



22nd IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN
ENGINEERING
2nd Brazilian Congress on Computational
Mechanics



NOVEMBER 7-9, 2001
Campinas, SP
Brazil

Configuração mínima PC:

IBM PC compatível 486DX2 66Mhz, com 8 Mb de RAM, CD-ROM: 4X, SVGA em 640 x 256 cores

Sistema: Windows 3.1 ou superior

Configuração mínima MAC:

CPU 68040, com 8 Mb de RAM, CD-ROM 4X

Sistema: MAC OS 7.5.3 ou superior

Instruções para Instalação:

Caso o sistema operacional seja Windows 95 ou 98 o CD abrirá automaticamente na página inicial dos Anais, se for Windows 3.1 ou 3.11 instale em seu computador o Acrobat Reader 3.0, seguindo como descrito abaixo.

No CD, abrir o diretório **ACROBAT**.

Escolher o sistema (Win ou Mac)

Usar **32BITS** para Windows 95 ou 98 e **16BITS** para Windows 3.1 ou 3.11.

Obs: Para Windows 3.1 ou 3.11 utilizar o diretório **3.01**.

Executar o arquivo na pasta correspondente, seguindo as instruções.

Concluída a instalação, localizar o arquivo CILAMCE.pdf no CD e executá-lo, para entrar na página inicial dos Anais.

Minimum PC Configuration:

IBM PC compatible 486DX2 66Mhz with 8 Mb of RAM, 4X CD-ROM, SVGA 640x800x256 colors

Operating System: MS-Windows 3.1 or higher

Minimum MAC Configuration:

CPU 68040 with 8 Mb of RAM, 4X CD-ROM

Operating System: MAC OS 7.5.3 or higher

Installation Procedure:

For Windows 95 or 98: The CD-ROM will automatically startup the Annals Initial Page.

For Windows 3.1 or 3.11: Please, install the Acrobat Reader 3.0 following the steps below. From the CD ROM, go to the ACROBAT directory, select the 32BITS directory for Windows 95/98 or the 16BITS directory for Windows 3.1/3.11 (Note: for Windows 3.1 or 3.11 use the 3.01 directory).

Execute the installation file from the selected folder, following its instructions.

When the installation is done, find and double-click on the CILAMCE icon to startup

ISBN 85-902253-1-3



Produzido por:



Monferrer Produções Ltda
Fone/Fax: (11) 4127-6763
E-mail: monferrer@uol.com.br



**22nd IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN
ENGINEERING**

2nd Brazilian Congress on Computational Mechanics
NOVEMBER 7-9, 2001
Campinas, SP - Brazil

**ANÁLISES NUMÉRICAS DE LAJES ENRIJECIDAS CONSIDERANDO A
EXCENTRICIDADE ENTRE NERVURAS E PLACA**

Dias, Ricardo H.

Paiva, João B.

Giongo, José S.

Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Estruturas

Cx. P. 359 – 13560-970 – São Carlos, SP, Brasil

D541a

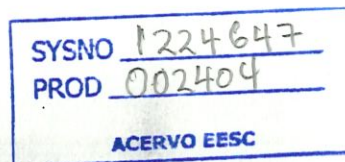
Resumo. *Este trabalho apresenta informações sobre o comportamento à flexão de lajes nervuradas (ou lajes enrijecidas por nervuras) procedendo-se às análises numéricas, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando diferentes modelos mecânicos submetidos às mesmas condições de vinculação e carregamento. O fator principal de análise é a influência da excentricidade existente entre os eixos das nervuras e o plano médio da placa, usualmente negligenciada (ou considerada de forma simplificada) no cálculo estrutural de lajes enrijecidas.*

A excentricidade foi considerada de duas formas nos modelos numéricos: por meio da utilização de elemento finito de viga tridimensional (discretizando as nervuras) que aceita "offsets" rígidos entre o centróide do elemento e o nó que o localiza no plano da placa e também por meio de modelagem tridimensional, onde discretizou-se tanto a placa quanto as nervuras com elementos finitos de casca. Foi utilizado o software ANSYS 5.5 nas modelagens numéricas, e considerado sempre um regime elástico-linear do material constituinte da estrutura.

A análise dos resultados indicou variabilidade de acordo com o modelo adotado, em termos de esforços solicitantes e deslocamentos. A total desconsideração da excentricidade nas análises levou a uma subestimada rigidez do pavimento, mostrando a importância da análise aplicando a exata localização dos enrijecedores em modelos de lajes nervuradas fletidas.

Palavras-chaves: *Lajes elásticas enrijecidas, Enrijecedores excêntricos, Flexão, MEF*

1224647
050302



1. INTRODUÇÃO

As lajes nervuradas, ou lajes enrijecidas por nervuras, tiveram origem em 1854 quando o inglês William Boutland Wilkinson obteve patente de um sistema em que a rigidez da laje era aumentada através da inserção de vazios utilizando-se moldes regularmente espaçados e separados por nervuras. Criou-se, dessa forma, um sistema estrutural de pavimento com comportamento elástico intermediário entre placa e grelha, econômico e que possibilitou um melhor aproveitamento arquitetônico oferecido pelo aumento de vãos livres.

Pelo uso cada vez mais crescente dos sistemas de lajes nervuradas na engenharia civil vê-se a necessidade de um claro entendimento das diversas possibilidades de análise estrutural, comparando os processos simplificados com os mais especializados em busca de resultados mais próximos da realidade.

Assim, com a alta capacidade de processamento atualmente disponível pelos computadores aplicada a resolução de métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF) começa a ser viável a consideração de fatores usualmente negligenciados nas análises, buscando os resultados mais próximos possíveis do comportamento real dessas estruturas.

Um dos fatores usualmente desconsiderados (ou considerados de forma simplificada) nas análises numéricas é a excentricidade existente entre os eixos das vigas e o plano médio da placa. O problema desta interação placa-viga é importante nos sistemas de lajes nervuradas devido ao grande número de nervuras que participam na rigidez global da estrutura e que, dessa forma, não devem ter sua contribuição subestimada pela total desconsideração das excentricidades existentes.

Neste trabalho a excentricidade foi considerada de duas formas nos modelos numéricos: por meio da utilização de elemento finito de viga tridimensional (discretizando as nervuras) que aceita *offsets* rígidos entre o centróide do elemento e o nó que o localiza no plano da placa e também por meio de modelagem tridimensional, onde discretizou-se tanto a placa quanto as nervuras com elementos finitos de casca. Foi utilizado o software ANSYS 5.5 nas modelagens numéricas e malhas refinadas objetivando eliminar a questão acerca da interferência do grau de refinamento na análise. Considerou-se sempre modelos em regime elástico-linear do material constituinte da estrutura.

2. HIPÓTESES ADOTADAS

Em todos os modelos aplicados neste trabalho são válidas as hipóteses e considerações:

- (a) os materiais constituintes são elásticos-lineares, homogêneos e isotrópicos;
- (b) os enrijecedores são prismáticos e têm pelo menos uma simetria de seção;
- (c) a análise é de primeira ordem geométrica;
- (d) todos os carregamentos foram aplicados ortogonalmente ao plano médio da placa;
- (e) as deformações transversais por cisalhamento são negligenciadas nas análises.

3. DESCRIÇÃO DOS MODELOS EM MEF

Em muitas formulações para a análise de lajes enrijecidas por nervuras (ou análise da interação placa-viga) um fator relevante é a consideração da excentricidade que existe entre o eixo longitudinal da nervura e o plano médio da laje, conforme Fig. 1.

Contudo, na prática de projetos estruturais civis o que se vê é a negligência desta excentricidade, de acordo com a Fig. 2, ou a sua consideração de forma implícita e simplificada

(considerações de seções “T”) mesmo dispondo-se de softwares comerciais de análise de estruturas em *MEF* que aceitam a consideração da excentricidade do enrijecedor em relação à placa, seja através de elementos finitos apropriados ou recursos do tipo *mestre-escravo*, dependendo apenas do usuário a sua consideração ou não.

