

**Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**  
**Departamento de Engenharia de Telecomunicações**  
**e Controle**

ISSN 1517-3550

**BT/PTC/0104**

---

**Método de Diferenças Temporais**  
**Aplicado às Equações de Riccati**  
**Acopladas entre Si**

---

**Julio C. C. Aya**  
**Oswaldo L. V. Costa**

**São Paulo – 2001**

O presente trabalho é um resumo da tese de doutorado apresentada por Julio C. C. Aya, sob orientação do Prof. Dr. Oswaldo L. V. Costa.: "Método de Diferenças Temporais para Sistemas com Saltos Markovianos", defendida em 04/12/00, na Escola Politécnica.

A íntegra da tese encontra-se à disposição com o autor e na Biblioteca de Engenharia de Eletricidade da Escola Politécnica/USP.

#### FICHA CATALOGRÁFICA

Aya, Julio C. C.

Método de diferenças temporais aplicado às equações de Riccati acopladas entre si / J.C.C. Aya, O.L.V. Costa. – São Paulo : EPUSP, 2001.

12 p. – (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle, BT/PTC/0104)

1. Diferenças temporais 2. Equações de Riccati 3. Cadeias de Markov I. Costa, Oswaldo Luiz do Valle II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle III. Título IV. Série  
ISSN 1517-3550

CDD 519.55  
515.352  
519.233

# Método de Diferenças Temporais Aplicado às Equações de Riccati Acopladas entre Si

Oswaldo L. V. Costa<sup>\*,†</sup>

Julio C.C. Aya<sup>†</sup>

Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

CEP: 05508 900 São Paulo SP Brazil

oswaldo@lac.usp.br, julio@lac.usp.br

## Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma técnica iterativa para calcular a solução maximal de um conjunto de equações algébricas de Riccati acopladas entre si (EARA) a tempo discreto, baseada no método de diferença temporal. As EARA estão relacionadas ao controle ótimo de sistemas lineares com saltos Markovianos e tem sido estudadas extensivamente nos últimos anos. Traçaremos um paralelo com a teoria de algoritmos de diferenças temporais para processos de decisão Markovianos para desenvolver um algoritmo iterativo dependente de um parâmetro  $\lambda \in [0, 1]$  para a solução maximal das EARA. Para o caso especial onde  $\lambda = 1$  e  $\lambda = 0$  temos a situação na qual os algoritmos se reduzem à iteração das equações de diferenças de Riccati (iteração de valores) e o método de quasi-linearização (iteração de estratégias) respectivamente. Apresentamos algoritmos de diferença temporal para os casos em que a matriz de transição é conhecida e para o caso em que não é conhecida.

## Abstract

In this paper we present an iterative technique for deriving the maximal solution of a set of discrete-time coupled algebraic Riccati equations (CARE), based on temporal difference methods. CARE are related to the optimal control of Markovian jump linear systems and have been extensively studied over the last few years. We trace a parallel with the theory of temporal difference algorithms for Markovian decision processes to develop a  $\lambda$ -policy iteration like algorithm for the maximal solution of these equations. For the special cases in which  $\lambda = 0$  and  $\lambda = 1$  we have the situation in which the algorithm reduces to the iterations of the Riccati difference equations (value iteration) and quasi-linearization method (policy iteration) respectively. We present temporal difference algorithms for the case in which the transition matrix is known and for the case in which it is not known.

Contou com o auxílio financeiro da:

\*Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de São Paulo (FAPESP)

†Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

# 1 Introdução

Neste trabalho consideraremos o seguinte modelo em um espaço probabilístico  $(\Omega, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_k\}, \mathcal{F})$  apropriado, conhecido na literatura internacional como sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo discreto (vide. (?)):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) \\ x(0) &= x_0, \theta(0) = \theta_0, \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $\theta(k)$  é uma cadeia de Markov tomando valores em  $\{1, \dots, N\}$  com a matriz de transição de probabilidade  $\mathcal{P} = (p_{ij})$ . Seja  $\Sigma = \{u = (u(0), \dots); u(k) \text{ é } \mathcal{F}_k\text{-mensurável para cada } k\}$ . Para  $u \in \Sigma$ , considere o seguinte funcional quadrático para o sistema (1):

$$\begin{aligned} J_{(x_0, \theta_0)}(u) &= E_{(x_0, \theta_0)} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|C_{\theta(k)}x(k)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|D_{\theta(k)}u(k)\|^2 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Deseja-se minimizar (2) sob  $u \in \Sigma$ . Nos artigos ((?), (?), (?)) mostra-se que a solução deste problema esta associada à existência de uma solução  $P = (P_1, \dots, P_N)$ ,  $P_i \geq 0$   $i = 1, \dots, N$ , do seguinte conjunto de equações algébricas de Riccati acopladas entre si (EARA), para  $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} X_i &= A_i' \mathcal{E}_i(X) A_i + C_i' C_i - A_i' \mathcal{E}_i(X) B_i (B_i' \mathcal{E}_i(X) B_i \\ &\quad + D_i' D_i B_i' \mathcal{E}_i(X) A_i) \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $\mathcal{E}(X) = (\mathcal{E}_1(X), \dots, \mathcal{E}_N(X))$  é definido, para  $X = (X_1, \dots, X_N)$  como

$$\mathcal{E}_i(X) = \sum_{j=1}^N p_{ij} X_j. \quad (4)$$

Se tal solução  $P$  existe, pode-se mostrar (vide (?)) que a lei de controle ótima para o problema dado pelas equações (1), (2) e (3) é obtida pela lei de controle de realimentação

$$u(k) = F_{\theta(k)} x(k) \quad (5)$$

onde  $F = (F_1, \dots, F_N)$  é dado por

$$F_i = -(B_i' \mathcal{E}_i(P) B_i + D_i' D_i)^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(P) A_i. \quad (6)$$

