos que $Av_1 = -\nu v_1 - \omega v_2$ e $Av_2 = \omega v_1 - \nu v_2$, logo:

$$\dot{\xi}_1 v_1 - \dot{\xi}_2 v_2 = (-\nu \xi_1 - \omega \xi_2 + f_1)v_1 + (\omega \xi_1 - \nu \xi_2 + f_2)v_2.$$

Isso implica no sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\nu\xi_1 - \omega\xi_2 + f_1 \\ \dot{\xi}_2 = \omega\xi_1 - \nu\xi_2 + f_2 \end{cases} \quad (**)$$

4)

A análise fica mais simples se escrevemos:

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \lambda = -\nu + i\omega, \quad f = f_1 + if_2.$$

Com isso:

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + f,$$

é equivalente ao sistema (**).

5) Fórmula das variações das constantes para A complexa.

Para resolver $\dot{\xi} = \lambda\xi + f$, fazemos a mudança de variável $\xi = e^{\lambda t}\eta$.

Logo:

$$\dot{\xi} = \lambda e^{\lambda t}\eta + e^{\lambda t}\dot{\eta} = e^{\lambda t}(\lambda\eta + \dot{\eta}) + f.$$

Isso simplifica para:

$$\dot{\eta} = e^{-\lambda t}f.$$

Integrando:

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds.$$

Logo:

$$\eta(t) = e^{\lambda t}\eta(0) + e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds.$$

Voltando para a variável ξ , obtemos:

$$\xi(t) = e^{\lambda t}\xi(0) + e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds.$$

6)

No estudo da resposta transiente fazemos $\xi(0) = 0$. Assim, temos:

$$\xi(t) = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} f(s) ds.$$

7) A resposta à função impulso.

A resposta à função δ (impulso), $f = (f_1 + i f_2)\delta(t)$, é equivalente à resposta do sistema livre com condições iniciais não nulas (como na resposta de 1ª ordem).

8) Resposta à função degrau

A função degrau é dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f_1 + i f_2 = cte & t \geq 0 \end{cases}$$

De acordo com a equação (6):

$$\xi(t) = f e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} ds = f e^{\lambda t} \left. \frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda} \right|_0^t,$$

o que resulta em:

$$\xi(t) = \frac{f}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) = \xi_1 + i \xi_2.$$

9)

Para estudar a resposta do sistema, consideramos como saída a variável $\xi_1(t)$ e como entrada $f = 0 - i$ ($f_1 = 0, f_2 = -1$). Outras escolhas de entradas dão resultados semelhantes.

10)

De (8) e (9):

$$\xi_1(t) = \Re \left\{ \frac{-i}{-\nu + i\omega} \left(-1 + e^{(-\nu + i\omega)t} \right) \right\}.$$

Logo, temos:

$$\xi_1(t) = \frac{1}{\nu^2 + \omega^2} \left[\omega - e^{-\nu t} (\omega \cos(\omega t) + \nu \sin(\omega t)) \right].$$

11)

Notação: $R(t) = \xi_1(t)(\nu^2 + \omega^2) = \text{Resposta}$.

$$R(t) = \omega - e^{-\nu t}(\omega \cos(\omega t) + \nu \sin(\omega t)).$$

Inicialmente:

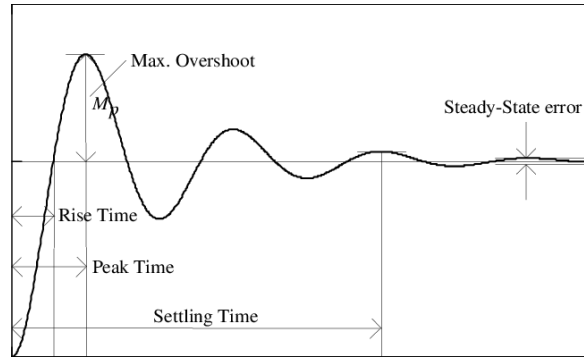
$$R(0) = \omega - \omega = 0,$$

e a derivada em $t = 0$ é:

$$\dot{R}(0) = +\nu e^{-\nu \cdot 0} \cdot \omega - \nu \cdot \omega = 0.$$

Isso implica que:

$$R(t) \rightarrow \omega \quad \text{conforme} \quad t \rightarrow \infty.$$

12) Gráfico da resposta $R(t)$ 

O gráfico mostra a resposta $R(t)$ em função do tempo, com destaque para o tempo de pico (peak time t_p), o tempo de acomodação (settling time t_s) e o tempo de subida (rising time).

$$\frac{1}{\nu} = T = \text{constante de tempo ("time constant").}$$

$$t_s = \text{tempo de acomodação ("settling time").}$$

Existem tempos de acomodação t_s para 5 %, 2%, etc. O tempo t_s de 5% corresponde ao instante a partir do qual $|R(t) - R_\infty| < 0.05R_\infty$.

13) Tempo de Pico t_p (“peak time”):

Para determinar t_p , derivamos $R(t)$:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \nu e^{-\nu t}(\omega \cos(\omega t) + \nu \sin(\omega t)) - e^{-\nu t}(-\omega^2 \sin(\omega t) + \nu \omega \cos(\omega t)) = 0.$$

Simplificando:

$$\sin(\omega t)(\nu^2 + \omega^2) + \cos(\omega t)(\nu \omega - \nu \omega) = 0,$$

logo:

$$t_p \omega = \pi \quad \Rightarrow \quad t_p = \frac{\pi}{\omega}.$$

14) Sobressinal (M_p):

O sobressinal é definido como:

$$M_p = \frac{R(t_p) - R_\infty}{R_\infty}$$

Substituindo t_p e usando $R_\infty = \omega$:

$$M_p = \frac{R_\infty - e^{-\nu t_p}(\omega \cos \omega t_p + \nu \sin \omega t_p) - R_\infty}{R_\infty} = e^{-\nu t_p},$$

o que resulta em:

$$M_p = e^{-\nu t_p} = e^{-\frac{\nu}{\omega} \pi}.$$

Resumo

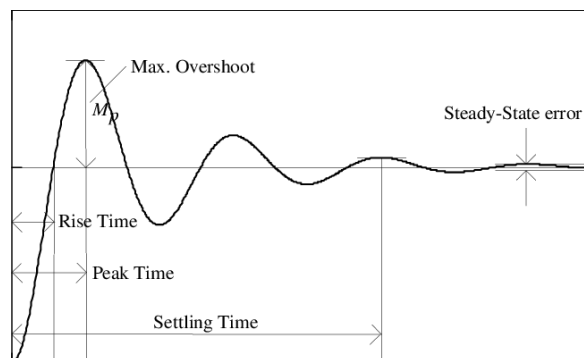
Considere um sistema de segunda ordem com autovalor $\lambda = -\nu + i\omega$. Há dois tempos importantes a serem considerados:

- $T = \frac{1}{\nu}$: constante de tempo, que determina o tempo de acomodação t_s .
- $t_p = \frac{\pi}{\omega}$: tempo de pico.
- $M_p = e^{-\frac{\nu}{\omega}\pi} = e^{-t_p/T}$: sobressinal (overshoot), que é determinado pela razão $\frac{t_p}{T}$.

O sobressinal é dado por:

$$M_p = \frac{R(t_p) - R_\infty}{R_\infty}.$$

O gráfico mostra $R(t)$ atingindo o valor assintótico R_∞ , com o sobressinal M_p e o tempo de pico t_p destacados.



Capítulo 12

Matriz de Controlabilidade e Estratégia Ótima.