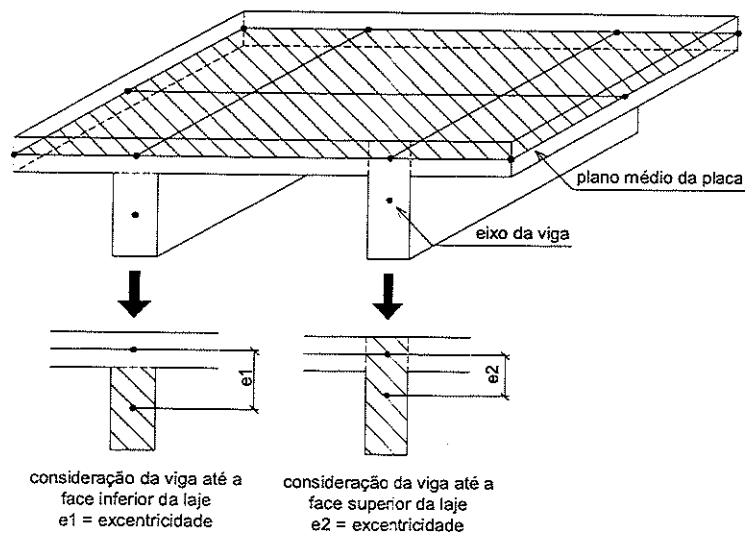


Figura 1: Consideração da excentricidade entre mesa e alma

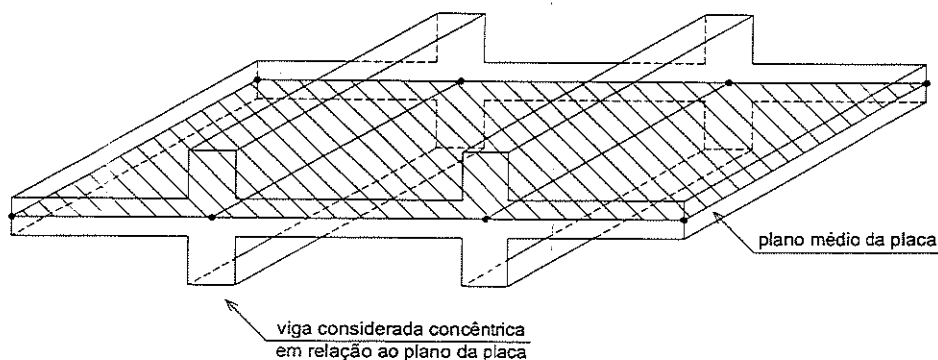


Figura 2: Negligência da excentricidade entre mesa e alma

Neste trabalho aplicou-se, para comparação com resultados mais precisos, modelo que desconsiderou totalmente a influência da excentricidade entre as peças.

Neste modelo, chamado de **Modelo 01**, as nervuras foram discretizadas por elemento finito de viga elástica de dois nós, com seis graus de liberdade por nó, chamado de *BEAM4* e disponível no software ANSYS 5.5, concêntrico ao plano médio da placa. A placa foi modelada utilizando elemento finito de casca elástica de quatro nós, com seis graus de liberdade por nó, chamada de *SHELL63* e disponível no ANSYS 5.5, trabalhando à flexão e tensão. A representação esquemática do **Modelo 01** pode ser visualizada na Fig. 3.

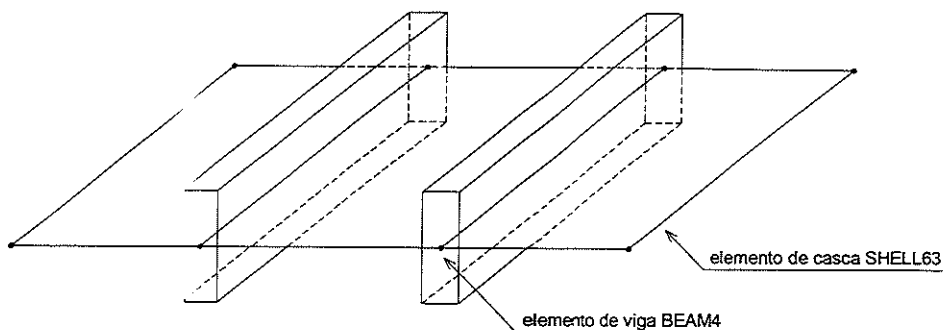


Figura 3: Representação esquemática do Modelo 01

Neste trabalho as modelagens mais realistas em Método do Elementos Finitos aplicará a excentricidade de duas maneiras:

(a) discretização da placa em elementos finitos de casca elástica *SHELL63* disponível no ANSYS 5.5, aliada a uma modelagem das nervuras utilizando um elemento de viga elástica tridimensional com dois nós, dois graus de liberdade por nó, chamado de *BEAM44*, disponível no ANSYS 5.5 e que permite a criação de *offsets* rígidos para definir a localização do centróide da seção em relação à localização do nó do elemento. Dessa forma, o elemento linear foi lançado no próprio plano dos elementos de casca e, internamente, aceita a excentricidade.

A partir dessa modelagem fez-se duas considerações acerca da excentricidade, criando dois modelos similares: **Modelo 02**, onde a excentricidade é aplicada tomando-se a altura da viga até a face superior da placa, conforme representação esquemática apresentada na Fig. 4 e **Modelo 03**, onde a excentricidade é aplicada tomando-se a altura da viga até a face inferior da placa, modelo que tem sua representação esquemática apresentada na Fig. 5.

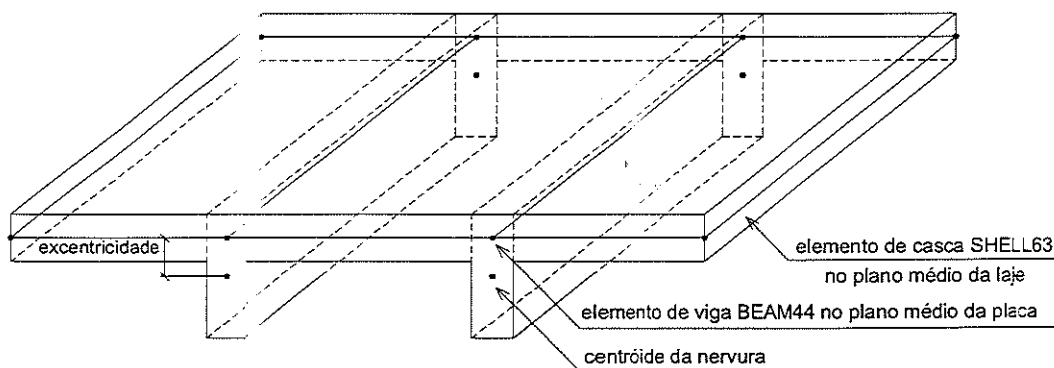


Figura 4: Representação esquemática do Modelo 02

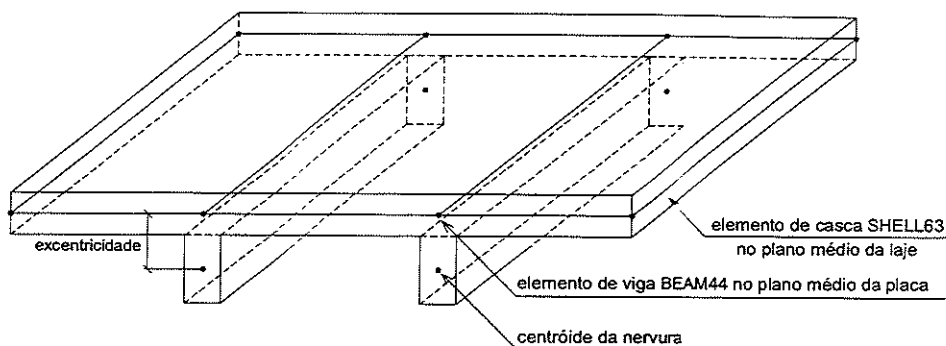


Figura 5: Representação esquemática do Modelo 03

(b) modelagem da placa e das nervuras por elemento finito de casca elástica *SHELL63* tendo-se assim o comportamento gerado pela excentricidade entre as peças de forma natural. Também será aplicado este modelo considerando as nervuras concêntricas ao plano médio, para comparação. Neste modelo, chamado de **Modelo 04**, nenhuma simplificação é feita quanto ao comportamento da seção depois de fletida. A representação do **Modelo 04** pode ser vista na Fig. 6.