Associado aos problemas de horizonte infinito (1), (2), temos o problema de horizonte finito (7) no qual, para algum  $S = (S_1, \dots, S_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ , deseja-se encontrar um  $u(0), \dots, u(\kappa)$  tal que minimize o seguinte funcional

$$\begin{aligned} J_{(x_0, \theta_0)}(u) &= E_{(x_0, \theta_0)} \left( \sum_{k=0}^{\kappa} (\|C_{\theta(k)}x(k)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \|D_{\theta(k)}u(k)\|^2) + x(\kappa+1)' S_{\theta(\kappa+1)} x(\kappa+1) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Como é provado em (?), a solução deste problema pode ser obtida do seguinte conjunto de equações a diferença de Riccati para  $k = \kappa, \dots, 0$ ,

$$\begin{aligned} P_i(k) &= A_i' \mathcal{E}_i(P(k+1)) A_i + C_i' C_i \\ &\quad - A_i' \mathcal{E}_i(P(k+1)) B_i (B_i' \mathcal{E}_i(P(k+1)) B_i \\ &\quad + D_i' D_i)^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(P(k+1)) A_i \\ &= (A_i + B_i F_i(k))' \mathcal{E}_i(P(k+1)) (A_i + B_i F_i(k)) \\ &\quad + C_i' C_i + F_i(k)' D_i' D_i F_i(k) \end{aligned} \quad (8)$$

onde  $P(\kappa+1) = S$  e

$$\begin{aligned} F_i(k) &= -(B_i' \mathcal{E}_i(P(k+1)) B_i \\ &\quad + D_i' D_i)^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(P(k+1)) A_i. \end{aligned} \quad (9)$$

A lei de controle ótima de (7) é dada por

$$u(k) = F_{\theta(k)}(k) x(k)$$

e sob algumas condições (vide (?)),  $P(k)$  converge para uma solução semi-definida positiva  $P$  de (3).

Traçando um paralelo entre a teoria acima e a teoria de processos Markovianos de decisão (PMD), poderíamos relacionar as iterações (8), (9) com a técnica chamada de iteração de valores em PMD. Por outro lado, como será apresentado no Lema 4 abaixo (vide Observação 1), o método chamado de quasi-linearização para obter a solução de (3) pode ser visto como a técnica de iteração de estratégias para PMD, envolvendo a parte de avaliação de estratégia e melhoramento de estratégia.

O primeiro objetivo deste trabalho (seção 3) é aplicar o método de diferença temporal para obter a solução ótima  $P$  para as EARA (3), (4) quando a matriz de transição  $\mathcal{P}$  é conhecida. Alguns algoritmos numéricos baseados na equação de Riccati, equação de Liapunov, e programação convexa tem sido propostos nos artigos ((?), (?), (?), (?), (?)). Entretanto se o número de modos de operação  $N$  do sistema for grande, um método específico que só usa a técnica de iteração de valores (ao invés de otimização convexa e inversões de matrizes) pode ser vantajoso desde que possua uma rápida convergência. Aplicaremos essas idéias para obter um método iterativo para calcular a solução maximal de (3), (4), a ser definido na seção seguinte. Como será visto abaixo, esse método traça um paralelo com o método de TD de iteração de estratégias em PMD quando  $\mathcal{P}$  é conhecida. Para  $\lambda = 0$  nossa técnica se reduz à técnica apresentada nas equações (8), (9) (iteração de valores), enquanto que para  $\lambda = 1$  se reduz ao método de quasi-linearização que será apresentado no Lema 4.

A outra meta neste trabalho (seção 4) é obter a solução ótima  $P$ , porém quando a matriz de transição de probabilidades  $\mathcal{P}$  é desconhecida. Para isto vamos a usar a técnica chamada de TD( $\lambda$ ) (vide (?), (?)), que mistura idéias de simulação de Monte Carlo e programação dinâmica. O método de TD pode aprender diretamente das observações da cadeia de Markov sem ter  $\mathcal{P}$ , e também pode atualizar estimativas baseadas em outras estimativas apreendidas, sem ter que esperar pelo resultado final.

Um exemplo para os 2 casos ( $\mathcal{P}$  conhecido e  $\mathcal{P}$  não conhecido) é apresentado na seção 5, e as conclusões na seção 6.

## 2 Notação e resultados preliminares

Para  $\mathbb{X}$  e  $\mathbb{Y}$  espaços de Banach, definimos  $\mathbb{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$  o espaço de Banach de todos os operadores lineares de  $\mathbb{X}$  em  $\mathbb{Y}$ , com a norma uniforme induzida representada por  $\|\cdot\|$ . Por simplicidade usaremos  $\mathbb{B}(\mathbb{X}) := \mathbb{B}(\mathbb{X}, \mathbb{X})$ . O raio espectral de um operador  $\mathcal{G} \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$  será denotado por  $r_\sigma(\mathcal{G})$ . Se  $\mathbb{X}$  é um espaço de Hilbert o produto interno será denotado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , e para  $\mathcal{G} \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$ ,  $\mathcal{G}^*$  denotará o operador adjunto de  $\mathcal{G}$ . Como é usual,  $\mathcal{G} \geq 0$  ( $\mathcal{G} > 0$  respectivamente) denotará que o operador  $\mathcal{G} \in \mathbb{B}(\mathbb{X})$  é positivo semi-definido (positivo definido). Em particular denotaremos o espaço complexo  $n$ -dimensional por  $\mathbb{C}^n$  e por  $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$  o espaço linear de todas as matrizes  $m \times n$  com norma limitada, e  $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n) := \mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ .

O conjunto  $\mathbb{H}^{n,m}$  é formado pelo espaço linear de todas as  $N$ -seqüências das matrizes complexas  $V = (V_1, \dots, V_N)$  com  $V_i \in \mathbb{B}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ ,  $i = 1, \dots, N$  e, por simplicidade, o conjunto  $\mathbb{H}^n := \mathbb{H}^{n,n}$ . Para  $V = (V_1, \dots, V_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ , consideraremos a seguinte norma em  $\mathbb{H}^{n,m}$

$$\|V\| := \sum_{i=1}^N \|V_i\|. \quad (10)$$

É fácil verificar que equipado com a norma acima  $\mathbb{H}^{n,m}$  é um espaço de Banach. Definimos

$$\mathbb{H}^{n+} := \{V = (V_1, \dots, V_N) \in \mathbb{H}^n; V_i \geq 0, \forall i\}$$

e escrevemos que  $V \geq S$  onde  $V = (V_1, \dots, V_N) \in \mathbb{H}^n$  e  $S = (S_1, \dots, S_N) \in \mathbb{H}^n$ , se

