



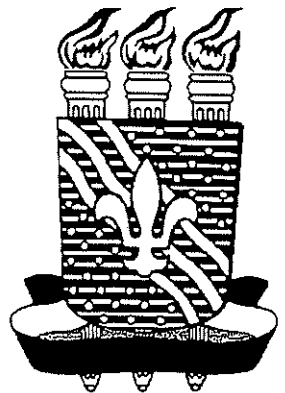
II Congresso Nacional de Engenharia Mecânica

ANALIS

# PATROCINADORES



## ORGANIZAÇÃO



UNIVERSIDADE FEDERAL DA  
PARAÍBA

## PROMOÇÃO



ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA  
DE CIÊNCIAS MECÂNICAS  
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE CIÊNCIAS MECÂNICAS

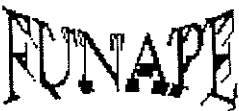
## APOIO



COORDENAÇÃO DE  
APERFEIÇOAMENTO DE  
PESSOAL DE NÍVEL SUPERIOR



CONSELHO NACIONAL DE  
DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E  
TECNOLÓGICO



FUNDAÇÃO DE APOIO A PESQUISA



ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE  
PETRÓLEO



PREFEITURA MUNICIPAL DE JOÃO  
PESSOA



COMPANHIA DE PROCESSAMENTO DE DADOS DA  
PARAÍBA



**II CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**II NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING**  
12 a 16 de Agosto de 2002 - João Pessoa - PB

**MODELAMENTO DE ERROS EM MÁQUINAS DE MEDIR A TRÊS  
COORDENADAS UTILIZANDO TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS.**

**Benedito Di Giacomo**

Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo  
Av. Trabalhador SãoCarlense, 400 - Centro - Cep 13566-590  
e-mail: [bgiacommo@sc.usp.br](mailto:bgiacommo@sc.usp.br)

D536m

**Alessandro Marques**

Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo  
Av. Trabalhador SãoCarlense, 400 - Centro - Cep 13566-590  
e-mail: [amarques@sc.usp.br](mailto:amarques@sc.usp.br)

**Rosenda Arencibia Valdés**

Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo  
Av. Trabalhador SãoCarlense, 400 - Centro - Cep 13566-590  
e-mail: [arvaldes@sc.usp.br](mailto:arvaldes@sc.usp.br)

**Resumo:** O desempenho metrológico de uma Máquina de Medir a Três Coordenadas (MM3C) está relacionado com a sua capacidade de medir peças com a precisão requerida ou desejada. No entanto, como todo instrumento de medição, as MM3Cs possuem erros inerentes à sua estrutura que afetam a acuracidade e a repetibilidade das medições, gerando o que se convencionou chamar de erro volumétrico. Tal erro pode ser obtido através de uma calibração da máquina. Recentemente, o uso da cinemática do corpo rígido, com matrizes de transformação homogênea para modelar os erros, tem sido muito utilizada para o modelamento de máquinas ferramentas e MM3Cs. A presente pesquisa tem por objetivo determinar as equações que sintetizam as componentes dos erros volumétricos através da teoria de transformações homogêneas. O sistema desenvolvido foi aplicado a uma MM3C. Durante a implementação e análise de erros, sistemas de coordenadas foram colocados em posições estratégicas, tais como, desempenho, ponte móvel, braço móvel e ponta da sonda. A fim de atingir o objetivo proposto, levantou-se os erros individuais de uma MM3C da marca Brown & Sharp do tipo Ponte Móvel, utilizando um sistema de Interferometria Laser HP.

**Palavras-chave:** Máquina de Medir a Três Coordenadas, Erro Volumétrico, Teoria das Transformações Homogêneas.

**1. INTRODUÇÃO**

A modelagem das Máquinas de Medir a Três Coordenadas tem crescido na sua importância pois através de modelos matemáticos é possível determinar a grandeza e o comportamento dos erros com o objetivo de compensá-los. Durante muitos anos tem-se dedicado tempo e esforço à modelagem matemática das MM3Cs. Técnicas variadas tem sido utilizadas para este fim.

A diferença entre o caminho real e o caminho ideal descrito pela ponta da sonda pode ser determinada através de um modelo matemático especialmente desenvolvido para a máquina avaliada. Tal modelo combina de forma conveniente os erros individuais de cada uma das direções

1303759  
170403

SYSNO	1303759
PROD	002365
ACERVO EESC	

preferências da máquina formando o que convencionalmente é chamado de erro volumétrico. Uma vez calculado o erro, ele pode ser usado para fins de compensação.