1. Solução da equação não homogênea:

$$\dot{x} = Ax + f$$

Onde:

$$x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{incógnita}), \quad f(t) \in \mathbb{R}^n \quad (\text{dado, forçante})$$

e A é uma matriz de coeficientes constantes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Pela fórmula da variação das constantes, a solução da equação é:

$$x(t) = M(t)x(0) + \int_0^t M(t-\eta)f(\eta)d\eta$$

onde

$$M(t-\eta) = e^{A(t-\eta)} = e^{At}e^{-A\eta} = M(t)M(-\eta)$$

2. O sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Onde:

- x = variáveis de estado $\in \mathbb{R}^n$
- u = variáveis de controle (entrada) $\in \mathbb{R}^r$

é dito controlável se, para quaisquer condições iniciais $a \in \mathbb{R}^n$ e finais $b \in \mathbb{R}^n$, existir $T > 0$ e $u \in \mathcal{B} = \{u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r \text{ contínua por partes}\}$ tal que:

$$x(0) = a \quad \text{e} \quad x(T) = b$$

3. Caso trivial

Se $B = 0$, o sistema não é controlável. Por exemplo, não é possível conectar $a = 0$ e $b \neq 0$ por uma solução ($x = 0$ é ponto de equilíbrio da equação $\dot{x} = Ax$).

4. Caso em que B é a matriz identidade.

A equação é:

$$\dot{x} = Ax + u$$

Seja $b = x(T) = M(T)a + \int_0^T M(T - \eta)Bu(\eta)d\eta$. Como $B = \text{id}$, temos:

$$b - M(T)a = M(T) \int_0^T M(-\eta)u(\eta)d\eta$$

Definimos W como:

$$W = b - M(T)a \quad (\text{dado})$$

Escolhemos $u(\eta)$ como:

$$u(\eta) = M(\eta)M^{-1}(T)\frac{W}{T}$$

Logo:

$$W = M(T) \int_0^T M(-\eta)M(\eta)M^{-1}(T)\frac{W}{T}d\eta$$

Simplificando:

$$W = M(T)M^{-1}(T)W$$

Portanto, o sistema é controlável.

5. Observação:

Quando o sistema é controlável, existem muitas estratégias de controle.

Usaremos o "Método dos Mínimos Quadrados" para selecionar uma.

6. Procura de $u \in \mathcal{B}$ por meio de minimização:

$$\min_{u \in \mathcal{B}} \frac{1}{2} \int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta$$

onde $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$, sob o vínculo:

$$W = \int_0^T M(T - \eta)Bu(\eta)d\eta$$

com $W = x(T) - M(T)x(0)$ (dado).

7. Uso de multiplicadores de Lagrange:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta - \lambda^T \left(\int_0^T M(T - \eta)Bu(\eta)d\eta - W \right)$$

Onde $\lambda \in \mathbb{R}^n$ são os multiplicadores de Lagrange.

8 Definição de ponto crítico.

A função $\bar{u}$ é um ponto crítico (ou extremal) de Φ se, para toda variação $\delta \in \mathcal{B}$, com $\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$, vale:

$$\left. \frac{d}{ds} \Phi(\bar{u} + s\delta) \right|_{s=0} = 0 \quad \text{com} \quad s \in \mathbb{R}$$

9. Derivação de Φ .

A expressão para $\Phi(\bar{u} + s\delta)$ é dada por:

$$\Phi(\bar{u} + s\delta) = \frac{1}{2} \int_0^T (|\bar{u}|^2 + 2s\bar{u}^T \delta + s^2 |\delta|^2) d\eta - \lambda^T \left(\int_0^T M(T - \eta) B(\bar{u} + s\delta) d\eta - W \right)$$

A derivada de $\Phi(\bar{u} + s\delta)$ em relação a s é dada por:

$$\left. \frac{d}{ds} \Phi(\bar{u} + s\delta) \right|_{s=0} = \int_0^T \bar{u}^T \delta d\eta - \lambda^T \int_0^T M(T - \eta) B \delta d\eta = 0 \quad (12.1)$$

Ou seja:

$$\int_0^T (\bar{u}^T - \lambda^T M(T - \eta) B) \cdot \delta d\eta = 0$$

10. Lema de Du Bois-Reymond (1879); usado por Euler em 1744.

Vale a identidade na equação (12.1), para qualquer variação δ , se e só se:

$$\bar{u}^T = \lambda^T M(T - \eta) B$$

Logo, $\bar{u}$ é um ponto crítico de Φ se:

$$\bar{u} = B^T M^T(T - \eta) \lambda$$

11. Para determinar λ , usamos o vínculo:

$$W = \int_0^T M(T - \eta) B \bar{u}(\eta) d\eta = \int_0^T M(T - \eta) B B^T M^T(T - \eta) \lambda d\eta$$

$$W = \int_0^T M(T - \eta) B B^T M^T(T - \eta) d\eta \cdot \lambda$$

12. Definição de Matriz de Controlabilidade Q_T :

$$Q_T := \int_0^T M(T - \eta) B B^T M^T(T - \eta) d\eta$$

é uma matriz $n \times n$.

13. Hipótese.

Supondo que Q_T é invertível, temos:

$$\lambda = Q_T^{-1} W$$

14. A estratégia de controle ótima é:

$$\bar{u}(\eta) = B^T M^T(T - \eta) Q_T^{-1} W$$

Note: $\bar{u} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função analítica.

15. Teorema (Jerzy Zabczyk, "Mathematical Control Theory: An Introduction", Cap. 1)

Se Q_T é invertível, então $\dot{x} = Ax + Bu$ com

$$\bar{u}(\eta) = B^T M^T(T - \eta) Q_T^{-1} W$$

satisfaz:

- a) Dados quaisquer $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$, se W for escolhido como $W = b - M(T)a$, então $x(0) = a$ é levado em $x(T) = b$ (o sistema é controlável).

- b) Para qualquer outra estratégia de controle u que leve $x(0) = a$ e $x(T) = b$, vale:

$$\int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta > \int_0^T |\bar{u}(\eta)|^2 d\eta \quad \text{para } u \neq \bar{u}.$$

Obs: $Q_T > 0$ (isto é, $\langle v, Q_T v \rangle > 0$ para todo $v \neq 0$). Q_T é invertível $\Leftrightarrow Q_T > 0$ (definida positiva).

16. Prova

- a) Sabemos que $\bar{u}(\eta) = B^T M^T (T - \eta) Q_T^{-1} W$, e que:

$$\int_0^T M(T - \eta) B \bar{u}(\eta) d\eta = \int_0^T M(T - \eta) B B^T M^T (T - \eta) d\eta Q_T^{-1} W = W$$

- b) Seja $u(\eta) = \bar{u}(\eta) + \delta(\eta)$. Como:

$$\underbrace{\int_0^T M(T - \eta) B u(\eta) d\eta}_{=W} = \underbrace{\int_0^T M(T - \eta) B \bar{u}(\eta) d\eta}_{=W} + \int_0^T M(T - \eta) B \delta(\eta) d\eta$$

Obtemos que:

$$\int_0^T M(T - \eta) B \delta(\eta) d\eta = 0 \quad (12.2)$$

Portanto:

$$\int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta = \int_0^T |\bar{u}(\eta)|^2 d\eta + \int_0^T |\delta(\eta)|^2 d\eta + 2 \int_0^T \bar{u}^T(\eta) \delta(\eta) d\eta$$

Como $\bar{u}(\eta) = B^T M^T (T - \eta) Q_T^{-1} W$, temos

$$\int_0^T \bar{u}^T(\eta) \delta(\eta) d\eta = W^T (Q_T^{-1})^T \underbrace{\int_0^T M(T - \eta) B \delta(\eta) d\eta}_{=0 \text{ eq. (12.2)}} = 0$$

Portanto vale:

$$\int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta - \int_0^T |\bar{u}(\eta)|^2 d\eta = \int_0^T |\delta(\eta)|^2 d\eta > 0$$

Logo, $\bar{u}$ minimiza a integral $\int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta$.

Capítulo 13

Controlabilidade: critério do posto de Kalman.

Teorema. As seguintes condições são equivalentes para o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$:

- (a) Um estado arbitrário $w \in \mathbb{R}^n$ é atingido a partir de $x(0) = 0$ para algum $T > 0$.
- (b) O sistema é controlável para algum $T > 0$.
- (c) O sistema é controlável para todo $T > 0$.
- (d) A matriz de controlabilidade

$$Q_T = \int_0^T M(T - \eta) B B^T M^T(T - \eta) d\eta, \quad M(t) = e^{At}$$

é não singular para algum $T > 0$.