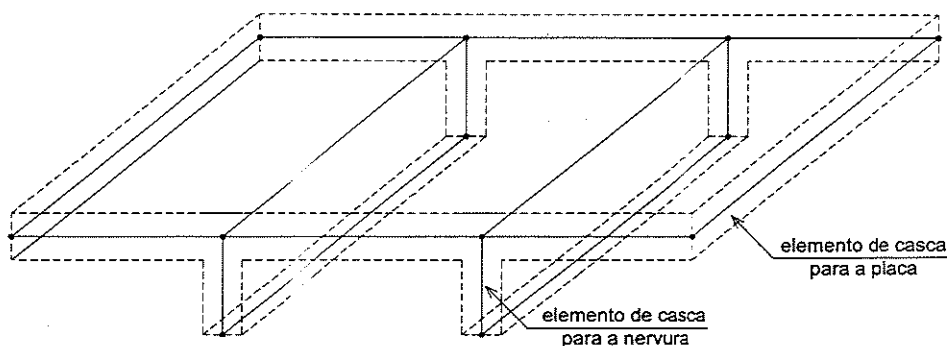


Figura 6: Representação esquemática do Modelo 04

4. ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS NAS ANÁLISES NUMÉRICAS

Os elementos finitos disponíveis no software ANSYS 5.5 e utilizados nas análises são apresentados a seguir:

4.1 Elemento finito de barra elástica tridimensional *BEAM4*

É um elemento uniaxial com capacidade de trabalhar à tração, compressão, torção e flexão. Tem seis graus de liberdade para cada nó: translações nodais nas direções x, y e z, além de rotações em torno dos eixos cartesianos.

A geometria do elemento é apresentada na Fig. 7.

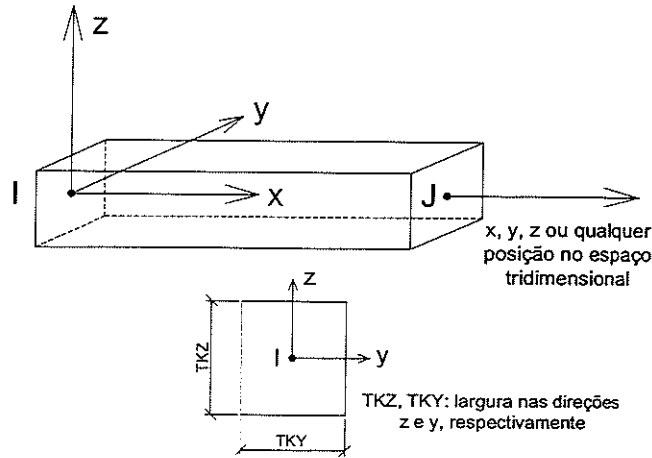


Figura 7: Geometria do elemento *BEAM4*

Os resultados apresentados após o processamento podem ser de duas maneiras:

- (a) deslocamentos nodais, e todas as soluções nodais associadas;
- (b) esforços nos elementos.

As funções aproximadoras dos deslocamentos u , v , w e θ_x são apresentadas abaixo, com os índices referindo-se à Fig. 8.

$$u = \frac{1}{2} \cdot [u_I \cdot (1-s) + u_J \cdot (1+s)] \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{2} \left[v_I \left(1 - \frac{s}{2} \cdot (3-s^2) \right) + v_J \left(1 + \frac{s}{2} \cdot (3-s^2) \right) \right] + \frac{L}{8} \cdot [\theta_{z,I} \cdot (1-s^2) \cdot (1-s) - \theta_{z,J} \cdot (1-s^2) \cdot (1+s)] \quad (2)$$

$$w = \frac{1}{2} \left[w_I \left(1 - \frac{s}{2} \cdot (3-s^2) \right) + w_J \left(1 + \frac{s}{2} \cdot (3-s^2) \right) \right] - \frac{L}{8} \cdot [\theta_{y,I} \cdot (1-s^2) \cdot (1-s) - \theta_{y,J} \cdot (1-s^2) \cdot (1+s)] \quad (3)$$

$$\theta_x = \frac{1}{2} \cdot [\theta_{x,I} \cdot (1-s) + \theta_{x,J} \cdot (1+s)] \quad (4)$$

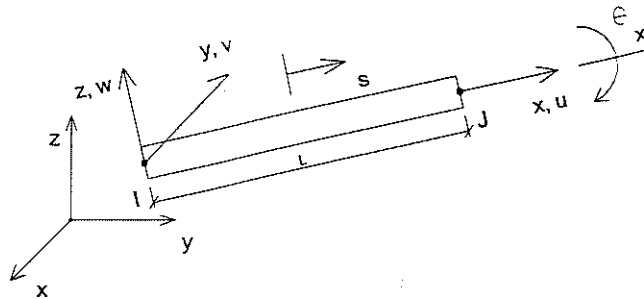


Figura 8: Parâmetros das funções de deslocamentos do elemento *BEAM4*

4.2 Elemento finito de barra elástica tridimensional *BEAM44*

É um elemento uniaxial com capacidade de trabalhar à tração, compressão, torção e flexão. Tem seis graus de liberdade para cada nó: translações nas direções x , y e z , além de rotações em torno dos eixos cartesianos. Permite a consideração de diferentes geometrias não-simétricas para cada nó, além da possibilidade de considerar excentricidades.

A geometria do elemento é apresentado na Fig. 9.

Os resultados apresentados após o processamento podem ser de duas maneiras:

- (a) deslocamentos nodais, e todas as soluções nodais associadas;
- (b) esforços nos elementos.

As funções aproximadoras dos deslocamentos u , v , w e θ_x para o elemento *BEAM44* são as mesmas utilizadas no elemento finito *BEAM4*, com os índices referindo-se à Fig. 10.

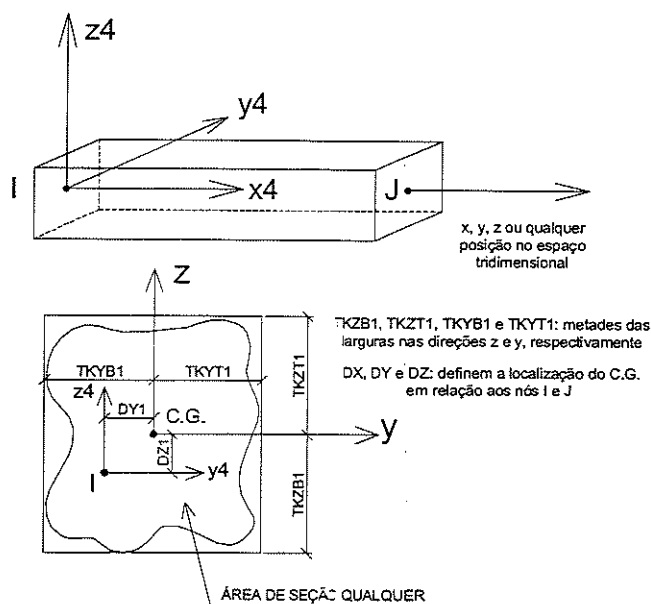


Figura 9: Geometria do elemento *BEAM44*

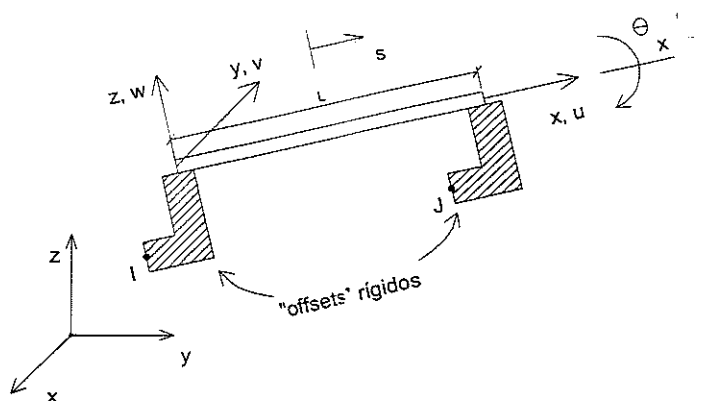


Figura 10: Parâmetros das funções de deslocamentos do elemento finito *BEAM44*

4.3 Elemento finito de casca *SHELL63*

É um elemento finito de casca elástica com resistência à flexão e de membrana que permite a consideração de carregamentos no plano do elemento e transversalmente ao mesmo. Tem seis graus de liberdade para da nó: translações nodais nas direções x, y e z, além de rotações em torno dos eixos cartesianos.

Pode apresentar formato quadrangular ou triangular, de acordo com a Fig. 11 e é indicado para ser aplicado a cascas não-curvas.

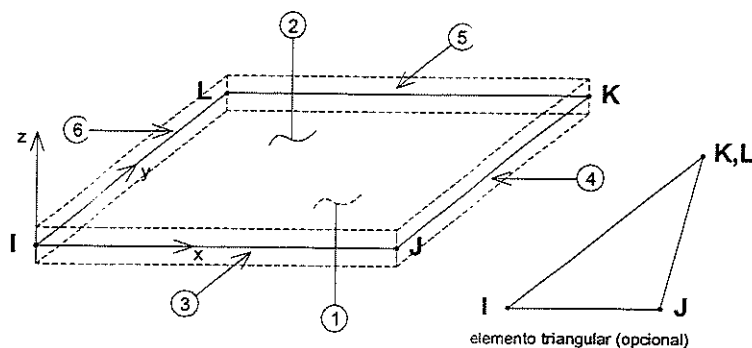


Figura 11: Elemento *SHELL63*

Os resultados apresentados após o processamento podem ser de duas maneiras:

- (a) deslocamentos nodais, e todas as soluções nodais associadas;
- (b) esforços nos elementos.

