QUOCIENTE NÃO CENTRADO DE DIFERENÇAS E A EXISTÊNCIA DE DERIVADAS

José Reinaldo Riscal

Bolsista do CNPq

Orientadores: *Hamilton Luiz Guidorizzi*

Iracema Martin Bund

Um resultado bastante conhecido é o de que, se uma função f, definida em uma vizinhança da origem, é diferenciável na origem, então o quociente centrado de diferenças converge, ou seja, o limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}$ existe e é igual $f'(0)$. Entretanto, a recíproca, em geral, é falsa e o contra-exemplo é a função $f(x)=|x|$. O que poderíamos dizer a respeito dos quocientes não-centrados de diferenças?

Teorema.

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida em uma vizinhança da origem, contínua na origem, e seja a uma constante tal que $a\neq\pm 1$. Se o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(ah)}{(1-a)h}=L$$

existir, então f será diferenciável na origem.

Prova: Vamos inicialmente, provar o resultado para $L=0$ e $0<a<1$.

Seja $D(a,h)=\frac{f(h)-f(ah)}{(1-a)h}$.

Seja $\varepsilon>0$; como $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(ah)}{(1-a)h}=0$, existe $\delta>0$ tal que:

$$0<|h|<\delta\ \Rightarrow\ \left|\frac{f(h)-f(ah)}{h}\right|<\varepsilon$$

e, portanto, $0 < |h| < \delta \Rightarrow |D(ah)| < \varepsilon$.

Tomando-se $j \geq 1$, teremos:

$$0 < |a^j h| < \delta \Rightarrow |D(a, a^j h)| < \varepsilon$$

e, como $|a^j h| < |h| < \delta$, então

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow |D(a, a^j h)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Vamos provar que, para todo $n \geq 1$, vale a igualdade:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j D(a, a^j h) = \frac{f(h) - f(a^n h)}{(1-a)h}. \tag{2}$$

A prova é obtida mediante a aplicação do Princípio da Indução Finita.

Para $n = 1$, temos

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j D(a, a^j h) = a^o D(a, a^o h) = D(a, h) = \frac{f(h) - f(ah)}{(1-a)h}.$$

Supondo que a relação seja válida para n, para $n+1$ temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{(n+1)-1} a^j D(a, a^j h) &= \sum_{j=0}^{n} a^j D(a, a^j h) = a^n D(a, a^n h) + \sum_{j=0}^{n-1} a^j D(a, a^j h) \\
&= \frac{a^n[f(a^n h) - f(a^{n+1} h)]}{a^n(1-a)h} + \frac{f(h) - f(a^n h)}{(1-a)h} \\
&= \frac{f(h) - f(a^{n+1} h)}{(1-a)h}.
\end{aligned}$$

Isto estabelece a validade de (2).

Da relação (2), utilizando a propriedade triangular escrevemos, para todo $n \geq 1$:

$$\frac{|f(h) - f(a^n h)|}{(1-a)|h|} \leq \sum_{j=0}^{n-1} a^j |D(a, a^j h)|.$$

De (1) vem, para todo $0 < |h| < \delta$ e todo $n \geq 1$:

$$\frac{|f(h) - f(a^n h)|}{(1-a)h} \leq \sum_{j=0}^{n-1} a^j |D(a, a^j h)| < \sum_{j=0}^{n-1} a^j \varepsilon,$$

de onde se conclui que

$$\frac{|f(h) - f(a^n h)|}{(1-a)|h|} \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{n-1} a^j = \frac{\varepsilon(1-a^n)}{(1-a)}.$$

Assim, para $0 < |h| < \delta$ e todo $n \geq 1$, tem-se

$$\frac{|f(h) - f(a^n h)|}{|n|} < \varepsilon.$$

Somando-se e subtraindo-se $f(0)$ no interior do módulo do numerador vem, para todo $0 < |h| < \delta$ e $n \geq 1$

$$\left|\frac{f(h) - f(0) + f(0) - f(a^n h)}{h}\right| = \left|\frac{f(h) - f(a^n h)}{h} - \frac{f(a^n h) - f(0)}{h}\right| < \varepsilon$$

e, novamente usando a propriedade triangular, obtém-se

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| < \varepsilon + \left|\frac{f(a^n h) - f(0)}{h}\right| \tag{3}$$

Agora, vamos escolher um n conveniente.

Fixado n tal que $0 < |h| < \delta$, seja $\delta_1 \in]0, \delta[$ tal que

$$0 < |t| < \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(0)| < \varepsilon|h|.$$

Seja $n_0 = n_0(\delta_1, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $a^{n_0}|h| < \delta_1$. Então

$$n \geq n_0 \Rightarrow a^n|h| < \delta_1 \Rightarrow |f(a^n h) - f(0)| < \varepsilon|h|.$$

Utilizando-se um $n \geq n_0$ fixado em (3), conclui-se que

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| < 2\varepsilon.$$

Esta última relação não depende de n e é, portanto, válida para todo h tal que $0 < |h| < \delta$.

Assim, conclui-se que f é diferenciável na origem, o que completa a prova no caso em que $L = 0$.

Consideremos, agora, $L \neq 0$. Definimos a função $g(x) = f(x) - Lx$.

Daí

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(ah)}{(1-a)h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(ah)}{(1-a)h} = 0$$

e, utilizando-se o resultado anteriormente provado, conclui-se que a função g é diferenciável na origem.

Para o caso em que $a = 0$, a conclusão é imediata:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(ah)}{(1-a)h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0).$$

Para o caso em que $a > 1$, observamos que

$$\lim_{h\to 0} D(a,h) = \lim_{h\to 0} D(a, \frac{h}{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\frac{h}{a}) - f(a)}{(1-a)\frac{h}{a}} = \lim_{h\to 0} D(\frac{1}{a}, h)$$

e recaímos no caso em que $0 < a < 1$.

Finalmente, para o caso em que $a < 0$, basta observar que

$$D(a,h) = \frac{f(h) - f(ah)}{h} = \frac{f(h) - f(-ah)}{(1+a)h} = D(-\frac{1}{a}, -ah)$$

e

$$\lim_{h\to 0} D(a,h) = \lim_{h\to 0} D(-\frac{1}{a}, -ah).$$

O exposto acima é baseado no artigo de P.P.B. Eggermont, intitulado *Noncentral Difference Quotients and the Derivative*, publicado no American Mathematical Monthly, nº 6, vol.95, 1988, pp. 551 a 553.