$$V - S = (V_1 - S_1, \dots, V_N - S_N) \in \mathbb{H}^{n+},$$

e que  $V > S$  se  $V_i - S_i > 0$  para  $i = 1, \dots, N$ . Para,  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_N) \in \mathbb{H}^n$  definimos os seguintes operadores,  $\mathcal{L}(\cdot) = (\mathcal{L}_1(\cdot), \dots, \mathcal{L}_N(\cdot)) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$  e  $\mathcal{G}(\cdot) = (\mathcal{G}_1(\cdot), \dots, \mathcal{G}_N(\cdot)) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$  para  $V = (V_1, \dots, V_N) \in \mathbb{H}^n$  e  $i, j = 1, \dots, N$ ,

$$\mathcal{L}_i(V) := \Gamma_i' \mathcal{E}_i(\cdot) \Gamma_i \quad (11)$$

$$\mathcal{G}_j(V) := \sum_{i=1}^N p_{ij} \Gamma_i V_i \Gamma_i' \quad (12)$$

onde o operador  $\mathcal{E}(\cdot) = (\mathcal{E}_1(\cdot), \dots, \mathcal{E}_N(\cdot)) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$  é definido como em (4). É simples verificar que os operadores  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{L}$ , e  $\mathcal{G}$  mapeiam  $\mathbb{H}^{n+}$  em  $\mathbb{H}^{n+}$ , e que  $r_\sigma(\mathcal{L}) = r_\sigma(\mathcal{G})$ .

Assumimos no modelo (1) e na função de custo (2) que  $A = (A_1, \dots, A_N) \in \mathbb{H}^n$ ,  $B = (B_1, \dots, B_N) \in \mathbb{H}^{m,n}$ ,  $C = (C_1, \dots, C_N) \in \mathbb{H}^{n,p}$  e  $D = (D_1, \dots, D_N) \in \mathbb{H}^{m,p}$ . Como foi mostrado em (?), (?), o modelo (1) com  $u(k) = F_{\theta(k)} x(k)$ , e  $V_i(k) = E(x(k)x(k)^* 1_{\{\theta(k)=i\}})$ ,  $V(k) = (V_1(k), \dots, V_N(k)) \in \mathbb{H}^{n+}$  leva a

$$V(k+1) = \mathcal{G}(V(k)), \quad k = 0, 1, \dots$$

onde  $\Gamma_i = A_i + B_i F_i$  em (12). Vamos definir o conceito de estabilidade que será usado nas seções seguintes.

**Definição 1** Diremos que  $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$  estabiliza  $(A, B)$  no sentido da média quadrática se, quando fazemos  $u(k) = F_{\theta(k)} x(k)$  no sistema (1), temos que  $E(\|x(k)\|^2) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  para qualquer condição inicial de

$x(0)$  e  $\theta(0)$ . Diremos que  $(A, B)$  é estabilizável na média quadrática se para algum  $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ , temos que  $F$  estabiliza  $(A, B)$  no sentido da média quadrática.

O seguinte resultado, provado em (?), mostra que  $F = (F_1, \dots, F_N)$  estabiliza o sistema (1) no sentido da média quadrática se e somente se o raio espectral do operador (12) (ou (11)) em malha fechada é menor que 1.

**Lema 1**  $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$  estabiliza  $(A, B)$  no sentido da média quadrática se e somente se  $r_\sigma(\mathcal{G}) < 1$ , onde  $\mathcal{G}$  é como em (12) com  $\Gamma_i = A_i + B_i F_i$ .

O seguinte Lema, provado em (?), é crucial para o desenvolvimento deste trabalho. Seja  $\Gamma_i = A_i + B_i F_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , para algum  $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ . Considere também o operador  $\bar{\mathcal{L}}(\cdot) = (\bar{\mathcal{L}}_1(\cdot), \dots, \bar{\mathcal{L}}_N(\cdot)) \in \mathbb{B}(\mathbb{H}^n)$  definido como

$$\bar{\mathcal{L}}_i(\cdot) := \Lambda_i' \mathcal{E}_i(\cdot) \Lambda_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (13)$$

onde  $\Lambda_i = A_i + B_i G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , para algum  $G = (G_1, \dots, G_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ .

**Lema 2** Considere  $\mathcal{L}$  e  $\bar{\mathcal{L}}$  definidos em (11) e (13) acima, com  $\Gamma_i = A_i + B_i F_i$  e  $\Lambda_i = A_i + B_i G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Suponha que  $r_\sigma(\mathcal{L}) < 1$  e para algum  $P = (P_1, \dots, P_N) \geq 0$  e  $\delta > 0$ ,

$$P_i - \Lambda_i' \mathcal{E}_i(P) \Lambda_i \geq \delta (G_i - F_i)' (G_i - F_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Então  $r_\sigma(\bar{\mathcal{L}}) < 1$ .

**Definição 2** Definimos  $\mathcal{F}(\cdot) = (\mathcal{F}_1(\cdot), \dots, \mathcal{F}_N(\cdot)) : \mathbb{H}^{n+} \rightarrow \mathbb{H}^{n,m}$ ,  $\mathcal{V}(\cdot) = (\mathcal{V}_1(\cdot), \dots, \mathcal{V}_N(\cdot)) : \mathbb{H}^{n,m} \rightarrow \mathbb{H}^n$  e  $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1(\cdot), \dots, \mathcal{R}_N(\cdot)) : \mathbb{H}^{n+} \rightarrow \mathbb{H}^{n+}$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i(X) &:= -(B_i' \mathcal{E}_i(X) B_i + D_i' D_i)^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(X) A_i \\ \mathcal{V}_i(F) &:= C_i' C_i + F_i' D_i' D_i F_i \\ \mathcal{R}_i(X) &:= A_i' \mathcal{E}_i(X) A_i + C_i' C_i \\ &\quad - A_i' \mathcal{E}_i(X) B_i (B_i' \mathcal{E}_i(X) B_i \\ &\quad + D_i' D_i)^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(X) A_i \end{aligned} \quad (15)$$

onde  $X = (X_1, \dots, X_N) \in \mathbb{H}^{n+}$ ,  $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ .

