

TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES

Orientador: Jacques C. Bouchara

Eduardo Tsuyoshi Ochiai

Célio Amino

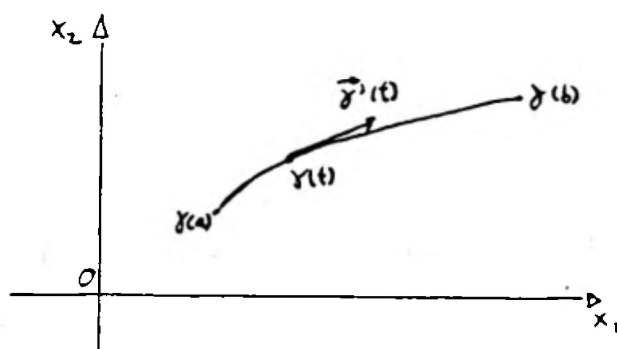
I. Curvas no plano

Neste estudo diferencial das curvas planas, há uma série de propriedades a serem exigidas das mesmas. Em particular, elas devem ser diferenciáveis continuamente até a 3a. ordem, i.e., devem ser de classe C^3 .

Para essas curvas, pode-se definir o referencial de Frenet, um "referencial móvel" ortonormal ao longo da curva, no qual as propriedades da mesma são melhor analisadas localmente. Seja a curva γ definida assim:

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

x_1, x_2 funções C^3 .



Nessa curva, definimos o vetor velocidade

$$\vec{\gamma}'(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t).$$

Se $\|\vec{\gamma}'(t)\| = v(t) \neq 0$ em γ , a curva é regular. Nesse caso, pode-se reparametrizar a curva para que o módulo da velocidade seja unitário:

$$\|\vec{\gamma}'(s)\| = 1$$

$$\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s)))$$

(L : comprimento da curva).

Esse parâmetro s é o *comprimento de arco*.

Nessa parametrização, define-se o referencial de Frenet:

$$\begin{cases} \vec{T}(s) = \vec{\gamma}'(s) \\ \vec{N}(s) = \text{rotação de } +90^\circ \text{ de } \vec{T}(s) \end{cases}$$

Esses vetores satisfazem as *equações de Frenet*:

$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = k(s)\vec{N}(s) \\ \vec{N}'(s) = -k(s)\vec{T}(s) \end{cases} \quad (1)$$

onde $k(s)$ é chamada *curvatura* de $\gamma(s)$.

Observe-se que, por γ ser C^3 , $k'(s)$ existe e é contínua.

Além disso, há uma fórmula simples para $k(s)$:

$$k(s) = \theta'(s)$$

onde $\theta(s)$ é o ângulo entre o vetor $\vec{T}(s)$ e o eixo Ox_1 .

Uma curva plana é *fechada* se $\gamma(0) = \gamma(L)$. Se γ é C^3 , é claro que os vetores $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$, a função $k(s)$ e sua derivada $k'(s)$ devem ser contínuos.

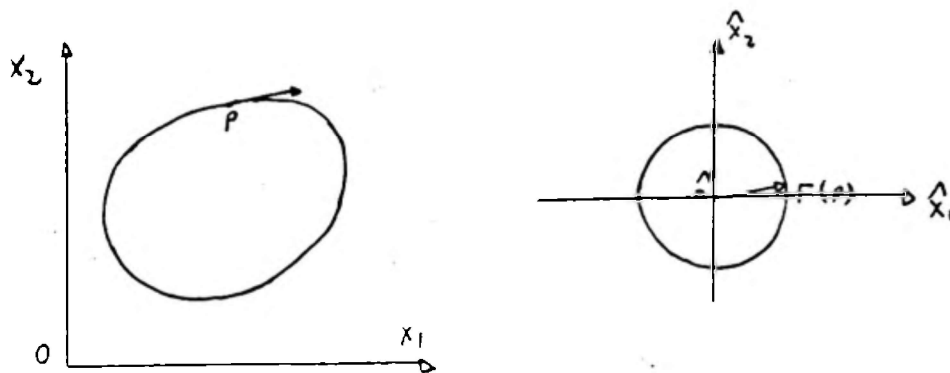
Uma curva fechada *simples* é tal que $\gamma(s_1) \neq \gamma(s_2)$, $s_1 \neq s_2$, exceto se $s_1 = 0$ e $s_2 = L$. Ela é *convexa* se quaisquer dois pontos internos a ela podem ser unidos por uma reta pertencente ao interior da curva. Pode-se demonstrar que:

Lema 1. Uma curva C^3 regular, simples e fechada com $k \neq 0$ é convexa. (Prova: Su Buchim, "Lectures on Differential Geometry", pp.10-12.)

A convexidade da curva garante, em particular, que qualquer reta só a corta em dois pontos.

II. Aplicação de curvas convexas na circunferência

Definimos uma aplicação que leva uma curva γ , na qual está definido o referencial de Frenet, na circunferência de raio 1:



Ela é definida:

$$F: \gamma \rightarrow C / F(\gamma(s)) = \hat{O} + \vec{T}(s) \quad 0 \leq s \leq L$$

($\hat{O}$: origem do sistema $\hat{x}_1, \hat{x}_2$).