O efeito de membrana do elemento é considerado através das funções aproximadoras dos deslocamentos u e v , apresentadas abaixo, com os índices referindo-se à Fig. 12, utilizando-se seis pontos de integração dentro do elemento, ou seja, deixando-se ativo o recurso de incluir mais dois pontos extras, garantindo assim uma convergência mais rápida com menor discretização:

$$u = \frac{1}{4} \left[u_I (1-s)(1-t) + u_J (1+s)(1-t) + u_K (1+s)(1+t) + u_L (1-s)(1+t) + u_1 (1-s^2) + u_2 (1-t^2) \right] \quad (5)$$

$$v = \frac{1}{4} \left[v_I (1-s)(1-t) + v_J (1+s)(1-t) + v_K (1+s)(1+t) + v_L (1-s)(1+t) + v_1 (1-s^2) + v_2 (1-t^2) \right] \quad (6)$$

O efeito da flexão é considerado através da subdivisão do elemento quadrilátero em quatro subtriângulos, onde cada um destes utilizam as funções de forma do elemento finito *DKT* (*Discrete Kirchhoff Triangle*), que segundo BATOZ *et al.* (1980) é adequado para a análise de flexão de placas delgadas.

O elemento finito *DKT* possui três graus de liberdade por nó, sendo uma translação segundo o eixo global cartesiano z e duas rotações em torno dos eixos cartesianos y e z , que formam o plano em que está contido o elemento.

Na Teoria de Kirchhoff a parcela da energia de deformação relativa ao esforço cortante é desprezível quando comparada à energia de deformação por flexão.

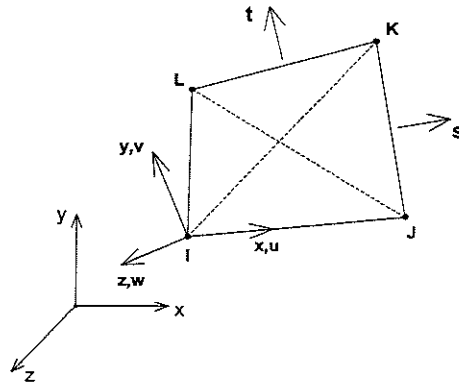


Figura 12: Parâmetros das funções de deslocamentos do elemento *SHELL63*

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresentam-se os resultados do processamento de placas enrijecidas por nervuras utilizando-se os modelos em *MEF*, comparando-os com outros disponíveis em bibliografia.

5.1 Placas enrijecidas por nervuras conforme Rossow & Ibrahimkhalil (1978), Bedair (1997) e Tanaka & Bercin (1998)

Rossow & Ibrahimkhalil (1978) aplicaram o Método da Restrição (ou *Constraint Method*) para a análise estática em *MEF* de lajes enrijecidas com nervuras excêntricas e concêntricas. Analisaram numericamente duas lajes enrijecidas sob carregamento transversal estático inicialmente estudadas por McBeam (1968) e Chang (1973) *apud* Rossow & Ibrahimkhalil (1978): uma laje quadrada contendo uma nervura e outra retangular enrijecida por duas nervuras ortogonais, no centro da placa.

Bedair (1997) mostra uma metodologia em Programação Quadrática Sequencial (SQP) e analisa numericamente, entre outras, as duas placas sob carga estática.

Tanaka & Bercin (1998) aplicaram o Método dos Elementos de Contorno à análise de flexão estática das mesmas placas enrijecidas por nervuras.

Os exemplos são agora analisados com os modelos concêntricos e excêntricos utilizando o ANSYS 5.5.

(a) Placa quadrada simplesmente apoiada enrijecida por uma nervura

A geometria da placa analisada é mostrada na Fig. 13.

Foram considerados os seguintes dados de entrada para a resolução do problema:

- carga uniformemente distribuída: $q = 0,000689 \text{ kN/cm}^2$;
- módulo de elasticidade: $E = 11713 \text{ kN/cm}^2$;
- coeficiente de Poisson: $\nu = 0,30$;

Os resultados de deslocamentos no ponto central da laje, obtidos pelas análises numéricas, são apresentados na Tabela 1 e comparados com resultados numéricos disponíveis na literatura para o mesmo exemplo.

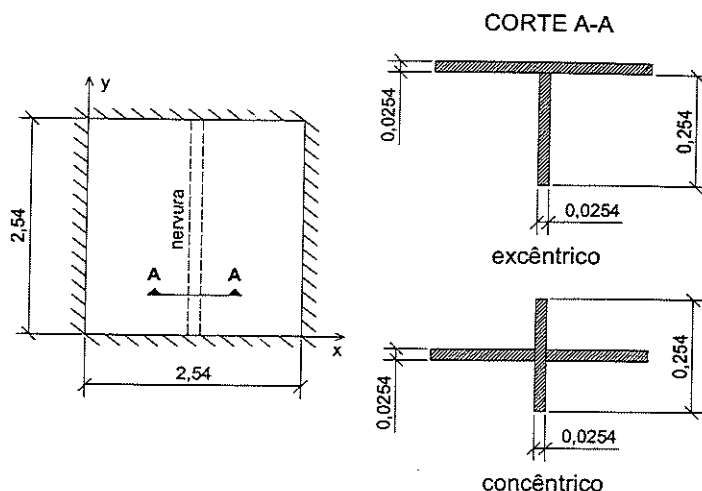


Figura 13: Geometria da placa enrijecida, em cm

Tabela 1: Deslocamentos do centro da placa, em cm

Análise numérica	Excêntrico	Concêntrico
McBeam (1968) <i>apud</i> Rossow & Ibrahimkhalil	0,0003472	0,0011575
Rossow & Ibrahimkhalil (1978)	0,0003472	0,0011572
NASTRAN por Rossow & Ibrahimkhalil	0,0003607	-
Bedair (1997)	0,0003048	0,0011151
Tanaka & Bercin (1998)	0,0003140	0,0011470
Modelo 01	-	0,0011562
Modelo 02	0,0003342	-
Modelo 03	0,0003357	-
Modelo 04	0,0003660	0,0011804

Analisando-se a Tabela 1 verificou-se que:

- há discrepância de valores de deslocamentos no centro da placa entre os modelos numéricos excêntricos deste trabalho de no máximo 9,52%, com o Modelo 04 apresentando o maior deslocamento;
- os modelos 02 e 03 apresentaram valores praticamente iguais de deslocamento máximo;
- os modelos excêntricos deste trabalho apresentaram resultados razoavelmente próximos daqueles obtidos pelos modelos numéricos de pesquisas anteriores;
- o modelo concêntrico apresentou diferença máxima de 3,69%, em relação ao apresentado por Bedair (1997);
- a maior diferença entre os modelos excêntricos e concêntricos deste trabalho, no deslocamento máximo, foi de 253,20%.

A Tabela 2 apresenta os valores de deslocamentos verticais ao longo do eixo central da nervura, de acordo com os resultados dos modelos numéricos. A Figura 14 apresenta o gráfico comparativo desses deslocamentos.

Tabela 2: Deslocamentos verticais ao longo do eixo da nervura, em cm x 10⁻⁴

Ponto	Modelo 01	Modelo 02	Modelo 03	Modelo 04	
				Excêntrico	Concêntrico
0	0	0	0	0	0
0,254	3,615	1,055	1,060	1,162	3,700
0,508	6,851	1,996	2,006	2,192	7,005
0,762	9,391	2,730	2,744	2,992	9,595
1,016	11,008	3,192	3,207	3,494	11,240
1,270	11,562	3,342	3,358	3,657	11,804

Analisando-se a Tabela 2 verificou-se que:

- os modelos concêntricos apresentaram resultados próximos de deslocamentos verticais ao longo da nervura, diferindo no máximo 2,10% no ponto de maior deslocamento;
- os modelos excêntricos apresentaram discrepância máxima de 9,43% no deslocamento máximo ao longo da nervura, sendo o Modelo 04 o mais flexível.