O modelo matemático dos erros pode ser construído através das seguintes técnicas: Análise Geométrica Estrutural; Análise Vetorial dos Caminhos de Medição e a Análise Matricial através de Transformações Homogêneas. A seguir apresenta-se uma ampla abordagem das Transformações Homogêneas.

## 2. TRANSFORMADAS HOMOGÊNEAS:

Foi em 1876 que F. REULEAUX aplicou pela primeira vez as técnicas de transformações homogêneas nos problemas de cinemática, com a publicação do trabalho “Kinematics of Machinery” apresentou uma notação simbólica para descrever o comportamento de mecanismos.

DENAVIT e HARTEMBERG em 1955 desenvolveram uma notação simbólica, hábil para descrever completamente mecanismos de duas articulações. Esta notação forneceu uma análise poderosa e confiável baseada em matrizes algébricas. Apresentando o que é hoje conhecido como teoria das Transformações Homogêneas (TH).

Através desta técnica, e mediante o uso de matrizes de transformação 4x4, é possível representar movimentos de translação, de rotação ou a combinação desses dois, possibilitando estabelecer as relações entre partes móveis de um mecanismo e um sistema de coordenadas de referência.

Cada componente da máquina sofre rotações e translações com relação a um sistema de coordenadas, e cada um destes componentes pode ser representado por um sistema de coordenadas intermediário. Desta forma, através de vetores e matrizes é desenvolvida uma sistemática que generaliza a representação da posição e da orientação da sonda da máquina em relação ao sistema de coordenadas de referência. A definição do comportamento cinemático da máquina consiste na determinação das matrizes de transformação homogênea dos diferentes sistemas de coordenadas, com relação a um sistema de coordenadas.

HOCKEN et al (1977), modelaram através das matrizes de TH os erros angulares em máquinas de medir.

DI GIACOMO et al. (1997), utilizando técnica de TH, modelaram MM3Cs com o objetivo de determinar a influência dos termos de segunda ordem no erro volumétrico. Dois modelos foram desenvolvidos, um deles incluindo os termos de segunda ordem e um outro desprezando-os. Como resultado obteve-se que a inclusão dos termos de segunda ordem nos modelos acarreta uma diferença menor que 1nm, mostrando que eles podem ser desprezados, desde que o valor esperado dos erros volumétricos esteja na ordem do  $\mu\text{m}$ . No futuro próximo os termos de segunda ordem não poderão ser desprezados.

As TH é uma poderosa ferramenta matemática, com relativa facilidade de uso. Alguns conceitos fundamentais para conhecimento das Transformações Homogêneas serão explanados a seguir.

Primeiramente, deve ser entendido o que são as coordenadas homogêneas.

Um ponto Q pertencente a  $\mathcal{R}^n$  pode ser representado pelo vetor  $\vec{v}$  de n coordenadas em relação a um sistema de coordenadas cartesianas de referência. Em coordenadas homogêneas, o mesmo ponto é representado por um vetor que tem (n+1) coordenadas.

Seja então um ponto Q pertencente a um espaço tridimensional representado pelo vetor,

$$\Rightarrow \vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \quad (1)$$

onde  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  são os vetores unitários na direção dos eixos X, Y e Z respectivamente.

Em coordenadas homogêneas pode se escrever o ponto Q como o vetor  $\vec{v}$  da seguinte forma:

$$\vec{v} = [x \quad y \quad z \quad w]^T \quad (2)$$

onde :  $a = \frac{x}{w}$ ,  $b = \frac{y}{w}$  e  $c = \frac{z}{w}$  e w é chamado de fator de escala.

Então pode-se observar que se  $w = 1$  as coordenadas homogêneas são exatamente iguais as coordenadas cartesianas.

No caso, onde  $w = 0$ , temos a, b, c tendendo a infinito, esses vetores são usados para representarem direções ou ângulos.

RESHETOV & PORTMAN em 1988 dividiram a representação tridimensional, para vetores de 4ª ordem, em duas classes distintas, os autovetores e os não-autovetores. Os autovetores representam um ponto no espaço e sua 4ª coordenada homogênea é não nula. E os não-autovetores são aquelas que representam direções ou ângulos e seu fator escala é nulo.

Em um espaço tridimensional as Transformações Homogêneas são constituídas de matrizes 4x4. Estas servem para representar matematicamente os 6 (seis) graus de liberdade de um corpo rígido.