Lema 2. A transformação F definida acima é sobrejetora, para curvas fechadas.

Prova. A função $\theta(s)$, definida anteriormente, é contínua, para curvas com referencial de Frenet bem definido e fechadas. Além disso, se $s = 0$ é o ponto em que $\theta = 0$, pela continuidade de $\vec{T}(s)$ vê-se que $\theta = 2\pi$ em $s = L$, que é o mesmo ponto, em γ , que $s = 0$. Logo, como $\theta(s)$ é contínua, assume todos os valores entre 0 e $2\pi \Rightarrow F$ é sobrejetora. ■

Observe-se que, nesse caso, pode-se garantir que para todo ponto M de γ existe N tal que o vetor tangente em N é oposto ao vetor tangente em M . A unicidade vem pelo

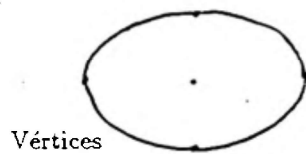
Lema 3. A transformação F definida acima é *biunívoca*, para curvas convexas.

Prova. Se a curva é convexa, $k > 0$ (ou < 0 , dependendo da orientação). Logo, $\theta'(s) = k(s) > 0$. Isto é: $\theta(s)$ é monotonicamente crescente $\Rightarrow$ como $F(\gamma(s)) = \hat{O} + \vec{T}(s)$,

e o ângulo entre $\vec{T}(s)$ e Ox_1 é $\theta(s)$, F é biunívoca. ■

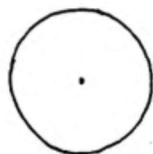
Definição. *Vértice* é um ponto, numa curva, em que a curvatura k é máxima ou mínima localmente ($k' = 0$).

Ex.:



Vértices

Elipse



Círculo: todos os pontos são vértices.

Teorema dos 4 Vértices

(Mukhopadhyaya, 1909).

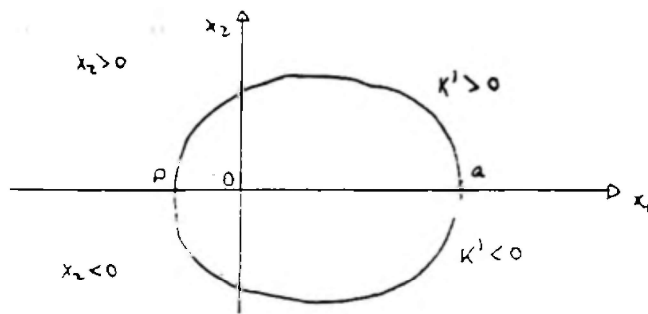
Seja γ uma curva C^3 , regular, fechada, simples e convexa. Então γ tem no mínimo 4 vértices.

Apresentamos primeiramente uma prova clássica (J. Stoker, "Differential Geometry").

Prova 1. Como $K(s)$ é continuamente diferenciável, pois $\gamma(s)$ é C^3 , pode-se definir a derivada $K'(s) = \theta''(s)$ ($\theta(s)$ definido anteriormente).

Como K' é contínua, assumindo o mesmo valor em $s = 0$ e $s = L$, pelo teorema de Bolzano ela deve se anular um número par de vezes no intervalo $0 \leq s \leq L$. Logo, o número de vértices ($K' = 0$) deve ser *par*, e *não* pode ser zero, pois a função $K(s)$ é contínua e definida num compacto $\Rightarrow$ tem máximo e mínimo. Suponhamos então, por absurdo, que $\gamma(s)$ tenha ≥ 2 vértices.

Pela convexidade de γ , pode-se definir o eixo X_1 como passando pelos pontos P e Q , onde $K' = 0$, os vértices:



de tal modo que, como K' só deve mudar de sinal duas vezes, ela seja positiva para $X_2 > 0$ e negativa para $X_2 < 0$.

Claramente, a integral

$$\int_0^L X_2(s)K'(s)ds$$

é diferente de zero, pois $X_2K' > 0$ acima e abaixo do eixo X_2 .

Mas, calculando diretamente,

$$\begin{aligned} \int_0^L X_2(s)K'(s)ds &= \int_0^L X(s)_2\theta''(s)ds = \\ &= [X_2(s)\theta'(s)]_0^L - \int_0^L X_2'(s)\theta'(s)ds \end{aligned}$$

Como $X_2(0) = X_2(L) = 0$, a parte integrada é zero. Além disso,

$$X_2'(s) = \text{sen } \theta(s) \quad (\text{def. de } \bar{T}(s)).$$

$$\text{Portanto } \int_0^L X_2(s)K'(s)ds = \int_0^L (-\text{sen } \theta(s))\theta'(s)ds = [\cos \theta(s)]_0^L = 0.$$

Isso é uma contradição. Logo, o número de vértices deve ser maior que 2, ou seja, 4.