Também temos o seguinte resultado (vide a prova em (?)):

**Lema 3** Suponha que  $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$  estabiliza  $(A, B)$  no sentido da média quadrática. Então existe uma única solução  $S(F)$  para a equação em  $Y$

$$\begin{aligned} Y_i - (A_i + B_i F_i)' \mathcal{E}_i(Y) (A_i + B_i F_i) \\ - (C_i' C_i + F_i' D_i' D_i F_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (16)$$

Além disso,

$$S(F) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^k(\mathcal{V}(F)). \quad (17)$$

A seguinte identidade será útil nas próximas seções: para qualquer  $F = (F_1, \dots, F_N) \in \mathbb{H}^{n,m}$ , temos que

$$\begin{aligned} & (A_i + B_i F_i)' \mathcal{E}_i(S) (A_i + B_i F_i) + F_i' D_i' D_i F_i \\ &= (A_i + B_i \mathcal{F}_i(S))' \mathcal{E}_i(S) (A_i + B_i \mathcal{F}_i(S)) \\ &+ \mathcal{F}_i(S)' D_i' D_i \mathcal{F}_i(S) \\ &+ (F_i - \mathcal{F}_i(S))' (B_i' \mathcal{E}_i(S) B_i + D_i' D_i) (F_i - \mathcal{F}_i(S)). \end{aligned} \quad (18)$$

O seguinte Lema provado em (?), provê a existência de uma solução maximal para (3) quando  $(A, B)$  é estável na média quadrática. É baseado na técnica de quasi-linearização para a EARA (3), e paralelamente à técnica de iteração de estratégias para PMD (vide Observação 1 abaixo).

**Lema 4** *Suponha que  $(A, B)$  é estabilizável na média quadrática e considere  $F^0 = (F_1^0, \dots, F_N^0) \in \mathbb{H}^{n,m}$  tal que estabiliza  $(A, B)$  no sentido da média quadrática. Então para  $l = 0, 1, 2, \dots$ , existe  $X^l = (X_1^l, \dots, X_N^l)$  que satisfaz às seguintes propriedades:*

- a)  $X^0 \geq X^1 \geq \dots \geq X^l \geq X$ , para um  $X \in \mathbb{H}^{n+}$  arbitrário tal que  $X \geq \mathcal{R}(X)$ .
- b)  $r_\sigma(\mathcal{L}^l) < 1$ , onde  $\mathcal{L}^l(\cdot) = (\mathcal{L}_1^l(\cdot), \dots, \mathcal{L}_N^l(\cdot))$  e para  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i^l(\cdot) &:= A_i^{l'} \mathcal{E}_i(\cdot) A_i^l, \\ A_i^l &:= A_i + B_i F_i^l, \\ F_i^l &:= \mathcal{F}_i(X^{l-1}) \text{ for } l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- c)  $X^l$  satisfaz  $X^l = \mathcal{L}^l(X^l) + \mathcal{V}(F^l)$  e é dado por  $X^l = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{L}^l)^k (\mathcal{V}(F^l))$ .

Além disso existe um  $X^+ = (X_1^+, \dots, X_N^+) \in \mathbb{H}^{n+}$  tal que  $X^+ = \mathcal{R}(X^+)$ ,  $X^+ \geq X$  para qualquer  $X \in \mathbb{H}^{n+}$  tal que  $X \geq \mathcal{R}(X)$ , e  $X^l \rightarrow X^+$  quando  $l \rightarrow \infty$ . Mais ainda  $r_\sigma(\mathcal{L}^+) \leq 1$ , onde  $\mathcal{L}^+(\cdot) = (\mathcal{L}_1^+(\cdot), \dots, \mathcal{L}_N^+(\cdot))$  é definido como  $\mathcal{L}_i^+(\cdot) = A_i^{+'} \mathcal{E}_i(\cdot) A_i^+$ , para  $i = 1, \dots, N$ , e

$$\begin{aligned} F_i^+ &= \mathcal{F}_i(X^+) \\ A_i^+ &= A_i + B_i F_i^+. \end{aligned}$$

**Observação 1** O passo c) do Lema 1.4, que corresponde ao cálculo da solução do sistema linear

$$X^l = \mathcal{L}^l(X^l) + \mathcal{V}(F^l),$$

pode ser visto como o passo de avaliação de estratégias na técnica de iteração de estratégias para PMD, enquanto que da identidade (18),

$$\begin{aligned} & (A_i + B_i F_i)' \mathcal{E}_i(X^l) (A_i + B_i F_i) + C_i' C_i + F_i' D_i' D_i F_i = \\ & X_i^l - (F_i^l - \mathcal{F}_i(X^l))' (B_i' \mathcal{E}_i(X^l) B_i + D_i' D_i) (F_i^l - \mathcal{F}_i(X^l)) \\ & + (F_i - \mathcal{F}_i(X^l))' (B_i' \mathcal{E}_i(X^l) B_i + D_i' D_i) (F_i - \mathcal{F}_i(X^l)) \end{aligned}$$

e o lado direito é minimizado em  $F_i$  escolhendo  $F_i = F_i^{l+1} = \mathcal{F}_i(X^l)$ , que pode ser visto como o passo de melhoramento de estratégias.

### 3 Método de diferença temporal quando se conhece a matriz $\mathcal{P}$

O passo de avaliação de estratégias do método de iteração de estratégias apresentado no Lemma 4 poderia ser realizada por iteração de valores já que, como visto em c) no Lema 4,

$$X^l = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{L}^l)^k (\mathcal{V}(F^l))$$

e do fato de que, como  $r_{\sigma}(\mathcal{L}^l) < 1$ , o somatório acima pode ser truncado para um inteiro suficientemente grande  $\kappa$ , e

$$X^l \simeq \sum_{k=0}^{\kappa} (\mathcal{L}^l)^k (\mathcal{V}(F^l)).$$

Se  $r_{\sigma}(\mathcal{L}^l)$  está perto de 1, a convergência acima pode ser lenta, e desta maneira seria interessante usar uma abordagem na qual o raio espectral do operador associado é reduzido para acelerar o método de iteração de estratégias. Para tanto apresentamos abaixo um algoritmo de iteração de estratégias, o qual traça um paralelo com o método do TD em Programação Neuro-dinâmica (vide, por exemplo, (?),(?)) quando a matriz de transição  $\mathcal{P}$  é conhecida.

Considere  $\lambda \in (0, 1)$ . Suponha que na iteração  $\ell$ , tenhamos  $(S^{\ell-1}, F^{\ell})$  tal que  $\sqrt{\lambda}F^{\ell}$  estabiliza  $\sqrt{\lambda}(A, B)$  no sentido da média quadrática.