Considerando dois sistemas de coordenadas  $S_i$  e  $S_{i-1}$ .

$$T = \begin{bmatrix} O_{1x} & O_{2x} & O_{3x} & P_x \\ O_{1y} & O_{2y} & O_{3y} & P_y \\ O_{1z} & O_{2z} & O_{3z} & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde  $\bar{O}_1$ ,  $\bar{O}_2$ ,  $\bar{O}_3$  descrevem orientação de um sistema de coordenadas  $S_i$  com relação a outro sistema de coordenadas  $S_{i-1}$ . E o vetor  $\bar{P}$  descreve a posição relativa da origem do sistema  $S_i$  no sistema  $S_{i-1}$ .

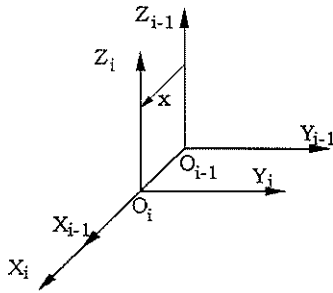
As três primeiras colunas da matriz da Equação 3 são não-autovetores e a quarta coluna é um autovetor.

No caso de matrizes de TH que representam movimentos de translação simples. Podemos considerar dois sistemas de coordenadas,  $S_i$  e  $S_{i-1}$ . Suponha que o sistema  $S_i$  tenha executado um movimento de translação em X com relação ao sistema  $S_{i-1}$ , Figura 1. Observe que os eixos coordenados caminham paralelos, havendo uma alteração apenas quanto à origem do sistema.

A notação comumente utilizada nas TH é  ${}^i T_j$  que é a matriz que descreve a posição e a orientação do sistema j com relação ao sistema i.

A matriz de TH que descreve o movimento de translação em X é dado pela equação 4.

A matriz de TH que descreve o movimento de translação em X é dado pela equação 4.

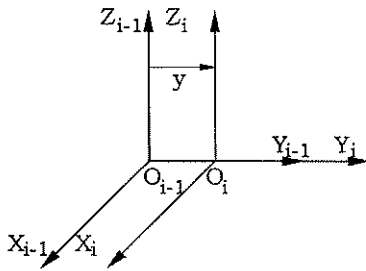


$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Figura 1 - Translação de um sistema de coordenadas na direção de X

Suponha agora que o sistema Si tenha executado um movimento de translação em Y com relação ao sistema Si-1, Figura 2.

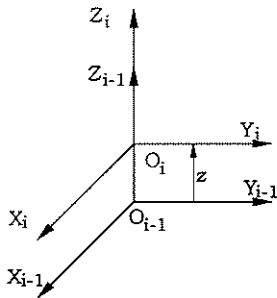
A matriz de TH que descreve o movimento de translação em Y é dado por 5.



$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Figura 2 - Translação de um sistema de coordenadas na direção de Y

Da mesma forma tem-se a equação (6) que mostra a execução de um movimento de translação em Z do sistema Si com relação ao sistema Si-1, mostrado na Figura 3.

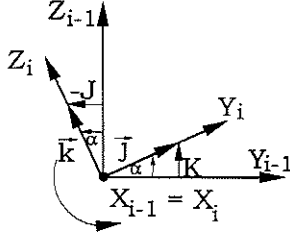


$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Figura 3 - Translação de um sistema de coordenadas na direção de Z

A matriz de TH que descreve o movimento de translação em Z é dado pela Equação 6.

No caso de matrizes de TH que representam movimentos de rotação. Seja  $S_i$  e  $S_{i-1}$  dois sistemas de coordenadas e  $\alpha$  o ângulo de rotação em torno de  $X$  que transforma o sistema  $S_{i-1}$  no sistema  $S_i$ .



$$\begin{aligned} i &= I + 0J + 0K \\ j &= 0I + \cos \alpha J + \sin \alpha K \end{aligned} \quad (7)$$

$$k = 0I - \sin \alpha J + \cos \alpha K$$

$$Rot(X, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

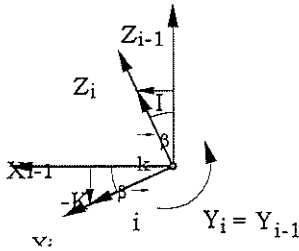
Figura 4 - Rotação  $\alpha$  do sistema em torno do eixo  $X$ .

Assumindo  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  os vetores unitários de direção no sistema  $S_i$ ,  $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$  os vetores unitários de direção no sistema  $S_{i-1}$ . Pode-se considerar que a origem do sistema  $S_{i-1}$  coincide com a origem do sistema  $S_i$ .

O sistema de equações 7 representa as novas direções do sistema de coordenadas, ou seja, os elementos de  $S_i$  em termos de  $S_{i-1}$ .