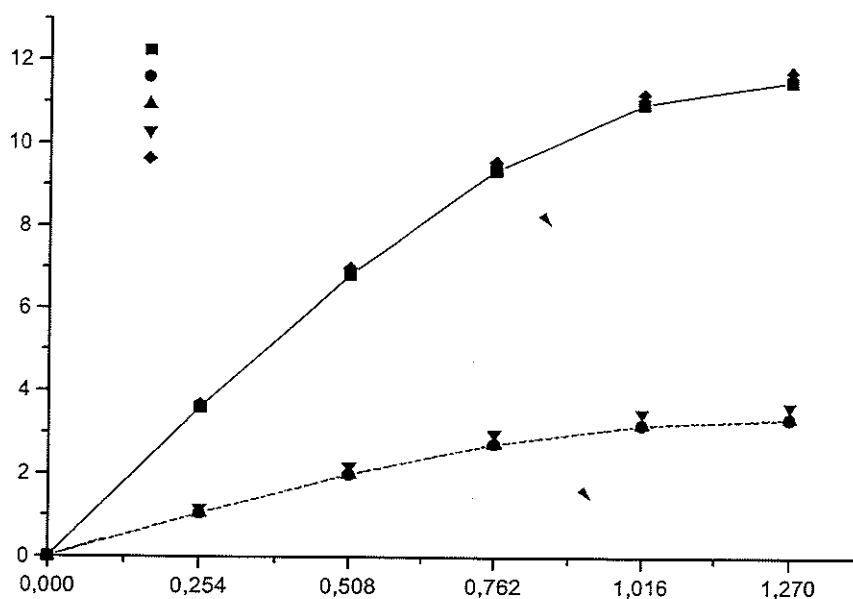


Figura 14: Deslocamentos verticais ao longo do eixo da nervura, em cm x 10⁻⁴

A Tabela 3 apresenta os valores de deslocamentos verticais na linha central e ortogonal ao eixo da nervura, de acordo com os resultados numéricos. A Figura 15 apresenta o gráfico comparativo desses deslocamentos.

Analisando-se a Tabela 3 verificou-se que:

- os modelos excêntricos 02 e 03 apresentaram resultados próximos de deslocamentos verticais na linha central ortogonal à nervura, diferindo no máximo 0,48% no ponto de maior deslocamento.

Tabela 2: Deslocamentos verticais ao longo do eixo da nervura, em $\text{cm} \times 10^{-4}$

Ponto	Modelo 01	Modelo 02	Modelo 03	Modelo 04	
				Excêntrico	Concêntrico
0	0	0	0	0	0
0,254	3,615	1,055	1,060	1,162	3,700
0,508	6,851	1,996	2,006	2,192	7,005
0,762	9,391	2,730	2,744	2,992	9,595
1,016	11,008	3,192	3,207	3,494	11,240
1,270	11,562	3,342	3,358	3,657	11,804

Analisando-se a Tabela 2 verificou-se que:

- os modelos concêntricos apresentaram resultados próximos de deslocamentos verticais ao longo da nervura, diferindo no máximo 2,10% no ponto de maior deslocamento;
- os modelos excêntricos apresentaram discrepância máxima de 9,43% no deslocamento máximo ao longo da nervura, sendo o Modelo 04 o mais flexível.

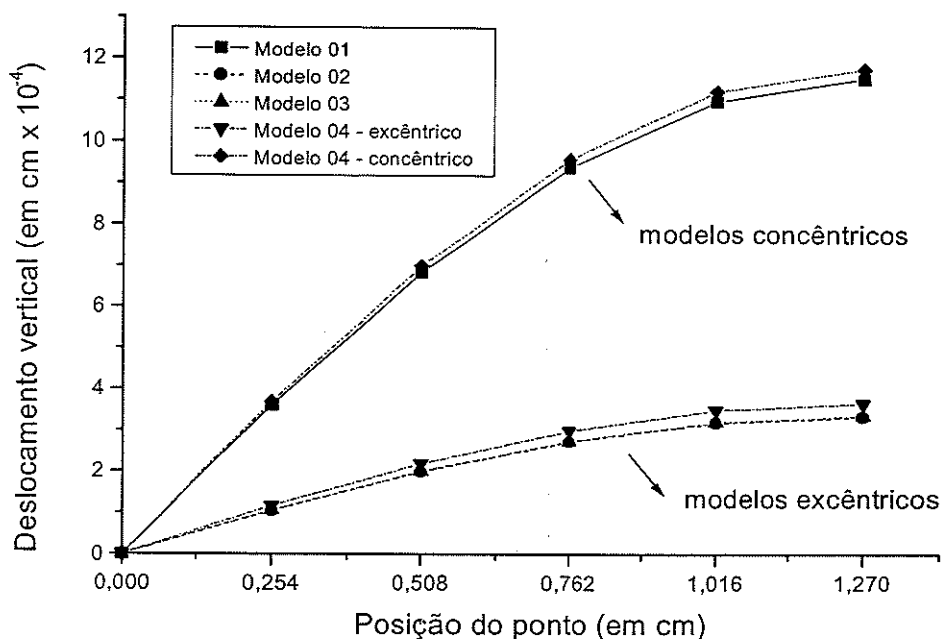


Figura 14: Deslocamentos verticais ao longo do eixo da nervura, em $\text{cm} \times 10^{-4}$

A Tabela 3 apresenta os valores de deslocamentos verticais na linha central e ortogonal ao eixo da nervura, de acordo com os resultados numéricos. A Figura 15 apresenta o gráfico comparativo desses deslocamentos.

Analisando-se a Tabela 3 verificou-se que:

- os modelos excêntricos 02 e 03 apresentaram resultados próximos de deslocamentos verticais na linha central ortogonal à nervura, diferindo no máximo 0,48% no ponto de maior deslocamento.

Tabela 3: Deslocamentos verticais ao longo da linha central ortogonal ao eixo da nervura, em cm $\times 10^{-4}$

Ponto	Modelo 01	Modelo 02	Modelo 03	Modelo 04	
				Excêntrico	Concêntrico
0	0	0	0	0	0
0,254	6,641	4,429	4,434	4,516	6,707
0,508	11,215	6,889	6,897	7,057	11,344
0,762	12,950	6,742	6,754	6,982	13,134
1,016	12,416	4,787	4,802	5,081	12,642
1,270	11,562	3,342	3,358	3,657	11,804

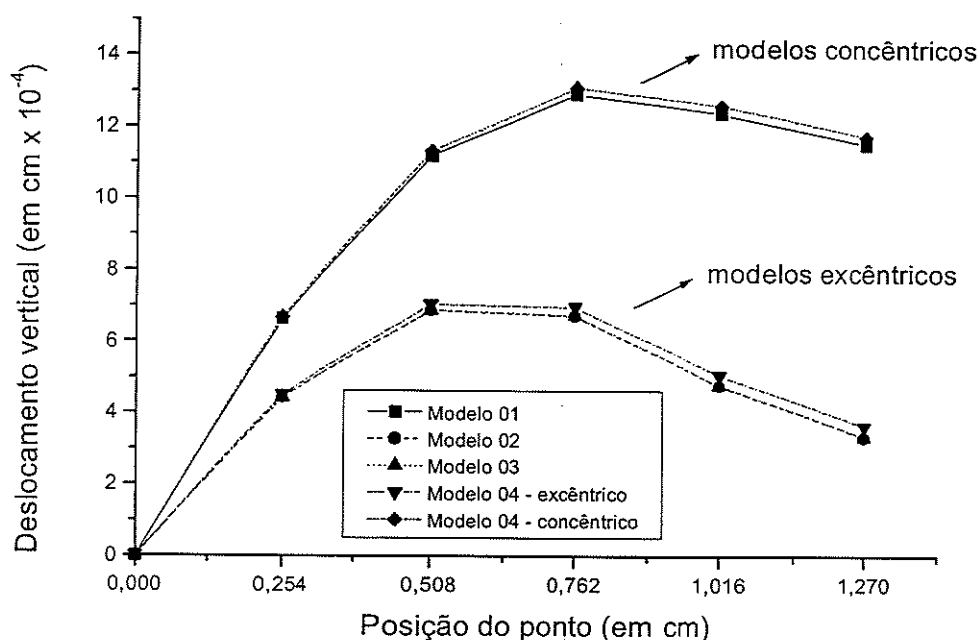


Figura 15: Deslocamentos verticais na linha central ortogonal à nervura, em cm $\times 10^{-4}$

(b) Placa retangular simplesmente apoiada, com dois enrijecedores ortogonais de alturas diferentes

A placa, cuja geometria é mostrada na Fig. 16, está submetida ora a carga distribuída, ora a carga concentrada.

Foram considerados os seguintes dados de entrada para a resolução do problema:

- carga uniformemente distribuída: $q = 0,00689 \text{ kN/cm}^2$;
- carga pontual concentrada aplicada no centro da placa: $P = 4,45 \text{ kN}$;
- módulo de elasticidade: $E = 20670 \text{ kN/cm}^2$;
- coeficiente de Poisson: $\nu = 0,30$.