Para  $k = 0, 1, \dots$ , definimos o TD associado à transição de  $\theta(k)$  a  $\theta(k+1)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\ell}(k) &= \Phi^{\ell}(k-1)' \left( C'_{\theta(k)} C_{\theta(k)} \right. \\ &\quad \left. + F^{\ell'}_{\theta(k)} D'_{\theta(k)} D_{\theta(k)} F^{\ell}_{\theta(k)} + \left( A_{\theta(k)} + B_{\theta(k)} F^{\ell}_{\theta(k)} \right)' S^{\ell-1}_{\theta(k+1)} \left( A_{\theta(k)} + B_{\theta(k)} F^{\ell}_{\theta(k)} \right) - S^{\ell-1}_{\theta(k)} \right) \Phi^{\ell}(k-1) \\ \Phi^{\ell}(k) &= \left( A_{\theta(k)} + B_{\theta(k)} F^{\ell}_{\theta(k)} \right) \Phi^{\ell}(k-1) \end{aligned}$$

$$\Phi^{\ell}(-1) = I.$$

Podemos ver  $\Gamma^{\ell}(k)$  como um estágio da matriz de custo no tempo  $k$ , para um sistema linear com saltos Markovianos a tempo discreto (1). A matriz de custo com o fator de desconto  $\lambda$  é dado por

$$\Delta_i^{\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} E(\lambda^k \Gamma^{\ell}(k) | \theta(0) = i). \quad (19)$$

A próxima matriz de custo é dada por

$$S_i^{\ell} = S_i^{\ell-1} + \Delta_i^{\ell} \quad (20)$$

e nos referimos ao método acima como sendo o método de  $\lambda$ -iteração de estratégias. Note que

$$\begin{aligned} E(\Gamma^{\ell}(k) | \theta(0) = i) &= (\mathcal{L}_i^{\ell})^k (\mathcal{V}(F^{\ell})) \\ &\quad + (\mathcal{L}_i^{\ell})^{k+1} (S^{\ell-1}) - (\mathcal{L}_i^{\ell})^k (S^{\ell-1}) \end{aligned} \quad (21)$$

e da hipótese  $r_\sigma(\lambda\mathcal{L}^\ell) < 1$ , existe um  $a \geq 0$ ,  $0 < b < 1$  tal que

$$\|(\lambda\mathcal{L}^\ell)^k\| \leq ab^k \quad (22)$$

e segue de (21) e (22) que o somatório (19) é bem definido.

Defina  $\mathcal{M}^\ell(S) = (\mathcal{M}_1^\ell(S), \dots, \mathcal{M}_N^\ell(S))$  como

$$\mathcal{M}_i^\ell(S) = \lambda\mathcal{T}_i^\ell(S) + (1 - \lambda)\mathcal{T}_i^\ell(S^{\ell-1})$$

onde  $\mathcal{T}^\ell(S) = (\mathcal{T}_1^\ell(S), \dots, \mathcal{T}_N^\ell(S))$  é definido como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i^\ell(S) &= (A_i + B_i F_i^\ell)' \mathcal{E}_i(S) (A_i + B_i F_i^\ell) \\ &\quad + C_i' C_i + F_i^{\ell'} D_i' D_i F_i^\ell \\ &= \mathcal{L}_i^\ell(S) + \mathcal{V}(F_i^\ell). \end{aligned}$$

**Lema 5** Para  $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}^\ell)^k(S) &= (1 - \lambda) [\mathcal{T}^\ell(S^{\ell-1}) + \dots \\ &\quad + \lambda^{k-1} (\mathcal{T}^\ell)^k(S^{\ell-1})] + \lambda^k (\mathcal{T}^\ell)^k(S). \end{aligned}$$

**Prova:** Vide (?). ■

**Lema 6** Suponha que  $\sqrt{\lambda}F^\ell$  estabiliza  $\sqrt{\lambda}(A, B)$  no sentido da média quadrática. Então

i) Existe um único  $R$  que satisfaz

$$R = \mathcal{M}^\ell(R), \text{ e } R = S^\ell \text{ onde } S^\ell \text{ satisfaz (20).}$$

ii) Para  $0 \leq \lambda < 1$ ,  $R = S^\ell$

$$S^\ell = (1 - \lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (\mathcal{T}^\ell)^{k+1}(S^{\ell-1}).$$

**Prova:** Vide (?). ■

Do Lema 6,

$$S^\ell = \lambda\mathcal{L}^\ell(S^\ell) + (1 - \lambda)\mathcal{L}^\ell(S^{\ell-1}) + \mathcal{V}(F^\ell), \quad (23)$$

onde  $\mathcal{L}^\ell(\cdot) = (\mathcal{L}_1^\ell(\cdot), \dots, \mathcal{L}_N^\ell(\cdot))$  e

$$\mathcal{L}_i^\ell(\cdot) := (A_i + B_i F_i^\ell)' \mathcal{E}_i(\cdot) (A_i + B_i F_i^\ell).$$

Considere  $F^0 = (F_1^0, \dots, F_N^0) \in \mathbb{H}^{n,m}$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , e  $S^{-1} \in \mathbb{H}^{m+}$ ,  $V \in \mathbb{H}^{n+}$  tal que

A)  $r_\sigma(\lambda\mathcal{L}^0) < 1$

B)  $V \geq P$  onde  $P$  é a solução maximal da EARA (3)

C)  $\lambda\mathcal{T}^0(S^{-1}) + (1 - \lambda)\mathcal{T}^0(V) \leq S^{-1}$ .

**Observação 2** Suponha que  $F^0$  estabiliza  $(A, B)$  no sentido da média quadrática. Então do Lema 3, existe uma única solução  $Y \geq 0$  satisfazendo  $Y = \mathcal{T}^0(Y)$  e  $Y \geq P$ . Portanto para esse  $F^0$  e com  $S^{-1} = Y$ ,  $V = Y$ ,  $A1), A2), A3)$  são satisfeitas para qualquer  $\lambda = [0, 1)$ .

Definimos o algoritmo  $\lambda$ -iteração de estratégias para  $\ell = 0, 1, \dots$  da seguinte maneira:

i)  $F_i^\ell = \mathcal{F}_i(S^{\ell-1})$  (exceto para  $\ell = 0$ ).

ii)  $S^\ell$  a solução da equação (23).

Este algoritmo corresponde ao TD para o caso que  $\mathcal{P}$  é conhecido. Temos a seguinte prova de convergência neste caso.