- (e) A matriz Q_T é não singular para todo $T > 0$.

(f) O posto da matriz:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}_{n \times nr}$$

é n .

2) **Observação:** Nas aulas passadas provamos que:

$$(b) \Rightarrow (a), \quad (d) \Rightarrow (b) \quad \text{e} \quad (e) \Rightarrow (c)$$

3) Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$, a controlabilidade significa que existe u , $T > 0$ e

$$u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$$

tal que:

$$x(T) = M(T)x(0) + \int_0^T M(T-\eta)Bu(\eta)d\eta$$

com $x(T) = b$ e $x(0) = a$.

Isso é equivalente a dizer que, para todo $w \in \mathbb{R}^n$, existe $T > 0$ e u tal que:

$$w = \int_0^T M(T-\eta)Bu(\eta)d\eta$$

ou seja, w é atingido a partir de 0. Basta fazer $w = b - M(T)a$.

Logo, $(a) \Leftrightarrow (b)$.

4) Note que:

$$(c) \Rightarrow (b) \quad \text{e} \quad (e) \Rightarrow (d)$$

5) **Observação:** Seja

$$\mathcal{C}_T = \left\{ u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r : \int_0^T u(\eta)d\eta < \infty \right\}$$

e

$$\mathcal{L}_T : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathbb{R}^n$$

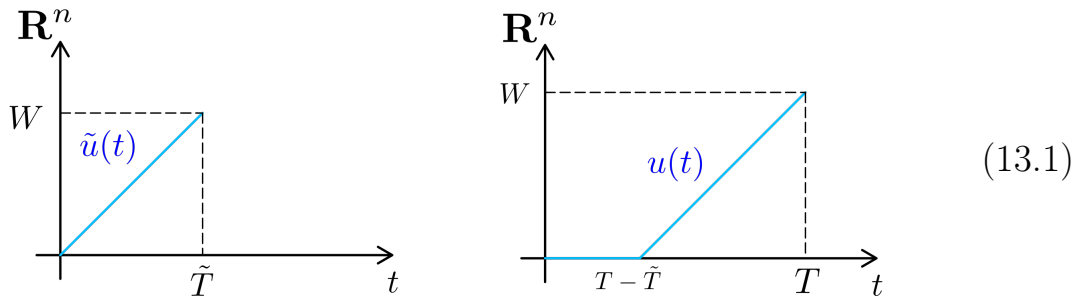
a função

$$w = \mathcal{L}_T(u) := \int_0^T M(T - \eta)Bu(\eta)d\eta$$

- Se $\mathcal{L}_{\tilde{T}}$ é sobrejetora para algum $\tilde{T} > 0$, então $\mathcal{L}_T$ é sobrejetora para todo $T \geq \tilde{T}$.
- Prova. Dado $w \in \mathbb{R}^n$ qualquer, seja $\tilde{u} : [0, \tilde{T}] \rightarrow \mathbb{R}^r$ uma entrada tal que $\mathcal{L}_{\tilde{T}}(\tilde{u}) = w$.

Façamos (ver Figura (13.1))

$$u(\eta) = \begin{cases} 0 & 0 < \eta \leq T - \tilde{T}, \\ \tilde{u}(\eta - (T - \tilde{T})) & T - \tilde{T} < \eta < T \end{cases}$$



Com esta escolha $x(t) = 0$ para $0 \leq t \leq \tilde{T}$ and $x(T) = w$.

- 6) **Lema:** $(a) \Rightarrow (e)$, ou seja, se um estado arbitrário $w \in \mathbb{R}^n$ é atingido a partir de $x(0) = 0$ para algum $T > 0$, então Q_T é não singular para todo $T > 0$. (De fato, Q_T é positiva definida para todo $T > 0$). Em outras palavras:

Controlabilidade $\Rightarrow \text{Det}(Q_T) \neq 0$ para todo t

- 7) **Prova:** A matriz Q_T é simétrica. Se ela é singular para algum $T > 0$, então existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, tal que:

$$0 = v^T Q_T v = \int_0^T v^T M(T - \eta) B B^T M^T(T - \eta) v d\eta$$

Isso implica que:

$$\begin{aligned} &= \int_0^T (B^T M^T(T - \eta) v)^T (B^T M^T(T - \eta) v) d\eta \\ &= \int_0^T \| (B^T M^T(T - \eta) v) \|^2 d\eta \end{aligned}$$

Neste caso, $B^T M^T(t) v = 0$ para todo $t \in [0, T]$.

- 8) **Proposição:** $B^T M^T(t) v = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.¹

Prova: Cada linha da função $B^T M^T(t) v \in \mathbb{R}^r$ é uma combinação linear de funções da forma e^{at} , $e^{at} \cos(bt)$, $e^{at} \sin(bt)$, $t^k e^{at} \cos(bt)$ e $t^k e^{at} \sin(bt)$. Isso decorre de $M(t) = e^{At}$ e do fato, visto em aulas passadas, que as entradas de e^{At} são da forma acima (os termos em t^k só aparecem se a matriz A possui raízes múltiplas e blocos de Jordan não triviais).

Se $B^T M^T(t) v = 0$ para $t \in (0, T)$, com $T > 0$, então todas as derivadas de cada linha de $B^T M^T(t) v$ são nulas para qualquer $t \in (0, T)$. Logo a expansão em série de Taylor destas linhas em qualquer ponto do intervalo é a função nula. Mas as expansões em série de Taylor das funções acima convergem para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $B^T M^T(t) v = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

- 9) Suponha que Q_T seja singular para $T > 0$ e seja $v \in \mathbb{R}^n$ como em (7).

¹Consequência da analiticidade da função $t \mapsto B^T M^T(t) v$

Como o sistema é controlável no tempo $\tilde{T}$, existe u , não necessariamente a que minimiza $\int |u|^2 d\eta$, tal que:

$$v = \int_0^{\tilde{T}} M(\tilde{T} - \eta) B u(\eta) d\eta$$

Logo:

$$\begin{aligned} v^T \cdot v &= \int_0^{\tilde{T}} v^T M(\tilde{T} - \eta) B u(\eta) d\eta = \\ &= \int_0^{\tilde{T}} \left(B^T M^T(\tilde{T} - \eta) v \right)^T u(\eta) d\eta \end{aligned}$$

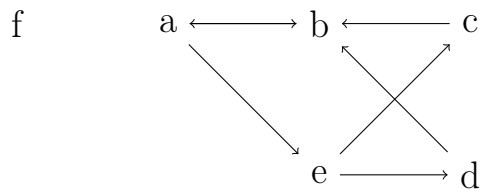
Mas de (7) $B^T M^T(t) v = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então:

$$v^T \cdot v = |v|^2 = \int_0^{\tilde{T}} \left(B^T M^T(\tilde{T} - \eta) v \right)^T u(\eta) d\eta = 0$$

Isso implica que $v = 0$, o que contradiz que Q_T é singular em T .

Logo, (7) não é verdadeiro, e temos que Q_T é positiva definida para todo $T > 0$ e, portanto, não singular. **C.q.d.**

- 10) O seguinte diagrama mostra as implicações já provadas no teorema (1):



Nota-se a equivalência das afirmações a , b , c , d , e . Resta provar $f \Leftrightarrow a$.

11) Teorema (Cayley-Hamilton)

Seja $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$ o polinômio característico da matriz A .

Então:

$$p(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_n I = 0$$

12) **Ideia da prova.**

(i) Se A é diagonal, então $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são as raízes de $p(\lambda)$.

Como:

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

temos $p(A) = 0$.

(ii) Se A é diagonalizável com $M^{-1}AM = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, então:

$$\begin{aligned} p(A) = 0 & \Leftrightarrow M^{-1}p(A)M = 0 \Leftrightarrow \\ M^{-1}A^nM + a_1M^{-1}A^{n-1}M + \cdots + a_nI &= 0 \\ M^{-1}A^nM = D^n, \quad M^{-1}A^{n-1}M = D^{n-1}, \quad \dots \\ \Leftrightarrow D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_nI &= 0 \end{aligned}$$

por (i).