As Tabelas 4 e 5 apresentam os deslocamentos verticais máximos no ponto central da laje encontrados pela análise numérica dos modelos, obtidos respectivamente pelo carregamento uniformemente distribuído e pelo carregamento pontual.

Tabela 4: Deslocamentos do centro da placa, sob carga uniforme, em cm

Análise numérica	Excêntrico	Concêntrico
Chang (1973) <i>apud</i> Rossow & Ibrahimkhalil	0,02285	0,06116
Rossow & Ibrahimkhalil (1978)	0,02248	0,06122
NASTRAN por Rossow & Ibrahimkhalil	0,02213	-
STRU DL por Rossow & Ibrahimkhalil	-	0,06126
Bedair (1997)	0,02032	0,06096
Modelo 01	-	0,06108
Modelo 02	0,02090	-
Modelo 03	0,02120	-
Modelo 04	0,02551	0,06121

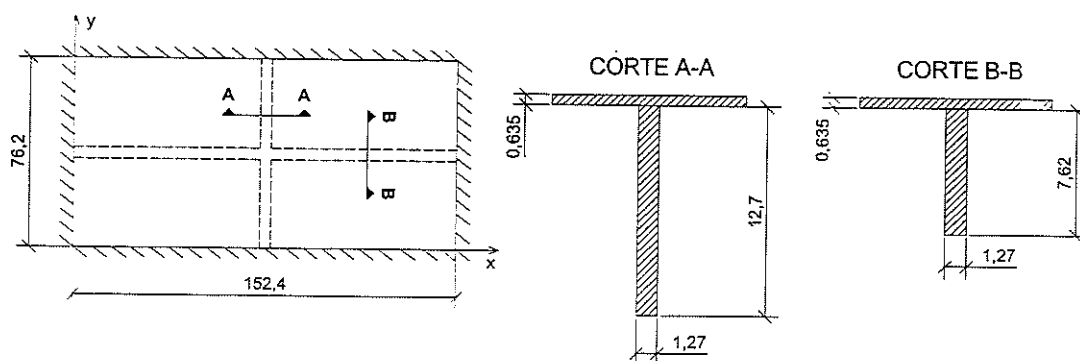


Figura 16: Geometria da placa ortogonalmente enrijecida, em cm

Pela Tabela 4 verifica-se, sobre o deslocamento no centro da placa sob carga distribuída, que:

- os modelos excêntricos 02 e 03, devido à semelhança de hipóteses em relação aos modelos numéricos de outros autores, apresentaram os resultados mais próximos destes;
- o modelo excêntrico 04 foi o mais flexível dentre os modelos excêntricos;
- todos os modelos numéricos concêntricos apresentaram resultados muito próximos, diferindo no máximo 0,49%;
- a maior diferença entre os deslocamentos excêntricos e concêntricos deste trabalho foi de 192,87%.

Tabela 5: Deslocamentos do centro da placa, sob carga pontual central, em cm

Análise numérica	Excêntrico	Concêntrico
Chang (1973) <i>apud</i> Rossow & Ibrahimkhalil	0,003165	0,008799
Rossow & Ibrahimkhalil (1978)	0,003226	0,008788
NASTRAN por Rossow & Ibrahimkhalil	0,003150	-
STRU DL por Rossow & Ibrahimkhalil	-	0,008796
Bedair (1997)	0,002845	0,008534
Modelo 01	-	0,008807
Modelo 02	0,002950	-
Modelo 03	0,002987	-
Modelo 04	0,003778	0,008939

De acordo com a Tabela 5 pode-se verificar, em relação ao deslocamento vertical no centro da placa submetida a carregamento concentrado pontual, que:

- entre os modelos numéricos excêntricos deste trabalho houve um desvio máximo de 28,1%, sendo o Modelo 04 o mais flexível e o Modelo 02 o mais rígido;
- entre os modelos excêntricos com maiores semelhanças de formulação e hipóteses (modelos de outros autores e Modelo 02 e 03) a maior diferença foi de 13,40%;
- a maior diferença entre os modelos excêntricos e concêntricos deste trabalho foi de 203,02%.

As Tabelas 6 e 7 apresentam os valores de deslocamentos verticais ao longo do eixo central da maior nervura, respectivamente para carga uniformemente distribuída e carregamento concentrado. As Figuras 17 e 18 comparam os resultados desses deslocamentos.

Tabela 6: Deslocamentos verticais ao longo do eixo da maior nervura, em $\text{cm} \times 10^{-2}$, para carregamento uniformemente distribuído

Ponto	Modelo 01	Modelo 02	Modelo 03	Modelo 04	
				Excêntrico	Concêntrico
0	0	0	0	0	0
15,24	5,610	1,837	1,871	2,194	5,394
30,48	8,990	3,025	3,085	3,619	8,691
45,72	9,318	3,196	3,262	3,884	9,133
60,96	7,503	2,592	2,643	3,224	7,509
76,20	6,108	2,090	2,120	2,551	6,121

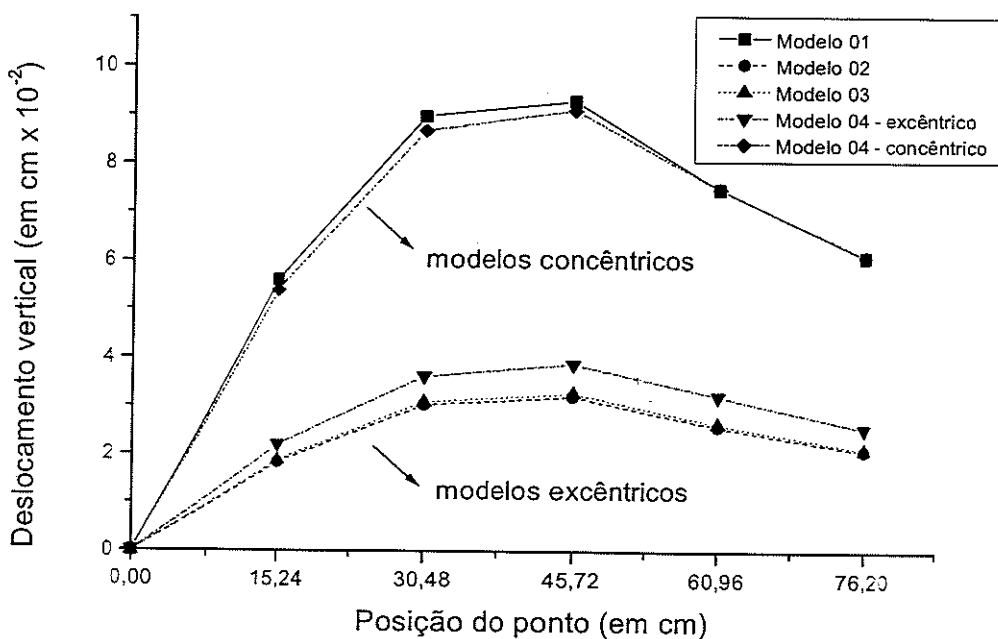


Figura 17: Deslocamentos verticais ao longo do eixo da maior nervura, em $\text{cm} \times 10^{-2}$, para carregamento uniformemente distribuído

Tabela 7: Deslocamentos verticais ao longo do eixo da maior nervura, em $\text{cm} \times 10^{-3}$, para carregamento concentrado

Ponto	Modelo 01	Modelo 02	Modelo 03	Modelo 04	
				Excêntrico	Concêntrico
0	0	0	0	0	0
15,24	2,561	0,902	0,918	1,100	2,575
30,48	4,932	1,734	1,764	2,120	4,960
45,72	6,915	2,400	2,439	2,951	6,959
60,96	8,289	2,818	2,859	3,495	8,355
76,20	8,807	2,950	2,987	3,778	8,939