Como a elipse, por exemplo, tem 4 vértices, o número mínimo de vértices *realmente* é 4.

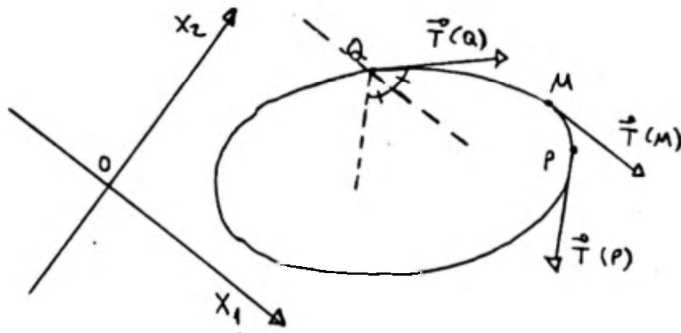
■

Nosso grupo de iniciação científica elaborou uma prova que, a nosso ver, torna um pouco mais natural a introdução de uma integral para encontrar a contradição no argumento de redução ao absurdo, usando a transformação F definida anteriormente (II).

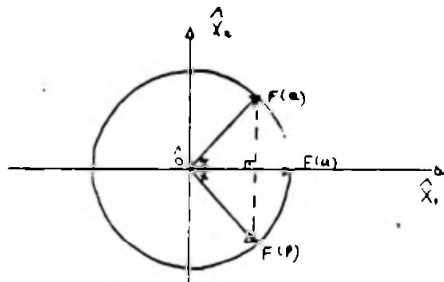
Prova 2. Seja a curva $\gamma \subset \mathbb{C}^3$, fechada, simples e convexa. Então, pelos lemas 2 e 3, a imagem de γ sob F é a circunferência C de raio 1, inteira, biunivocamente.

Para provar que o número de vértices deve ser par, suponhamos que $s = 0$ seja o ponto de curvatura máxima. Se observamos que $K = \theta'(s)$ é a velocidade da curva e (imagem de γ , $F(\gamma)$), e $\frac{dK}{ds} = \theta''(s)$ é a sua aceleração, vemos que, se o número de vértices fosse ímpar, θ'' mudaria de sinal um número ímpar de vezes entre $s = 0$ e $s = L$. Mas isso implicaria que θ' estivesse diminuindo para $s \rightarrow L$, o que é uma contradição, pois $\theta'(0) = \theta'(L)$ é máxima em $\gamma(0)$.

Suponhamos, então, que haja 2 vértices, já que deve haver vértices para que $K(s) = \theta'(s)$ seja contínua. Sejam P e Q os pontos de curvatura máxima e mínima, respectivamente.



Na figura acima escolhemos o ponto M , entre P e Q , tal que o ângulo entre $\vec{T}$ em $M (= \vec{T}(M))$ e $\vec{T}(P)$ seja igual a menos o ângulo entre $\vec{T}(M)$ e $\vec{T}(Q)$, e que certamente pode ser feito, e escolhemos eixos X_1, X_2 tais que $\vec{T}(M)$ é paralelo a OX_1 . Se aplicamos a γ a aplicação F , e expressamos a imagem no mesmo sistema de coordenadas X_1, X_2 :



$(F(P))$ é simétrico a $F(Q)$ em relação ao eixo X_1 .

A curva $\hat{\gamma}(s)$, imagem de γ sob F , é então escrita:

$$\hat{\gamma}(s) = F(\gamma(s)) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s)) = (\hat{X}_1(s), \hat{X}_2(s)).$$

Como $\hat{X}_1'(s) = -(\sin \theta(s)) \cdot \theta'(s)$,

$$\hat{X}_1(L) - \hat{X}_1(0) = - \int_0^L \theta'(s) \sin \theta(s) ds \quad (2)$$

Mas, como $\hat{\gamma}(0) = F(\gamma(0))$, $\hat{\gamma}(L) = F(\gamma(L))$ e $\gamma(0) = \gamma(L)$, $\hat{X}_1(L) = \hat{X}_1(0)$ e portanto $\hat{X}_1(L) - \hat{X}_1(0) = 0$.

A integral à direita em (2), no entanto, não é zero. Para ver isso, notemos que $\theta'(s) = K(s)$ aumenta de $F(Q)$ a $F(P)$ e diminui de $F(P)$ a $F(Q)$ (sentido positivo em $\hat{\gamma}$).

Portanto, $K(s)$ é maior acima do eixo X_1 , isto é, para pontos simétricos em relação ao eixo X_1 a curvatura é maior para o ponto com $X_2 > 0$. O $\sin \theta(s)$ é positivo acima do eixo X_1 e negativo abaixo, e para pontos simétricos seu valor absoluto é o mesmo. Logo, a integral em (2) não pode ser nula. Isso é uma contradição, portanto deve haver mais do que 2 vértices, ou seja, pelo menos 4. Como a elipse, por ex., tem exatamente 4, o mínimo é realmente 4. ■