(ii i) Se a matriz $\tilde{A}$ não é diagonalizável, é possível escrevê-la na forma de Jordan. Considere um bloco de Jordan da forma:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = A$$

onde

$$bI_{n \times n} \quad \text{e} \quad N_{n \times n}$$

Temos $p(\lambda) = (\lambda - b)^n$ e:

$$p(A) = (A - bI)^n = (bI + N - bI)^n = N^n = 0$$

Usando este fato e a fatoração de $p(\lambda)$, conclui-se a prova do teorema.

13) **Lema:** Existem constantes $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ tais que:

$$e^A = c_0 I + c_1 A + \dots + c_{n-1} A^{n-1}$$

14) **Ideia da prova:** Suponha que A possui autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (As fórmulas de interpolação reais que estudamos também podem ser aplicadas no caso complexo).

Seja

$$q(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + \dots + c_{n-1} \lambda^{n-1}$$

o polinômio interpolador da tabela:

λ	λ_1	λ_2	$\dots$	λ_n
e^λ	e^{λ_1}	e^{λ_2}	$\dots$	e^{λ_n}

Seja M uma matriz que diagonaliza A : $M^{-1}AM = D$. Então, como na prova do teorema de Cayley-Hamilton

$$e^A - q(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M^{-1}(e^A - q(A))M = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (e^D - q(D))M = 0$$

Mas esta última expressão é verdadeira devida à construção de q :

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} - q(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} - q(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15) **Teorema** $(a) \Leftrightarrow (f)$ no teorema 1, ou seja:

$$\left\{ w \text{ é atingido a partir de } x(0) = 0 \right\} \Leftrightarrow [A \mid B] = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

tem posto n .

16) **Prova:** Do Lema (13), existem $c_0(t), c_1(t), \dots, c_{n-1}(t)$ tal que:

$$M(t) = e^{At} = c_0(t)I + c_1(t)A + c_2(t)A^2 + \dots + c_{n-1}(t)A^{n-1}$$

Logo, usando que as funções $c_0(t), \dots, c_{n-1}(t)$ são contínuas (pense no polinômio interpolador na forma de Lagrange e no fato que para $t \rightarrow 0$, $c_j(t) \rightarrow 0$ para $j = 1, \dots, n-1$):

$$\begin{aligned} & \int_0^T M(T-\eta)Bu(\eta)d\eta \\ &= \int_0^T [c_0(T-\eta)I + \dots + c_{n-1}(T-\eta)A^{n-1}] Bu(\eta)d\eta \\ &= B \int_0^T c_0(T-\eta)u(\eta)d\eta + BA \int_0^T c_1(T-\eta)u(\eta)d\eta \\ &+ \dots + BA^{n-1} \int_0^T c_{n-1}(T-\eta)u(\eta)d\eta \\ &= \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde:

$$V_i = \int_0^T c_i(T-\eta)u(\eta)d\eta$$

Se o posto de $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} < n$, então existe $w \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$w \neq \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{pmatrix}$$

para qualquer $(V_0, V_1, \dots, V_{n-1})$ e, logo, para qualquer $u : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathbb{R}^r$.

Portanto w não é atingível e o sistema não é controlável.

Com isso provamos que não (f) $\Rightarrow$ não (a), ou seja, (a) $\Rightarrow$ (f).²

- Suponha agora que, para um dado $T > 0$, não vale (a), ou seja, existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$0 = v^T \int_0^T M(T-\eta)Bu(\eta)d\eta = \int_0^T (B^T M^T(T-\eta)v)^T u(\eta)d\eta$$

para qualquer $u(\eta)$, implicando que $B^T M^T(t)v = 0$ para todo $t \in [0, T]$.

Mas $M^T(t) = e^{A^T t} = I + A^T t + \frac{(A^T)^2 t^2}{2!} + \dots$

e vale:

$$F(t) = B^T \left(I + A^T t + \frac{(A^T)^2 t^2}{2!} + \dots \right) v = 0$$

Para $t = 0$, temos:

$$F(0) = B^T v = 0$$

²Se soubéssemos que a aplicação

$$u \in \mathcal{C}_T \rightarrow \begin{pmatrix} \int_0^T c_0(T-\eta)u(\eta)d\eta \\ \int_0^T c_1(T-\eta)u(\eta)d\eta \\ \vdots \\ \int_0^T c_{n-1}(T-\eta)u(\eta)d\eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nr}$$

fosse sobrejetora, então poderíamos reverter o argumento acima e concluir a prova do Teorema.

Derivando em $t = 0$:

$$\left. \frac{dF(t)}{dt} \right|_{t=0} = B^T A^T v = 0$$

Derivando até a ordem $n - 1$:

$$\left. \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} F(t) \right|_{t=0} = B^T (A^T)^{n-1} v = 0$$

Essas identidades implicam que, para qualquer $V_0 \in \mathbb{R}^r$, $V_1 \in \mathbb{R}^r$, $\dots$, $V_{n-1} \in \mathbb{R}^r$:

$$(B^T v)^T V_0 = v^T B V_0 = 0$$

$$(B^T A^T v)^T V_1 = v^T A B V_1 = 0$$

$$(B^T (A^T)^{n-1} v)^T V_{n-1} = v^T A^{n-1} B V_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow v^T \cdot \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

para qualquer vetor $\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{pmatrix}$.

Logo, o posto de $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} < n$.

Com isso, não (a) $\Rightarrow$ não (f), ou seja, (f) $\Rightarrow$ (a).

C.q.d.

Observação: O Teorema de Cayley-Hamilton não foi usado na prova do teorema acima, mas será usado futuramente..

Capítulo 14

Forma Normal dos Sistemas Controláveis.

14.1 Mudança de variáveis

Considere o sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r$$

$$y = Cx \quad y \in \mathbb{R}^m$$

e as mudanças de variáveis:

$$\tilde{x} = Px, \quad \tilde{u} = Su, \quad \tilde{y} = Ry$$

onde $P_{n \times n}$, $S_{r \times r}$, $R_{m \times m}$ são invertíveis.

$$\dot{\tilde{x}} = P\dot{x} = P(Ax + Bu) = PAP^{-1}\tilde{x} + PBS^{-1}\tilde{u}$$

$$\tilde{y} = RCx = RCP^{-1}\tilde{x}$$

Ou:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}$$

$$\tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x}$$

com:

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \quad \tilde{B} = PBS^{-1}, \quad \tilde{C} = RCP^{-1}$$

14.2 Sistemas Equivalentes

Dois sistemas

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases}$$

São ditos equivalentes se existe uma mudança de variáveis como no parágrafo 14.1 que leva um no outro.

14.3 Teorema (forma de Kalman dos sistemas não controláveis).

Suponha que o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ seja não controlável com posto $\text{rank}[A|B] = \ell < n$.

Então existe um sistema equivalente tal que:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad PB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde $A_{11} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{\ell \times (n-\ell)}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-\ell) \times (n-\ell)}$.

Mais ainda, $\dot{\tilde{x}} = A_{11}\tilde{x} + B_1\tilde{u}$, com $\tilde{x} \in \mathbb{R}^\ell$, $\tilde{u} \in \mathbb{R}^r$, é controlável.

Prova

Ver livro de Jerzy Zabczyk, Mathematical Control Theory, pág. 23.

14.4 Forma canônica para sistemas controláveis com uma entrada, $r = 1$

Considere um sistema da forma

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = u \quad (14.1)$$

onde

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$$

Em forma matricial temos, fazendo $y = z_1$:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_B u \quad (14.2)$$

14.5 Controlabilidade do sistema (14.2)

As matrizes A e B em (14.2) são tais que

$$[A|B] = [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B] = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 1 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}} \quad (14.3)$$

tem determinante igual a 1, portanto posto n .

Logo, o sistema (14.2) é controlável.