Então a matriz de transformação homogênea (Equação 8) que representa a rotação apresentada é dada pelas equações 7 agrupadas convenientemente, onde  $i, j, k$  são colocados na transposta e a quarta coluna representa a translação, que é zero devido a origem dos sistemas coincidirem. A última linha de zeros e um, dá a coluna o significado de rotação ou de translação, zero: rotação e um: translação.

Agora seja  $S_i$  e  $S_{i-1}$  dois sistemas de coordenadas e  $\beta$  o ângulo de rotação em torno de  $Y$  que transforma o sistema  $S_{i-1}$  no sistema  $S_i$ .



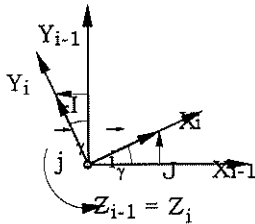
$$\begin{aligned} i &= \cos \beta I + 0J - \sin \beta K \\ j &= 0I + J + 0K \end{aligned} \quad (9)$$

$$k = \sin \beta I + 0J + \cos \beta K$$

$$Rot(Y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Figura 5 - Rotação  $\beta$  do sistema em torno do eixo  $Y$ .

Para rotação em torno de  $Z$ , considera-se dois sistemas de coordenadas  $S_i$  e  $S_{i-1}$  e  $\gamma$  o ângulo de que transforma o sistema  $S_{i-1}$  no sistema  $S_i$ .



$$\begin{aligned} i &= \cos \gamma I + \sin \gamma J + 0K \\ j &= -\sin \gamma I + \cos \gamma J + 0K \end{aligned} \quad (11)$$

$$k = 0I + 0J + K$$

$$Rot(Z, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Figura 6 - Rotação  $\beta$  do sistema em torno do eixo  $Z$ .

Com as matrizes descritas nas equações 4, 5 e 6 para translação e 8, 10 e 12 para rotação, pode-se representar os 6 graus de liberdade característicos de um corpo rígido, ou seja, a cada elemento de uma máquina pode-se associar um sistema de coordenadas, para descrever os movimentos destes elementos e modelar o desempenho total da máquina.

### 3. AS TÉCNICAS DE TRANSFORMAÇÕES HOMOGÊNEAS APLICADAS AS MM3CS

O equacionamento dos erros é fruto de um modelo matemático elaborado exclusivamente para a máquina considerada. O modelo matemático da MM3C da marca Brown & Sharpe de propriedade da USP-São Carlos foi elaborado tomando-se por hipótese que os elementos estruturais da máquina tem o comportamento de corpo rígido e, como tal, atuam sobre cada um deles seis erros individuais, cada um associado a um dos seis graus de liberdade de um corpo rígido (Paul, 1981).

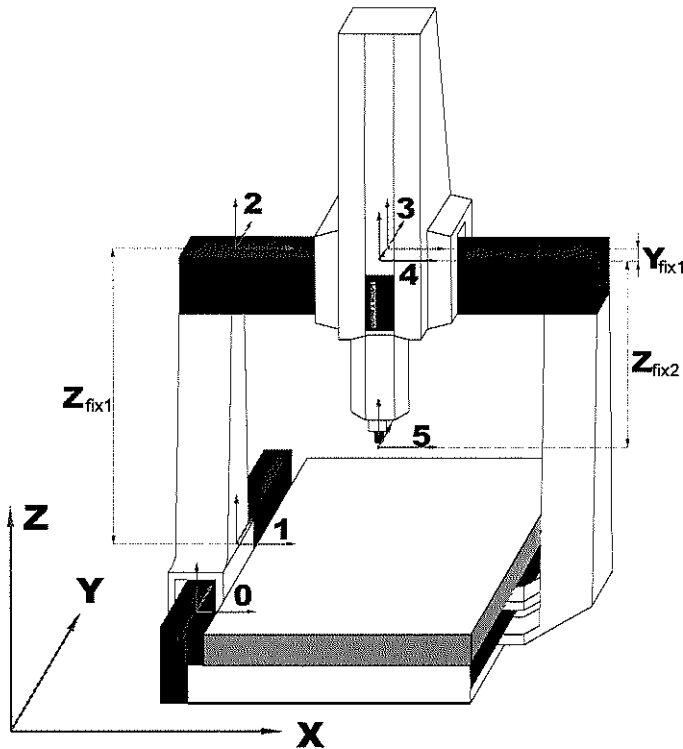


Figura 7 - Representação da MM3C tipo Ponte Móvel com os sistemas de coordenadas

Alguns conceitos fundamentais serão ainda explicados, antes de ser aplicado as MM3Cs.