**Teorema 1** Suponha que  $(A, B)$  seja estabilizável na média quadrática e  $A1), A2), A3)$  sejam satisfeitas. Então para cada  $\ell = 0, 1, \dots$ , temos que  $\sqrt{\lambda}F^\ell$  estabiliza  $\sqrt{\lambda}(A, B)$  no sentido da média quadrática, e

$$S^\ell \downarrow P \text{ quando } \ell \uparrow \infty$$

onde  $P$  é a solução maximal para a EARA dada por (3).

**Prova:** Vide (?). ■

## 4 Método de diferença temporal quando não se conhece a matriz $\mathcal{P}$

Nesta segunda parte do trabalho vamos desenvolver um algoritmo para calcular a solução maximal para a EARA dada pela equação (3), quando  $\mathcal{P}$  não é conhecida, baseado no método TD( $\lambda$ ) (vide (?)). Primeiramente note que a lei de controle de realimentação ótima é dada por

$$u(k) = F_{\theta(k)} x(k),$$

onde  $F = (F_1, \dots, F_N)$  é

$$F_i = -(B_i' \mathcal{E}_i(P) B_i + D_i' D_i)^{-1} B_i' \mathcal{E}_i(P) A_i.$$

Como  $\mathcal{P}$  não é conhecida, não temos como calcular  $\mathcal{E}_i(P)$  mesmo se  $\mathcal{P}$  fosse obtido. O problema pode ser resolvido da seguinte forma; como

$$\begin{aligned} X_i &= (A_i + B_i F_i)' \mathcal{E}_i(X) (A_i + B_i F_i) \\ &\quad + C_i' C_i + F_i' D_i' D_i F_i, \end{aligned}$$

temos que, fazendo  $Y_i = \mathcal{E}(X)$ ,

$$\begin{aligned} Y_i &= \sum_j p_{ij} \left[ (A_i + B_i F_i)' Y_i (A_i + B_i F_i) \right. \\ &\quad \left. + C_i' C_i + F_i' D_i' D_i F_i \right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Portanto se obtivermos a solução maximal  $Y = (Y_1, \dots, Y_N)$  para (24) então a lei de controle ótima é obtida diretamente de  $Y$  fazendo  $F_i = -(B_i' Y_i B_i + D_i' D_i)^{-1} B_i' Y_i A_i$ .

Seguindo a estrutura do algoritmo TD para calcular  $S_{i_k}^\ell$  em (19), (20) onde  $\theta(k) = i_k$ , definimos a seguinte diferença temporal:

$$d_{i_k}^N = \Phi(k)' \left[ \left( A_{i_{k+1}} + B_{i_{k+1}} F_{i_{k+1}}^\ell \right)' Y_{i_{k+1}}^N \left( A_{i_{k+1}} + B_{i_{k+1}} F_{i_{k+1}}^\ell \right) + C_{i_{k+1}}' C_{i_{k+1}} + F_{i_{k+1}}^{\ell'} D_{i_{k+1}}' D_{i_{k+1}} F_{i_{k+1}}^\ell - Y_{i_k}^N \right] \Phi(k), \quad (25)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= (A_{i_k} + B_{i_k} F_{i_k}^\ell) \Phi(k-1) \\ \Phi(0) &= I, \end{aligned}$$

e traçando um paralelo com a técnica TD( $\lambda$ ) (vide (?)) podemos calcular a solução da equação (24) via diferenças temporais da seguinte forma:

$$Y_{i_k}^{N+1} = Y_{i_k}^N + \gamma^N \sum_{m=k}^{\infty} \lambda^{m-k} d_{i_m}^N, \quad (26)$$

e assumindo que  $Y^N \rightarrow S^\ell$ , quando  $N \uparrow \infty$ , podemos atualizar  $F^\ell$  de acordo com:

$$F_i^\ell = -(B_i' S_i^\ell B_i + D_i' D_i)^{-1} B_i' S_i^\ell A_i \quad (27)$$

Definimos o algoritmo de iteração de estratégias via TD( $\lambda$ ) para  $\ell = 0, 1, \dots$  da seguinte maneira:

- i)  $F_i^\ell$  é calculado de acordo com a equação (27), exceto para  $\ell = 0$  onde neste caso temos que encontrar um  $F^0$  tal que estabiliza cada um dos modos de operação.
- ii)  $S^\ell$  é calculado de acordo com as equações (25) e (26)

## 5 Exemplo Numérico

Para ilustrar o uso do resultados desenvolvidos nas seções anteriores, escolhemos um sistema econômico simples baseado no modelo multiplicador-acelerador de Samuelson's (?), o qual aparece na forma de equações de estado:

$$x(k+1) = A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} u(k).$$

Consideramos os seguintes três modos de operação do sistema linear a saltos Markovianos a tempo discreto: A matriz de transição de probabilidades para este sistema é assumida como:

$$P = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.17 & 0.16 \\ 0.30 & 0.47 & 0.23 \\ 0.26 & 0.10 & 0.64 \end{bmatrix}.$$

Para o algoritmo apresentado na seção 3, temos  $F^0 = (F_1^0, F_2^0, F_3^0) \in \mathbb{H}^{2,1}$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , e  $S^{-1} \in \mathbb{H}^{2+}$ ,  $V \in \mathbb{H}^{2+}$ . Se escolhermos um  $F^0$  tal que  $r_\sigma(\mathcal{L}^0) < 1$ ,

| Parâmetros              | Modos de operação                                               |                                                           |                                                              |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
|                         | 1                                                               | 2                                                         | 3                                                            |
| matriz $A$              | $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.5 & 3.2 \end{bmatrix}$       | $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.3 & 4.5 \end{bmatrix}$ | $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.3 & -5.2 \end{bmatrix}$    |
| matriz $B$              | $B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$                    | $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$              | $B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$                 |
| matriz $Q_i = C_i' C_i$ | $Q_1 = \begin{bmatrix} 3.6 & -3.8 \\ -3.8 & 4.87 \end{bmatrix}$ | $Q_2 = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$   | $Q_3 = \begin{bmatrix} 5 & -4.5 \\ -4.5 & 4.5 \end{bmatrix}$ |
| matriz $R_i = D_i' D_i$ | $R_1 = 2.6$                                                     | $R_2 = 1.165$                                             | $R_3 = 1.111$                                                |

Tabela 1: Dados do modelos multiplicador-acelerador

$S^{-1} = \mathcal{T}^0(S^{-1})$  e  $V = S^{-1}$  então, como visto na Observação 2, as condições A1), A2) e A3) são satisfeitas para qualquer valor de  $0 \leq \lambda < 1$ , e portanto de acordo com o Teorema 1, o algoritmo converge para a solução maximal  $P$ .