14.6 Lema: Forma canônica preliminar para sistemas controláveis.

Seja $\dot{x} = Ax + Bu$, onde $u \in \mathbb{R}$, um sistema controlável qualquer. Então $\dot{x} = Ax + Bu$ é equivalente a

$$\dot{w} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} w + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} u \quad (14.4)$$

onde $a_1, \dots, a_n$ são os coeficientes do polinômio característico de A :

$$p(A) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

14.7 Prova

Seja A a matriz em $\dot{x} = Ax + Bu$.

Renomeamos as colunas de $[A|B]$ como

$$[e_n | e_{n-1} | \cdots | e_1] := [B | AB | A^2B | \cdots | A^{n-1}B]$$

Como o sistema é controlável, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ formam uma base. O vetor x pode ser escrito na nova base como

$$x = w_1 e_1 + w_2 e_2 + \cdots + w_n e_n = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} w = Pw$$

onde

$$\begin{aligned} P &:= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = [A^{n-1}B | \cdots | A^2B | AB | B] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{14.5}$$

Com isso:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{w}_1 e_1 + \dot{w}_2 e_2 + \cdots + \dot{w}_n e_n = Ax + Bu \\
&= A(w_1 e_1 + \cdots + w_n e_n) + e_n u \\
&= w_1 A e_1 + w_2 A e_2 + \cdots + w_n A e_n + e_n u \\
&= w_1 A^n B + w_2 A^{n-1} B + \cdots + w_n A B + e_n u \\
&= w_1 A^n B + w_2 e_1 + \cdots + w_n e_{n-1} + e_n u
\end{aligned} \tag{14.6}$$

14.8 Teorema de Cayley-Hamilton

Do teorema de Cayley-Hamilton, temos que

$$\begin{aligned}
p(A) &= A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \cdots + a_n I = 0 \\
\Rightarrow A^n B &= -a_1 A^{n-1} B - a_2 A^{n-2} B - \cdots - a_n B \\
\Rightarrow A^n B &= -a_1 e_1 - a_2 e_2 - \cdots - a_n e_n
\end{aligned}$$

14.9 Voltando à equação (14.6):

$$\begin{aligned}
&\dot{w}_1 e_1 + \dot{w}_2 e_2 + \dot{w}_3 e_3 + \cdots + \dot{w}_n e_n \\
&= w_2 e_1 + w_3 e_2 + \cdots + w_n e_{n-1} - a_1 w_1 e_1 - a_2 w_1 e_2 - \cdots - a_n w_1 e_n + e_n u
\end{aligned}$$

Estas equações podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_1 &= w_2 - a_1 w_1 & (a) \\
 \dot{w}_2 &= w_3 - a_2 w_1 & (b) \\
 \dot{w}_3 &= w_4 - a_3 w_1 & (c) \\
 &\vdots \\
 \dot{w}_{n-1} &= w_n - a_{n-1} w_1 \\
 \dot{w}_n &= -a_n w_1 + u
 \end{aligned} \tag{14.7}$$

Em forma matricial essas equações ficam

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

que é o sistema (14.4) no enunciado do Lema.

14.10 Corolário: O sistema no Lema 14.6 é equivalente à equação (14.1) de ordem n no parágrafo 14.4

Seja $w_1 = y$, então da equação (14.7)

$$\begin{aligned}
 w_1^{(n)} = y^{(n)} &\stackrel{(a)}{=} w_2^{(n-1)} - a_1 w_1^{(n-1)} \stackrel{(b)}{=} -a_1 y^{(n-1)} + w_3^{(n-2)} - a_2 w_1^{(n-2)} \\
 &\stackrel{(c)}{=} -a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} + w_4^{(n-3)} - a_3 w_1^{(n-3)} = \dots \\
 &= -a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} \dots - a_{n-1} \dot{y} + \dot{w}_n \\
 &= -a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} \dots - a_{n-1} \dot{y} - a_n y + u
 \end{aligned}$$

Logo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = u$$

que é a equação (14.1).

Antes de apresentarmos a transformação $w \rightarrow z$ que leva o sistema (14.4) no sistema (14.2), apresentaremos alguns resultados preliminares sobre matrizes unitriangulares.

14.11 Matrizes Unitriangulares

Matrizes Unitriangulares inferiores são da forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Note: as matrizes unitriangulares tem determinante 1.

- O produto de duas matrizes A da forma acima é da mesma forma.

As matrizes formam um grupo.

Seja:

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (14.8)$$

Então sua inversa é da forma

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (14.9)$$

De fato

$$Q^{-1}Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$\alpha_1 + a_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -a_1$$

$$\alpha_2 + \alpha_1 a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1 a_1 - a_2$$

$$\alpha_3 + \alpha_2 a_1 + \alpha_1 a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -\alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1 - a_3$$

etc.

É possível inverter a matriz Q facilmente usando uma recursão.

14.12 Teorema: Forma canônica dos sistemas controláveis.

Seja $\dot{x} = Ax + Bu$ um sistema controlável qualquer, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}$.

A mudança de variáveis

$$x = PQz$$

onde P e Q são as matrizes dadas na equações (15.1) e (15.2), respectivamente, leva o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ ao seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (14.10)$$

(ou seja, ao sistema (14.2)), onde $a_1, \dots, a_n$ são os coeficientes do polinômio característico de A :

$$p(A) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

14.13 Prova.

No Lema 14.6 mostramos que a transformação $x = Pw$ leva o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ no sistema (14.4), ou seja $\dot{w} = \tilde{A}w + \tilde{B}u$.

Portanto basta mostrar que fazendo $w = Qz$ obtemos

$$\dot{z} = Q^{-1}\tilde{A}Qz + Q^{-1}\tilde{B}u$$

e este sistema é igual ao sistema (15.3)

Usando a expressão de $\tilde{B}$ na equação (14.4) temos

$$Q^{-1}\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que possui a forma desejada.

Resta ainda provar que

$$Q^{-1}\tilde{A}Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Vamos apenas verificar a identidade para uma matriz 3x3.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}$$

com

$$\alpha_1 = -a_1, \quad \alpha_2 = -a_2 - \alpha_1 a_1 = -a_2 + a_1^2$$

Usando que

$$\tilde{A}Q = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$Q^{-1}\tilde{A}Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 \\ (-a_2 + a_1^2) & -a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

como desejado.

Capítulo 15

Estabilizabilidade

15.1 Definição.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}$$

é estabilizável se for possível encontrar uma retroalimentação ("feedback")

$$u = -Kx \quad \text{tal que } \dot{x} = (A - BK)x \text{ é estável.}$$

Referência: (Ogata 5th ed cap 10-2) "pole placement"

(Zabcyk sec 2.5)

15.2 Definição.

O sistema é completamente estabilizável se dados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ é possível escolher K tal que $A - BK$ possua $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ como raízes do seu polinômio característico.

Teorema: O sistema é estabilizável $\iff$ O sistema é controlável.

Recordação:

- O sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é controlável $\iff$ dado $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\exists u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$x(0) = a \quad \text{e} \quad x(T) = b$$

- O sistema é controlável $\iff [A|B] = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ tem posto n .
- Teorema já provado: $Q_T = \int_0^T M(t)BB^\top M^\top(t) dt$ é invertível $\iff [A|B]$ é de posto n .

15.3 Prova: Controlável $\Rightarrow$ Completamente Estabilizável.

Consideraremos apenas o caso em que $u \in \mathbb{R}$ (caso considerado no livro do Ogata). Portanto, $B_{n \times 1}$.

Na Aula 14, teorema 14.12, provamos que se o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é controlável, então as matrizes

$$P := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} = [A^{n-1}B \mid \dots \mid A^2B \mid AB \mid B] \quad (15.1)$$

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

são invertíveis e definem uma transformação de variáveis

$$x = PQz$$

que leva o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ ao seguinte sistema (forma canônica dos sistemas controláveis):

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (15.3)$$

onde $a_1, \dots, a_n$ são os coeficientes do polinômio característico de A :

$$p(A) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

15.4 Matriz de ganho

Seja $\tilde{K}$ a matriz de ganho nas variáveis z a ser usada no controle por retroalimentação (“feedback”) de estados

$$u = -\tilde{K}z$$

Note: $u_{1 \times 1} = -\tilde{K}_{1 \times n} z_{n \times 1}$.