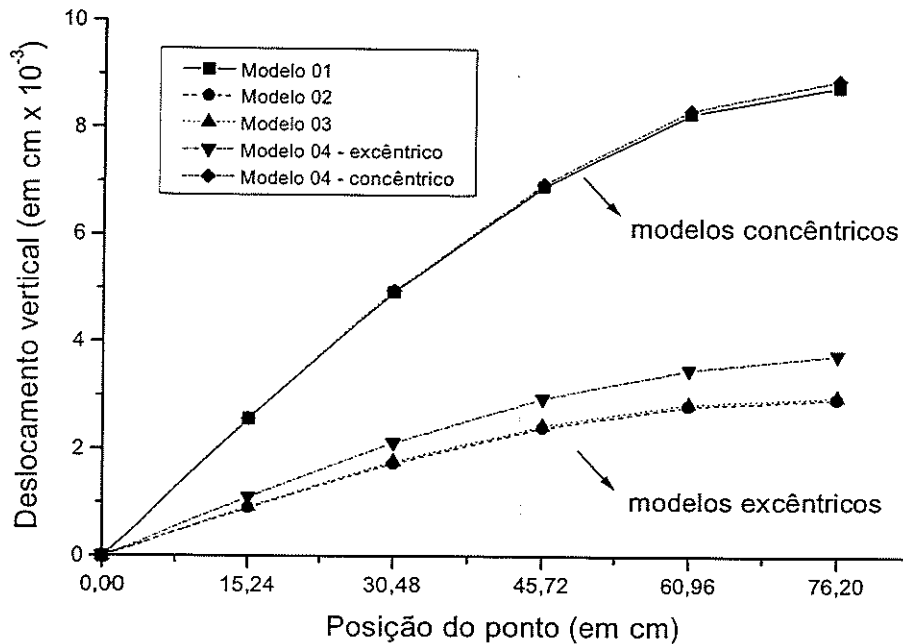


Figura 18: Deslocamentos verticais ao longo do eixo da maior nervura, em $\text{cm} \times 10^{-3}$, para carregamento concentrado

5.2 Placa enrijecida por nervuras, em acrílico, conforme Carrijo & Paiva (1997)

A partir dos resultados experimentais obtidos por Carrijo & Paiva (1997) para uma placa de acrílico enrijecida por nervuras ortogonais fez-se a análise dos modelos numéricos.

A geometria do modelo reduzido pode ser verificada na Fig. 19. Este foi apoiado nos quatro cantos e submetido a um carregamento uniformemente distribuído.

Considerou-se os seguintes dados de entrada para a resolução numérica do problema:

- carga uniformemente distribuída: $q = 0,000096 \text{ kN/cm}^2$;
- módulo de elasticidade do acrílico: $E = 250 \text{ kN/cm}^2$;
- coeficiente de Poisson do acrílico: $\nu = 0,36$;

Os pontos de medição da análise experimental podem ser verificados na Fig. 19.

A Tabela 8 abaixo apresenta os valores dos deslocamentos transversais obtidos experimentalmente e numericamente nos pontos de medição, podendo-se verificar que:

- o modelo concêntrico de análise superestimou os deslocamentos na placa, já que subestimou a rigidez gerada pela excentricidade das nervuras; em relação ao resultado do maior deslocamento do ensaio de Carrijo & Paiva (1997) o modelo concêntrico apresentou um erro de 140,84%;

- os modelos excêntricos 02 a 04 comportaram-se aproximadamente iguais, com a maior diferença para o ponto de maior deslocamento de 3,68%, sendo o mais rígido o Modelo 02 e o mais flexível o Modelo 04.

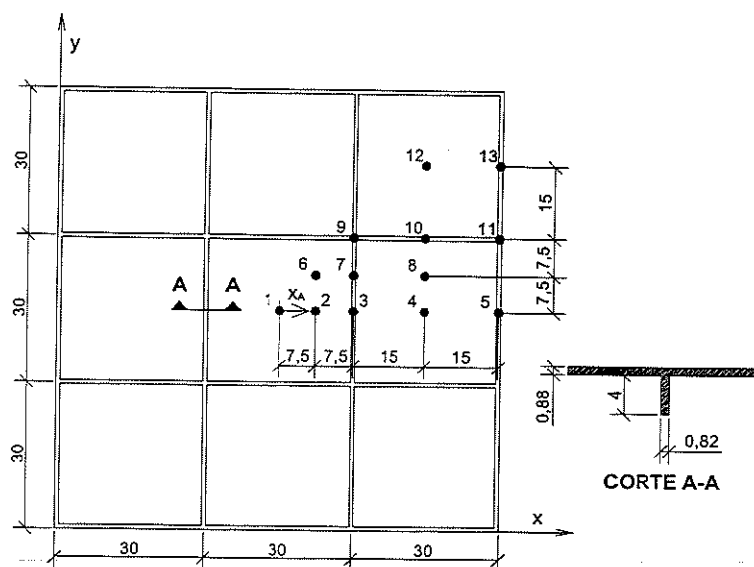


Figura 19: Geometria e pontos de instrumentação, medidas em cm
[Carrijo & Paiva (1997)]

Tabela 8: Deslocamentos transversais (em cm x 10⁻¹) obtidos experimentalmente e numericamente na placa

Ponto	Ensaio	Modelos de análise			
		01	02	03	04
01	6,22	14,98	6,25	6,30	6,48
02	6,13	14,75	6,13	6,19	6,29
03	5,86	14,13	5,87	5,93	6,08
04	4,80	12,05	5,14	5,19	5,37
05	3,15	8,99	3,96	4,01	4,21
06	6,11	14,61	6,08	6,14	6,16
07	5,87	13,91	5,79	5,85	5,96
08	4,67	11,77	5,01	5,06	5,18
09	5,72	13,29	5,57	5,63	5,76
10	4,54	11,01	4,68	4,73	4,90
11	3,77	7,83	3,44	3,49	3,68
12	3,72	8,33	3,66	3,70	3,80
13	2,60	4,51	1,95	1,98	2,12

A Tabela 9 abaixo apresenta os valores de deslocamentos transversais obtidos ao longo da nervura do corte A-A da Fig. 19, de $y = 0$ até o centro da placa enrijecida, ou seja, $y = 45$ cm.

Tabela 9: Deslocamentos transversais (em cm x 10^{-1}) obtidos ao longo da nervura

Ponto y (em cm)	Modelo de cálculo			
	01	02	03	04
0	7,83	3,59	3,63	3,68
6	9,16	4,09	4,13	4,19
12	10,42	4,56	4,61	4,67
18	11,56	4,99	5,03	5,10
24	12,52	5,35	5,39	5,46
30	13,29	5,63	5,68	5,76
36	13,82	5,83	5,88	5,95
42	14,09	5,93	5,98	6,07
45	14,09	5,93	5,98	6,07

Analisando-se a Tabela 9, que mostra os deslocamentos transversais obtidos numericamente ao longo da nervura A-A, verificou-se que:

- o maior deslocamento obtido no modelo concêntrico, 14,09 mm, é 137,61% maior que o menor deslocamento máximo obtido pelos modelos excêntricos, 5,93 mm, encontrado no Modelo 02;

- os resultados apresentados pelos modelos excêntricos 02 a 04 estão muito próximos, diferindo no máximo 2,36% no ponto de maior deslocamento.

A Figura 20 representa os deslocamentos obtidos ao longo da nervura, por meio das modelagens numéricas deste trabalho, de acordo com a Tabela 9.

Apresentam-se também os resultados de momentos fletores obtidos numericamente ao longo do centro da placa, segundo a linha iniciada pela coordenada x_A da Fig. 19, nos pontos 01 a 05 da experimentação. Nas Tabelas 10 e 11 comparam-se os resultados obtidos pelos modelos de cálculo com aqueles apresentados por Carrijo & Paiva (1997), obtidos experimentalmente usando o Método das Diferenças Finitas.

Tabela 10: Momentos fletores M_x ao longo de x_A (em kN.cm/cm x 10^{-3})

Ponto x_A (em cm)	Modelo				
	Ensaio	01	02	03	04
0,0	7,00	17,86	7,60	7,62	7,69
7,5	6,25	16,01	6,85	6,88	6,97
15,0	4,50	11,73	2,47	2,51	2,66
30,0	7,00	13,10	6,36	6,40	6,49
45,0	0,50	6,55	1,36	1,33	1,32