Foram considerados três valores de  $\lambda$ ;  $\lambda = 0.1$ ,  $\lambda = 0.5$  e  $\lambda = 0.9$ . Para cada um desses valores  $S^\ell$  foi resolvido por iteração de valores, e tomamos a média do número de iterações, denotada por  $\varsigma$ , necessária para que  $(M^\ell)^r(S^{\ell-1})$  convirja para  $S^\ell$ . Denotamos por  $\ell_f$  o número de iterações necessário para que  $S^\ell$  convirja para  $P$ .

| $\lambda$ | $\varsigma$ | $\ell_f$ |
|-----------|-------------|----------|
| 0.1       | 3.375       | 16       |
| 0.5       | 5.083       | 12       |
| 0.9       | 6.500       | 8        |

Tabela 2: Relação de  $\varsigma$  e  $\ell_f$  com respeito a  $\lambda$

Como esperado, quando  $\lambda$  aumenta,  $\varsigma$  aumenta e  $\ell_f$  diminui (vide Tabela 2). Em todos os três casos, a solução ótima foi:

| Solução da EARA |         |                                                                              | Lei de controle ótima            |
|-----------------|---------|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| 1               | $P_1 =$ | $\begin{bmatrix} 18.6616 & -18.9560 \\ -18.9560 & 28.1086 \end{bmatrix}$     | $F_1 = [2, 3172 \quad -2, 3317]$ |
| 2               | $P_2 =$ | $\begin{bmatrix} 30.8818 & -21.6010 \\ -21.6010 & 36, 2739 \end{bmatrix}$    | $F_2 = [4, 1684 \quad -3, 7131]$ |
| 3               | $P_3 =$ | $\begin{bmatrix} 35, 4175 & -38, 6129 \\ -38, 6129 & 49, 7079 \end{bmatrix}$ | $F_3 = [-5, 1657 \quad 5, 7933]$ |

Tabela 3: Solução ótima

Para o algoritmo apresentado na seção 4, forem realizados vários experimentos com diferentes valores de  $\lambda$  (vide Tabela 4). Na coluna 5 da Tabela 4 mostra-se o erro, que foi calculado de acordo com a seguinte equação:

$$\Delta_i = \left\| \frac{F_i^{real} - F_i}{F_i^{real}} \right\| * 100.$$

| $\lambda$ | $\ell$ | $n$ | $mm$ | $\Delta_i$   |        |        |
|-----------|--------|-----|------|--------------|--------|--------|
| 0.1       | 20     | 100 | 200  | $\Delta_1 =$ | 0.0409 | 0.1465 |
|           |        |     |      | $\Delta_2 =$ | 0.0134 | 0.3296 |
|           |        |     |      | $\Delta_3 =$ | 0.1029 | 0.2365 |
| 0.5       | 20     | 100 | 200  | $\Delta_1 =$ | 0.3123 | 0.2707 |
|           |        |     |      | $\Delta_2 =$ | 0.0377 | 0.5293 |
|           |        |     |      | $\Delta_3 =$ | 0.0070 | 0.5351 |

Tabela 4: Dados do algoritmo aplicado no exemplo multiplicador-acelerador

## 6 Conclusões

Neste trabalho foi traçado um paralelo entre os métodos de diferença temporal (TD) para processos Markovianos de decisão (PMD) com o algoritmo de iteração de  $\lambda$ -estratégia para obter a solução maximal de um conjunto de equações algébricas de Riccati acopladas entre si (EARA) para a lei de controle ótima de sistemas lineares com saltos Markovianos a tempo discreto. Relacionamos as iterações (8),(9) com a técnica de iteração de valores em PMD e o método de quasi-linearização apresentado no Lema 4 com a técnica de iteração de estratégias para PMD, envolvendo a parte de avaliação de estratégias, e a parte de melhoramento de estratégias (vide Observação 1).

O TD tem sido usado para resolver problemas relacionado a PMD, por exemplo (?), (?). Usualmente é preferível não usar o passo de avaliação de estratégias no método de iteração de estratégias, substituindo-o pelo uso de iteração de valores. A desvantagem nesta abordagem é que o algoritmo de iteração de valores pode convergir lentamente para um fator de desconto perto de 1. A idéia do TD é aumentar a velocidade de convergência no passo de iteração de valores do método de iteração de estratégias pelo uso de iteração de valores. Isto é feito usando um parâmetro, usualmente chamado de  $\lambda$ , o qual dá origem ao TD( $\lambda$ ) método de iteração de estratégias. Para  $\lambda = 1$ , o método se reduz à técnica de iteração de estratégias, enquanto que para  $\lambda = 0$ , temos a técnica de iteração de valores.

Aplicando essas idéias para a solução maximal de (3), (4), quando  $\mathcal{P}$  é conhecida obtivemos um método iterativo que traça um paralelo próximo com o método de iteração de estratégia TD em PMD. Para  $\lambda = 0$  nossa técnica se reduz à apresentada nas equações (8), (9) (iteração de valores), enquanto que para  $\lambda = 1$  esta se reduz ao método de quasi-linearização apresentado no Lema 4 (iteração de estratégias). Da mesma forma que para PMD, a vantagem do método é encontrar um  $\lambda$  apropriado entre 0 e 1, que aumente a velocidade de convergência no passo de avaliação de estratégias do método de iteração de estratégias pelo uso de iteração de valores, sem reduzir muito a convergência global para a solução ótima do problema.

Na seção 4 usou-se a técnica de TD( $\lambda$ ) para calcular a solução maximal da EARA de um sistema com saltos Markovianos a tempo discreto, quando a matriz de transição de probabilidade  $\mathcal{P}$  é desconhecida, e somente se conhecem as trajetórias do sistema.