Escrevemos

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \dots & \delta_1 \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

Usando que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \dots & \delta_1 \end{bmatrix}}_{=\tilde{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_n & \delta_{n-1} & \dots & \dots & \delta_1 \end{bmatrix},$$

escrevemos o sistema (15.3) com $u = -\tilde{K}z$ como

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n - \delta_n & -a_{n-1} - \delta_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 - \delta_1 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} z \quad (15.4)$$

Temos

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \tilde{A}) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \dots & \dots & \lambda + a_1 + \delta_1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^n + (a_1 + \delta_1)\lambda^{n-1} + \dots + \lambda(a_{n-1} + \delta_{n-1}) + a_n + \delta_n \end{aligned} \quad (15.5)$$

15.5 Nota sobre o Sistema (15.4)

O sistema (15.4) pode ser escrito como:

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dots, \quad \dot{z}_{n-1} = z_n$$

$$\dot{z}_n = -\left\{(a_n + \delta_n)z_1 + (a_{n-1} + \delta_{n-1})z_2 + \dots + (a_1 + \delta_1)z_n\right\}$$

Esse sistema é equivalente a:

$$z_1^{(n)} + (a_1 + \delta_1)z_1^{(n-1)} + (a_{n-1} + \delta_{n-1})z_1^{(n-2)} + \dots + (a_n + \delta_n)z_1 = 0$$

Fazendo $z_1 = e^{\lambda t}$, temos que

$$\lambda^n + (a_1 + \delta_1)\lambda^{n-1} + \dots + (a_n + \delta_n) = 0$$

o que é a equação característica correspondente.

15.6 Polinômio Característico Desejado e determinação de $\tilde{K}$.

Dado os autovalores desejados $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, construímos o polinômio

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

Expandindo, temos:

$$p(\lambda) = \lambda^n + \tilde{a}_1\lambda^{n-1} + \dots + \tilde{a}_n$$

Para encontrar os valores de δ que definem a matriz de ganho $\tilde{K}$, impomos que $p(\lambda)$ seja igual ao polinômio na equação (15.5):

$$\lambda^n + (a_1 + \delta_1)\lambda^{n-1} + \dots + (a_n + \delta_n) = \lambda^n + \tilde{a}_1\lambda^{n-1} + \dots + \tilde{a}_n$$

Isso implica que:

$$\delta_1 = \tilde{a}_1 - a_1, \quad \delta_2 = \tilde{a}_2 - a_2, \dots, \quad \delta_n = \tilde{a}_n - a_n$$

Concluimos, então, que controlabilidade implica estabilizabilidade. Mais ainda, temos uma maneira explícita de determinar a matriz de ganho para qualquer escolha de autovalores.

15.7 Matriz de ganho nas variáveis originais

Usando que $x = Pw$ e $w = Qz$ temos

$$(\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)z = (\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)Q^{-1}w = (\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)Q^{-1}P^{-1}x$$

Portanto, nas variáveis originais x :

$$K = (\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)Q^{-1}P^{-1}$$

15.8 Estabilizável $\Rightarrow$ Controlável

A prova neste caso é feita provando

Não Controlável $\Rightarrow$ Não Completamente Estabilizável

Na aula 14, parágrafo 14.3, nós apresentamos o seguinte resultado.

Suponha que o sistema $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$ seja não controlável com posto $[A|B] = \ell < n$. Então existe um sistema equivalente tal que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (15.6)$$

onde $x_1 \in \mathbb{R}^l$ e $x_2 \in \mathbb{R}^{n-l}$, $A_{11} \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{l \times (n-l)}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-l) \times (n-l)}$.

Mais ainda, $\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + B_1u$ é controlável.

15.9 Matriz de Ganho K

Seja $r = 1$, ou seja $u \in \mathbb{R}$, e

$$u = -[K_1, K_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

onde K_1 é uma matriz $1 \times l$ e K_2 é uma matriz $1 \times (n-l)$.

Substituindo este u no sistema (15.6) obtemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1K_1 & A_{12} - B_1K_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (15.7)$$

Vamos calcular o polinômio característico $p(\lambda)$ da matriz na equação (15.7):

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda I - A_{11} + B_1K_1 & -A_{12} + B_1K_2 \\ 0 & \lambda I - A_{22} \end{vmatrix} \\ &= \det(\lambda I - A_{22}) \cdot \det(\lambda I - (A_{11} - B_1K_1)) \end{aligned}$$

onde $\det(\lambda I - A_{22})$ é o polinômio $p_2(\lambda)$ correspondente à parte não controlável do sistema. A prova pode ser feita usando eliminação de Gauss.

Como não é possível alterar as raiz de $p_2(\lambda)$ escolhendo K os sistema não é estabilizável, como queríamos demonstrar.

Note: ainda é possível estabilizar a parte controlável do sistema, mas a estabilidade dependerá das raízes de p_2 terem parte real negativa.

Capítulo 16

Observabilidade.

16.1 Definição de Observabilidade

Considere o sistema de controle:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad y = h(x, u), \quad y \in \mathbb{R}^m \text{ (saída)}$$

O sistema é **observável** se, conhecendo a entrada e a saída

$$u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad \forall T > 0,$$

$$y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \forall T > 0,$$

é possível determinar o estado inicial $x(0)$.

Ver Ogata (Seção 9-7).

Para sistemas lineares:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = f(x, u) \\ y = Cx + Du = h(x, u) \end{cases}$$

16.2 Observabilidade para sistemas lineares

No caso de sistemas lineares a definição de observabilidade é equivalente à seguinte:

Definição

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

é observável se conhecendo $y(t), t \in [0, T]$ é possível determinar $x(0)$.

Observação:

Eliminam-se quantidades Bu e Du pois ambas podem ser incorporadas ao y . De fato, sejam $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ novas variáveis dadas por

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x} + \int_0^t M(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \\ y &= \tilde{y} + C \left(\int_0^t M(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \right) + Du \end{aligned}$$

Nas novas variáveis o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

fica

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} \end{cases}$$

16.3 Observabilidade e Sistemas Sobre-determinados

A solução de $\dot{x} = Ax$ é

$$M(t)x(0) = e^{At}x(0)$$

Logo se $y(t)$ é conhecido, então

$$y(t) = Cx(t) = CM(t)x(0) \quad 0 \leq t \leq T$$

consiste em um sistema sobre-determinado: as componentes de $x(0)$ constituem n incógnitas e, para qualquer $T > 0$, há infinitas equações, uma para cada valor de t .

O método dos mínimos quadrados em dimensão finita diz que se a solução de um sistema sobredeterminado existe

$$\mathcal{A}z = y \quad \text{onde} \quad z \in \mathbb{R}^q, y \in \mathbb{R}^p, q < p$$

então ela é dada pela solução de

$$\mathcal{A}^T \mathcal{A}z = \mathcal{A}^T y$$

Se a solução não existe, então a solução do sistema $\mathcal{A}^T \mathcal{A}z = \mathcal{A}^T y$ dá a “melhor aproximação” no sentido do método dos mínimos quadrados.

No caso do contínuo de equações $y(t) = Cx(t) = CM(t)x(0) \quad 0 \leq t \leq T$ a mesma ideia dá

$$\left(\int_0^T M(t)^T C^T C M(t) dt \right) x(0) = \int_0^T M(t)^T C^T y(t) dt \quad (16.1)$$

16.4 Definição de Matriz de Observabilidade

$$R_T$$

$$R_T := \int_0^T M(t)^T C^T C M(t) dt \quad (16.2)$$

Definimos também

$$Y_T := \int_0^T M^T(t) C^T y(t) dt$$

Observação: Se procurarmos o $x(0)$ que minimiza a função

$$\Phi(x) = \int_0^T \langle y(t) - CM(t)x, y(t) - CM(t)x \rangle dt \quad x \in \mathbb{R}^n$$

chegaremos exatamente à equação (16.1), ou seja,

$$R_T x(0) = \int_0^T M(t)^T C^T y(t) dt = Y_T$$

16.5 Teorema:

O sistema

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$

é observável se, e só se, R_T é não singular para algum $T > 0$.