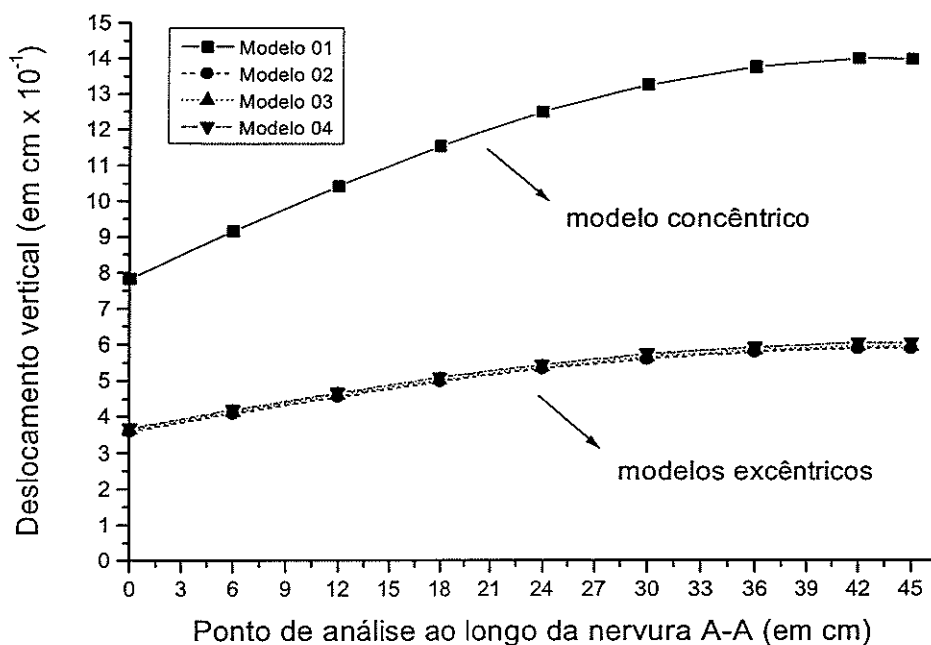


Figura 20: Deslocamentos verticais ao longo da nervura A-A, em cm x 10⁻¹

Tabela 11: Momentos fletores M_y ao longo de x_A (em kN.cm/cm x 10⁻³)

Ponto x_A (em cm)	Modelo				
	Ensaio	01	02	03	04
0,0	7,25	17,86	7,50	7,53	7,69
7,5	4,88	16,82	6,29	6,98	7,19
15,0	1,25	15,18	4,90	4,94	5,23
30,0	9,00	18,44	8,56	8,61	8,81
45,0	4,88	17,11	7,21	7,03	7,20

Apresentam-se nas Figuras 21 e 22 os gráficos comparativos entre os valores de momentos fletores obtidos ao longo da linha iniciada em x_A , de acordo com as Tabelas 10 e 11.

Analisando-se os momentos fletores ao longo da linha x_A verifica-se que os modelos excêntricos apresentaram os melhores resultados numéricos, com tendência e valores muito próximos ao resultado experimental de Carrijo & Paiva (1997). Os resultados apresentados pelo modelo concêntrico diferem excessivamente do resultado experimental.

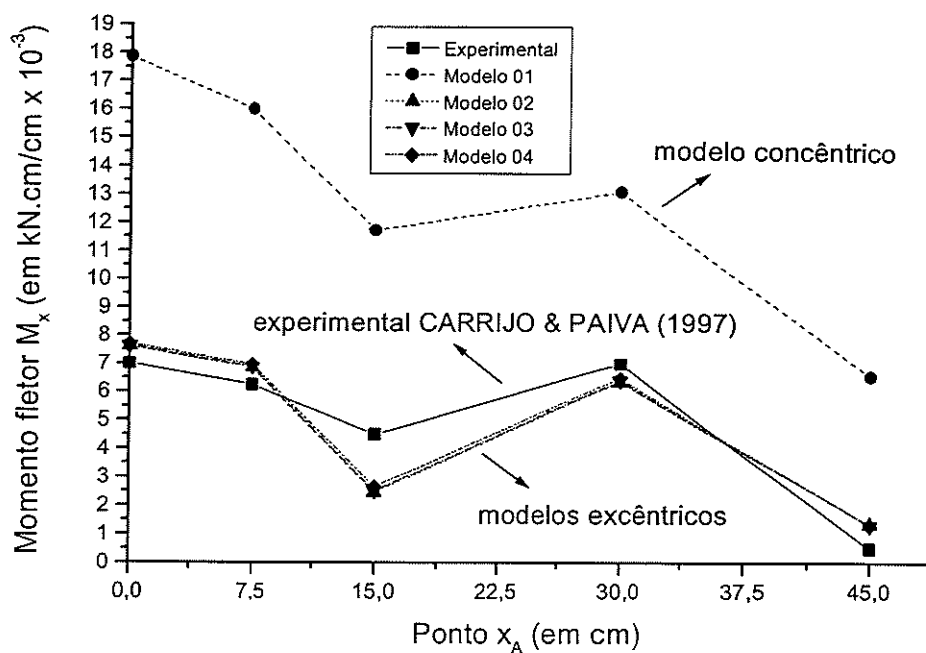


Figura 21: Momentos fletores M_x ao longo de x_A (em $\text{kN.cm/cm} \times 10^{-3}$)

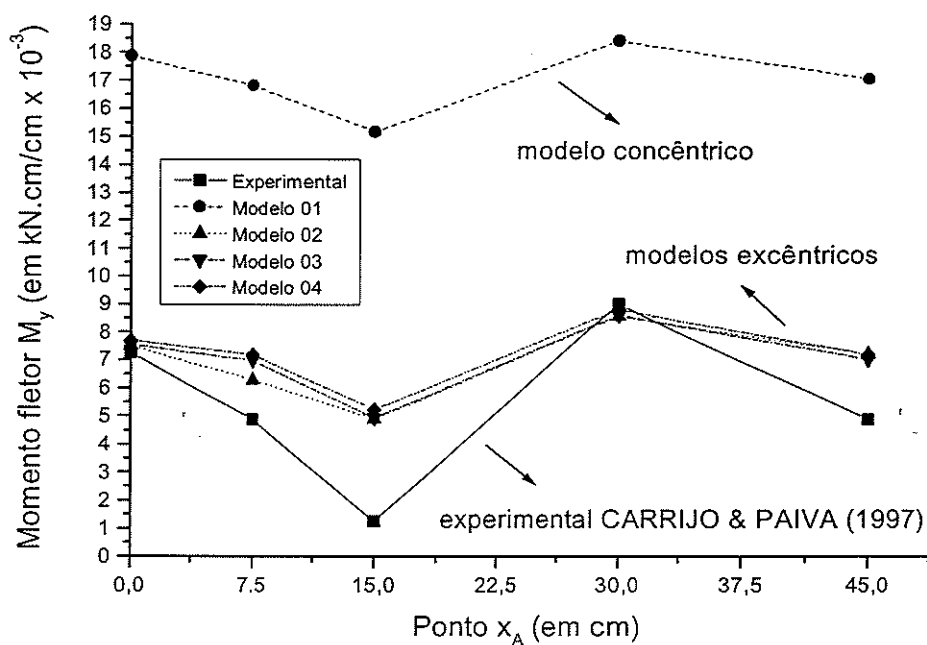


Figura 22: Momentos fletores M_y ao longo de x_A (em $\text{kN.cm/cm} \times 10^{-3}$)

6. CONCLUSÕES

A análise estrutural de pavimentos de edifícios por meio de métodos numéricos constitui-se, atualmente, em uma rotina nos escritórios de projeto, devido principalmente à possibilidade de modelagem da estrutura considerando a interação de todas as peças participantes da rigidez do pavimento. Assim, considerar a excentricidade entre as nervuras e plano médio da laje da forma mais realista possível, em lajes nervuradas, é de certa forma acessível aos profissionais de escritório, principalmente com a utilização de softwares comerciais de *MEF*.

Pelos resultados apresentados nas modelagens numéricas verificou-se que a total descon sideração da excentricidade entre nervuras e placa subestima a rigidez do pavimento, o que afasta os resultados numéricos dos experimentais (ou respostas reais da estrutura). O modelo concêntrico, dessa forma, nunca deve ser adotado na análise estrutural. As modelagens excêntricas (Modelos 02 a 04) mostraram-se muito próximas do resultado experimental de Carrijo & Paiva (1997) e, nas análises teóricas, todas apresentam praticamente os mesmos resultados. Dentre elas, a modelagem por meio de elementos de casca discretizando tanto a placa quanto as nervuras apresentou-se com maior flexibilidade.

BIBLIOGRAFIA

- Carrijo, E. C. & Paiva, J. B., 1997, Estudo numérico e experimental da interação placa-viga, Anais do V Encontro Nacional de Mecânica Computacional, Universidade do Minho – Guimarães, Portugal, vol. 1, pp. 759-764.
- Bedair, O. K., 1997, Analysis of stiffened plates under lateral loading using Sequential Quadratic Programming (SQP), Computers & Structures, vol. 62, n. 1, pp. 63-80.
- Rossow, M. P. & Ibrahimkhalil, A. K., 1978, Constraint method analysis of stiffened plates, Computers & Structures, vol. 8, pp. 51-60.
- Tanaka, M. & Bercin, A. N., 1998, Static bending analysis of stiffened plates using the Boundary Element Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 21, pp. 147-154.