## BOLETINS TÉCNICOS - TEXTOS PUBLICADOS

- BT/PTC/9901 – Avaliação de Ergoespirômetros Segundo a Norma NBR IEC 601-1- MARIA RUTH C. R. LEITE, JOSÉ CARLOS TEIXEIRA DE B. MORAES
- BT/PTC/9902 – Sistemas de Criptofonia de Voz com Mapas Caóticos e Redes Neurais Artificiais – MIGUEL ANTONIO FERNANDES SOLER, EUVALDO FERREIRA CABRAL JR.
- BT/PTC/9903 – Regulação Sincronizada de Distúrbios Senodais – VAIDYA INÉS CARRILLO SEGURA, PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA
- BT/PTC/9904 – Desenvolvimento e Implementação de Algoritmo Computacional para Garantir um Determinado Nível de Letalidade Acumulada para Microorganismos Presentes em Alimentos Industrializados – RUBENS GEDRAITE, CLÁUDIO GARCIA
- BT/PTC/9905 – Modelo Operacional de Gestão de Qualidade em Laboratórios de Ensaio e Calibração de Equipamentos Eletromédicos – MANUEL ANTONIO TAPIA LÓPEZ, JOSÉ CARLOS TEIXEIRA DE BARROS MORAES
- BT/PTC/9906 – Extração de Componentes Principais de Sinais Cerebrais Usando Karhunen – Loève Neural Network – EDUARDO AKIRA KINTO, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PTC/9907 – Observador Pseudo-Derivativo de Kalman Numa Coluna de Destilação Binária – JOSÉ HERNANDEZ LÓPEZ, JOSÉ JAIME DA CRUZ, CLAUDIO GARCIA
- BT/PTC/9908 – Reconhecimento Automático do Locutor com Coeficientes Mel-Cepstrais e Redes Neurais Artificiais – ANDRÉ BORDIN MAGNI, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR
- BT/PTC/9909 – Análise de Estabilidade e Síntese de Sistemas Híbridos – DIEGO COLÓN, FELIPE MIGUEL PAIT
- BT/PTC/0001 – Alguns Aspectos de Visão Multiescalas e Multiresolução – JOÃO E. KOGLER JR., MARCIO RILLO
- BT/PTC/0002 – Placa de Sinalização E1: Sinalização de Linha R2 Digital Sinalização entre Registradores MFC- PHILLIP MARK SEYMOUR BURT, FERNANDA CARDOSO DA SILVA
- BT/PTC/0003 – Estudo da Técnica de Comunicação FO-CDMA em Redes de Fibra Óptica de Alta Velocidade – TULIPA PERSO, JOSÉ ROBERTO DE A. AMAZONAS
- BT/PTC/0004 – Avaliação de Modelos Matemáticos para Motoneurônios – DANIEL GUSTAVO GOROSO, ANDRÉ FÁBIO KOHN
- BT/PTC/0005 – Extração e Avaliação de Atributos do Eletrocardiograma para Classificação de Batimentos Cardíacos – ELDER VIEIRA COSTA, JOSÉ CARLOS T. DE BARROS MORAES
- BT/PTC/0006 – Uma Técnica de Imposição de Zeros para Auxílio em Projeto de Sistemas de Controle – PAULO SÉRGIO PIERRI, ROBERTO MOURA SALES
- BT/PTC/0007 – A Connected Multireticated Diagram Viewer – PAULO EDUARDO PILON, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR
- BT/PTC/0008 – Some Geometric Properties of the Dynamic Extension Algorithm – PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA
- BT/PTC/0009 – Comparison of Alternatives for Capacity Increase in Multiple-Rate Dual-Class DS/CDMA Systems – CYRO SACARANO HESI, PAUL ETIENNE JESZESKY
- BT/PTC/0010 – Reconhecimento Automático de Ações Faciais usando FACS e Redes Neurais Artificiais – ALEXANDRE TORNICE, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR
- BT/PTC/0011 – Estudo de Caso: Tomando um Projeto Testável Utilizando Ferramentas Synopsys – REINALDO SILVEIRA, JOSÉ ROBERTO A. AMAZONAS
- BT/PTC/0012 – Modelos Probabilísticos para Rastreamento em Carteiras de Investimento – HUGO G. V. DE ASSUNÇÃO, OSWALDO L. V. COSTA
- BT/PTC/0013 – Influência de um Controle Imperfeito de Potência e Monitoramento da Atividade Vocal na Capacidade de Sistemas DS/CDMA – MÁRCIO WAGNER DUARTE ROLIM, PAUL JEAN ETIENNE JESZESKY
- BT/PTC/0014 – Canceladores de Interferência Sucessivo e Paralelo para DS/CDMA – TAUFIK ABRÃO, PAUL JEAN E. JESZESKY
- BT/PTC/0015 – Transmissão de Serviços de Multimídia num Sistema Móvel Celular CDMA de Banda Larga – EDUARDO MEIRELLES MASSAUD, PAUL JEAN ETIENNE JESZESKY
- BT/PTC/0016 – Disseminação do HIV em uma População Homossexual Heterogênea – MARCOS CASADO CASTÑO, JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA
- BT/PTC/0017 – Implementação e Avaliação em Laboratório de um Monitor Cardíaco Portátil para Três Derivações – RAISA FERNÁNDEZ NUNEZ, JOSE CARLOS TEIXEIRA DE BAROS MORAES
- BT/PTC/0018 – Projeto de Filtros Recursivos de N-ésima Banda – IRINEU ANTUNES JÚNIOR, MAX GERKEN
- BT/PTC/0019 – Relative Flatness and Flatness of Implicit Systems – PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA, CARLOS CORRÊA FILHO
- BT/PTC/0020 – Estimativa de Fluxo Sangüíneo nas Artérias Coronárias Usando Imagens de Cineangiocardiografia – ANA CRISTINA DOS SANTOS, SÉRGIO SHIGUEMI FURUIE
- BT/PTC/0021 – Modelos Populacionais para AIDS e Análise do Equilíbrio sem Epidemia – ELIZABETH FERREIRA SANTOS, JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA

BT/PTC/0101 – Model-Based Soft-Sensor Design for On-Line Estimation of the Biological Activity in Activated Sludge Wastewater Treatment Plants – OSCAR A. Z. SOTOMAYOR, SONG WON PARK, CLAUDIO GARCIA

BT/PTC/0102 – Reconhecimento Automático do Locutor Utilizando a Rede Neural Artificial *Field Distributed Memory* – FDM – MARCELO BLANCO, EUVALDO F. CABRAL JR.

BT/PTC/0103 – Algoritmos de Filtragem e Previsão em Modelos de Volatilidade – FERNANDO LOVISOTTO, OSWALDO L. V. COSTA