Valem as equivalências:

O sistema é observável $\Leftrightarrow R_T$ é não singular $\forall T > 0$

$$\Leftrightarrow \text{posto}[A^T | C^T] := \begin{bmatrix} C^T & (A^T)C^T & \dots & (A^{n-1})C^T \end{bmatrix} = n$$

onde $[A^T | C^T]$ é uma matriz $n \times nm$.

16.6 Prova (ideia):

Se o sistema é observável então

$$y(t) = 0, \quad t \in [0, T] \quad \text{para algum } T > 0 \Rightarrow x(0) = 0$$

Logo a definição de observabilidade é equivalente à seguinte propriedade do sistema

$$x_0 := x(0) \neq 0 \Rightarrow y(t) \neq 0 \quad \text{para algum } t > 0$$

Qualquer saída é da forma $y(t) = CM(t)x_0$. Isso implica que

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle y(t), y(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle CM(t)x_0, CM(t)x_0 \rangle dt \\ &= \left\langle x_0, \underbrace{\int_0^T M^T(t)C^T C M(t) dt}_{=R_T} x_0 \right\rangle \end{aligned} \quad (16.3)$$

Suponha que o sistema é não observável. Então existe $T > 0$ e $x_0 \neq 0$ tal que $\int_0^T \langle y(t), y(t) \rangle dt = 0$. Mas da equação (16.3)

$$\langle x_0, R_T x_0 \rangle \Rightarrow \det(R_T) = 0$$

Logo, não observável implica $\det(R_T) = 0$ ou, equivalentemente, $\det(R_T) \neq 0$ implica observável.

Se $\det(R_T) = 0$ então existe $x_0 \neq 0$ tal que $\langle x_0, R_T x_0 \rangle = 0$. Da equação (16.3), para este $x_0 \neq 0$, $y(t) = 0$ para $t \in [0, T]$, e o sistema é não observável. Logo provamos

$$\text{observável} \Leftrightarrow \det(R_T) \neq 0$$

Para a prova de que o posto

$$\begin{bmatrix} C^T & (A^T)C^T & \dots & (A^{n-1})^T C^T \end{bmatrix} = n$$

implica observabilidade, ver Ogata Seção 9-7.

Observação

Note que as matrizes

$$R_T = \int_0^T M^T(t)C^T C M(t) dt = \text{matriz de observabilidade}$$

e

$$Q_T = \int_0^T M(t) B B^T M^T(t) dt = \text{matriz de controlabilidade}$$

coincidem se na matriz de observabilidade fizermos as substituições

$$M = e^{At} \rightarrow M^T = e^{A^T t} \quad C \rightarrow B^T$$

Provamos na aula sobre controlabilidade que

$$Q_T \text{ é não singular para } \forall T > 0 \Leftrightarrow \text{posto } [A|B] = n$$

Logo, o mesmo argumento implica

$$R_T \text{ é não singular para } \forall T > 0 \Leftrightarrow \text{posto } [A^T|C^T] = n$$

onde

$$[A^T|C^T] := \begin{bmatrix} C^T & (A^T)C^T & \dots & (A^{n-1})C^T \end{bmatrix} \text{ (dimensão } n \times nm \text{)}.$$

Capítulo 17

Observadores.

17.1 Exemplo de Sistema Não Estabilizável por Retroalimentação de Saída (Output Feedback)

Exemplo: O vetor de estado é:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} ;$$

a equação diferencial do sistema é:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = u ;$$

e a saída é $y = x_1$.

Se usarmos retroalimentação de saída, $u = -Ky$, a equação fica:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + (a_n + K)y = 0$$

O polinômio característico é obtido com a substituição $y = e^{\lambda t}$:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + (a_n + K) = 0 \quad (17.1)$$

Proposição Suponha que todas raízes de um polinômio real mônico, $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots$, possuem parte real estritamente negativa. Então todos os coeficientes do polinômio são positivos.

Prova Basta escrever o polinômio na forma fatorada: $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots$ com fatores repetidos no caso de raízes com multiplicidade maior que um. Se todos os autovalores são reais e negativos, então $p(\lambda)$ é um produto da forma $p(\lambda) = (\lambda + |\lambda_1|)(\lambda + |\lambda_2|)(\lambda + |\lambda_3|) \dots$ e todos os coeficientes de $p(\lambda)$ são positivos.

Se $\lambda_1 = -|b| + ic$ é complexo, então $\lambda_2 = -|b| - ic$ e

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda + |b|)^2 + c^2 = \lambda^2 + 2|b|\lambda + b^2 + c^2$$

possui todos os coeficientes positivos **cqd**.

Pela proposição se algum coeficiente do polinômio característico é estritamente negativo, então o sistema é instável.

Suponha que um dos coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ de $p(\lambda)$ na equação (17.1) seja negativo. Não é possível mudar esse coeficiente, uma vez que K só altera a_n . Logo não é possível estabilizar o sistema com feedback de saída.

17.2 Construção de Observadores

Considere o sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx \quad (17.2)$$

onde:

- $x \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de estado
- $u \in \mathbb{R}^r$ são as entradas (variáveis de controle)
- $y \in \mathbb{R}^m$ são as variáveis de saída

Para construir o observador, fazemos uma réplica do sistema original e adicionamos um acoplamento entre a réplica e o sistema original:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \quad \hat{y} = C\hat{x} \quad (17.3)$$

onde:

- $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é o estimador de $x \in \mathbb{R}^n$
- L é a matriz de ganho do observador

Subtraindo a equação (18.2) da (18.1):

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(Cx - C\hat{x})) = A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x})$$

Definindo o vetor erro $e := x - \hat{x}$, reescrevemos a equação acima como

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Queremos determinar L tal que a matriz $A - LC$ seja estável (todas as raízes de seu polinômio característico têm parte real negativa).

17.3 Definição: Detectabilidade

O sistema $\dot{x} = Ax$, $y = Cx$ é **detectável** se existe uma matriz L tal que $\dot{e} = (A - LC)e$ é estável.

Teorema: Se o sistema

$$\dot{x} = Ax \quad y = Cx \quad (17.4)$$

é observável, então ele é detectável.¹

17.4 Prova

Proposição:

$\dot{z} = (A - LC)z$ é estável $\Leftrightarrow \dot{z} = (A^\top - C^\top L^\top)z$ é estável.

Prova: Note que

$$\det(\lambda I - [A - LC]) = \det(\lambda I - [A - LC])^\top = \det(\lambda I - [A^\top - C^\top L^\top]).$$

Logo, as raízes dos polinômios característicos dos sistemas $\dot{z} = (A - LC)z$ e $\dot{z} = (A^\top - C^\top L^\top)z$ são as mesmas. **cqd.**

Na aula 15 vimos que: se $[A|B]$ tem posto n , então dados $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ é possível encontrar K tal que os auto-valores de $A - BK$ são $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Como

$$A - BK \rightarrow A^\top - C^\top L^\top \quad \text{sob a identificação} \quad A \rightarrow A^\top \quad B \rightarrow C^\top \quad K \rightarrow L^\top$$

temos que: se

$$[A^\top | C^\top] = \begin{bmatrix} C^\top & (A^\top)C^\top & \dots & (A^{n-1}C)^\top \end{bmatrix}$$

tem posto n , o que significa o sistema (17.4) ser observável, então é possível escolher $L^\top$ de modo que $A^\top - C^\top L^\top$ possua autovalores prescritos. De acordo com a Proposição a matriz $A - LC$ terá os mesmos autovalores. Isso conclui a prova do teorema.

¹O sistema (17.4) é observável se conhecida a saída $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $T > 0$, é possível determinar $x(0)$.

17.5 Corolário

Se o sistema (17.4) é observável, é possível escolher autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ e depois encontrar uma matriz de ganho do observador L (se $m = 1$, L é obtida pelo algoritmo da aula 15) tal que os auto-valores de $\frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = (A - LC)(x - \hat{x})$ são $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Portanto, escolhendo auto-valores com parte real negativa garantimos que a diferença $e = x - \tilde{x}$ tenda a zero quando t cresce.

O Efeito do Observador na Controlabilidade por Realimentação de Estado (Feedback)

Vimos no parágrafo 17.1 que um sistema da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

não pode ser controlado com retroalimentação de saída $u = -Ky$.

No entanto, com o uso de um observador podemos fazer uma retroalimentação usando o estado estimado $\hat{x}$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & y &= Cx & u &= -K\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \end{aligned} \tag{17.5}$$

onde o ganho do controle K e o ganho do observador L precisam ser escolhidos.

17.6 Análise da Estabilidade do sistema (17.5)

Usando que $e = x - \hat{x}$, a primeira equação do sistema (17.5) pode ser escrita como:

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} = Ax - BKx + BKx - BK\hat{x} = (A - BK)x + BKe$$

Subtraindo a segunda equação do sistema (17.5) da primeira obtemos a equação $\dot{e} = (A - LC)e$.

Com isso o sistema (17.5) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x + BKe \\ \dot{e} &= (A - LC)e\end{aligned}\tag{17.6}$$

ou na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

A equação característica do sistema (17.6) é dada por

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} \lambda I - (A - BK) & BK \\ 0 & \lambda I - (A - LC) \end{pmatrix} \\ = \det(\lambda I - (A - BK)) \cdot \det(\lambda I - (A - LC)) = 0\end{aligned}$$

o que nos mostra que as raízes de $\det(\lambda I - (A - BK)) = 0$ e $\det(\lambda I - (A - LC)) = 0$ são independentes.

17.7 Conclusão.

O controle por retroalimentação de estados estimados por um observador requer que o sistema seja controlável ($\text{posto}[A|B] = n$) e observável ($\text{posto}[A^\top|C^\top] = n$). O projeto do sistema de controle possui 2 etapas:

- a) Determinar a matriz de ganho de controle K como se estivéssemos fazendo retroalimentação de estado ("state feedback").
- b) Determinar a matriz de ganho do observador L .

Capítulo 18

Considerações Físicas Relativas à Escolha de Parâmetros.

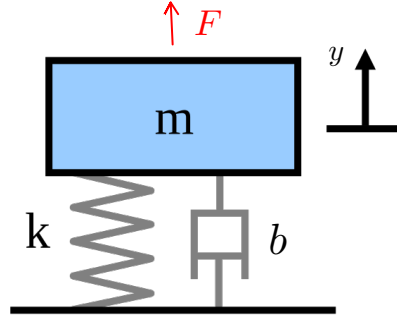
1

18.1 Introdução

Para entender as restrições físicas impostas na escolha de autovalores (matriz de ganho), consideremos o sistema de 2ª ordem:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F \quad (18.1)$$

¹Estas notas foram parcialmente copiadas de diversas fontes encontradas na internet. Elas são de uso exclusivo do curso: MAP2321 Técnicas em Teoria de Controle.



18.2 Autovalores

Os autovalores da equação (1) são determinados por:

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

ou

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

onde:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad \text{é o quadrado da frequência natural}$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = \frac{b}{m \cdot 2\omega_n} \quad (\text{razão de amortecimento} = \text{"damping ratio"})$$

Os autovalores ficam:

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm \frac{\sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

ou

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (18.2)$$

para $\zeta < 1$, o que implica que λ seja complexo.

Observação: Se $\zeta > 1$, o sistema é superamortecido e a análise dinâmica é similar à que fizemos para os sistemas de 1ª ordem.

Escrevendo

$$\lambda = -\nu \pm i\omega = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

temos a parte real e a frequência do auto-valor

$$\nu = \zeta\omega_n \quad \text{e} \quad \omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

A frequência ω é chamada de *frequência do sistema amortecido*.

18.3 Parâmetros de desempenho (da Aula 10).

Para $0 < \zeta < 1$:

$$T = \text{constante de tempo} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega} = \text{tempo do pico} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$M_p = \text{sobressinal} = \exp\left(\frac{-\nu}{\omega}\pi\right) = \exp\left(\frac{-\zeta\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\pi\right) = \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi\right)$$

18.4 Considerações sobre ω_n e ζ

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\text{Rigidez}}{\text{Inércia}}$$

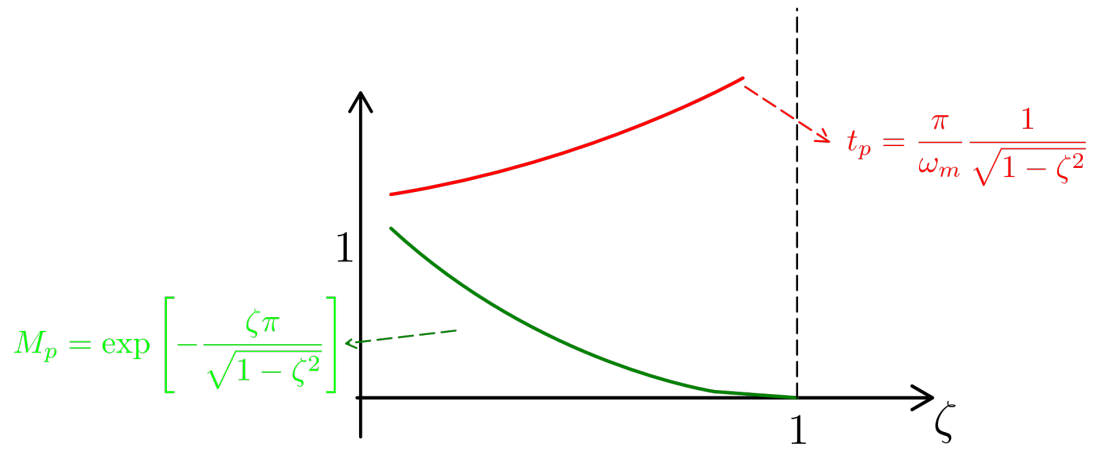
Rigidez é uma característica que geralmente é difícil de ser alterada e é mais fácil de ser estimada teoricamente.

ζ é proporcional a b , que é uma constante muitas vezes difícil de estimar teoricamente. Em geral, b varia com a temperatura e idade.

Conclusão: Na análise dos possíveis autovalores do sistema, é razoável considerar ω_n constante e ζ como variável.

18.5 Gráficos

Os comportamentos de t_p e M_p (definidos no parágrafo 18.3) em função de ζ são antagônicos, enquanto t_p cresce com ζ , M_p decresce, ver Figura.



18.6 Critério Empírico (Ogata página 171)

Ogata, na página 171, propõe (ver texto em anexo) o seguinte critério empírico para a escolha de ζ :

$$0.4 < \zeta < 0.8$$

Usando que (ver parágrafo 18.3)

$$\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{t_p}{T}$$

o critério empírico implica:

•

$$1.4 < \frac{t_p}{T} < 4.2$$

• Usando que $T = \frac{1}{\nu}$ e $t_p = \frac{\pi}{\omega}$, temos

$$0.44 < \frac{\nu}{\omega} < 1.33$$

Observação: $\frac{\nu}{\omega}$ é da ordem de 1 e

$$\frac{\nu}{\omega} = 1 \Rightarrow M_p = e^{-\frac{\nu}{\omega}\pi} = e^{-\pi} \approx 0.043$$

Observação sobre ω : Note que

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

onde ω_n é conhecido da análise do sistema sem dissipação.

Para

$$0.4 < \zeta < 0.8$$

temos

$$0.6\omega_n < \omega < 0.92\omega_n$$

onde $\zeta = 0.8$ corresponde a $0.6\omega_n$ e $\zeta = 0.4$ corresponde a $0.92\omega_n$.