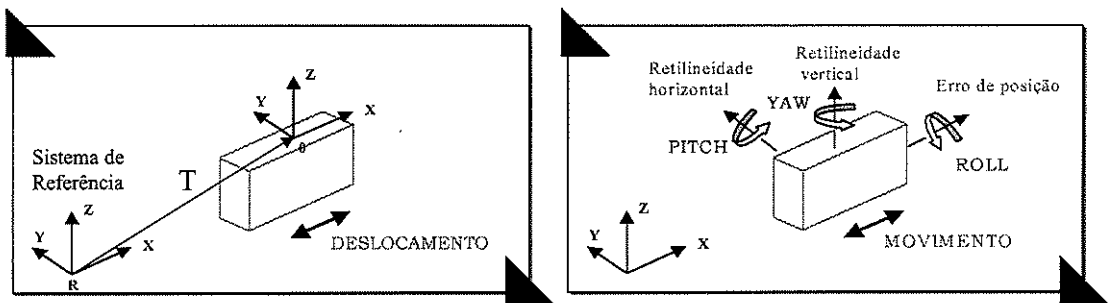


Figura 8 – a) Movimento de um carro transladando, b) movimento de um corpo rígido.



Na Figura 8a, pode-se observar dois sistemas de coordenadas, um sistema fixo a referência e outro solidário ao carro. Durante um deslocamento ideal a matriz de transformação que relaciona os 2 sistemas de coordenadas é dado pela equação:

$${}^R T_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X01+x \\ 0 & 1 & 0 & Y01 \\ 0 & 0 & 1 & Z01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

onde, X01, Y01 e Z01 são distâncias fixas entre as origens dos sistemas de referência e o sistema solidário ao carro.

No entanto os carros das máquinas não possuem movimentos perfeitos unidirecionais.

Para melhor entendimento, considere um carro de uma máquina como um corpo rígido, com a possibilidade de movimento de translação em apenas uma direção, como ilustra a Figura 8b. Observe que o movimento de deslocamento é realizado na direção X. No entanto, a leitura na escala do eixo X não indica o valor exato do deslocamento experimentado pelo carro. Este erro é denominado erro de posição ou de escala e denota-se por  $\delta x(x)$ .

As translações nas outras direções e rotações indesejáveis, que o carro experimenta são denominados de erros de retilineidade e angulares, respectivamente. Os erros de rotação são comumente conhecidos como pitch, yaw e roll conforme a direção do deslocamento do carro, e particularmente, para a ilustração da Figura 9, são respectivamente denotados por  $\epsilon_y(x)$ ,  $\epsilon_z(x)$  e  $\epsilon_x(x)$ .

Frequentemente a sequência das rotações que é utilizada para a construção da matriz de Transformação homogênea é roll, pitch e yaw. Especifica-se a ordem de rotação como

$$RPY(\epsilon_z, \epsilon_y, \epsilon_x) = \text{Rot}(z, \epsilon_z) \cdot \text{Rot}(y, \epsilon_y) \cdot \text{Rot}(x, \epsilon_x). \quad (14)$$

Através da multiplicação mostrada na equação 14 pode-se chegar a matriz resultante que descreve qualquer erro angular (PAUL, 1981):

$$E_{rot} = \begin{bmatrix} \cos(\epsilon_z) \cos(\epsilon_y) & \cos(\epsilon_z) \sin(\epsilon_y) \sin(\epsilon_x) - \sin(\epsilon_z) \cos(\epsilon_x) & \cos(\epsilon_z) \sin(\epsilon_y) \cos(\epsilon_x) + \sin(\epsilon_z) \sin(\epsilon_x) & 0 \\ \sin(\epsilon_z) \cos(\epsilon_y) & \sin(\epsilon_z) \sin(\epsilon_y) \sin(\epsilon_x) + \cos(\epsilon_z) \cos(\epsilon_x) & \sin(\epsilon_z) \sin(\epsilon_y) \cos(\epsilon_x) - \cos(\epsilon_z) \sin(\epsilon_x) & 0 \\ -\sin(\epsilon_y) & \cos(\epsilon_z) \sin(\epsilon_x) & \cos(\epsilon_z) \cos(\epsilon_x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Pode-se assumir que, para elementos móveis com um grau de liberdade para translação, os erros angulares são muito pequenos com valores bem próximos do zero ( $\alpha \cong 0$ ). Então é possível utilizar a seguinte aproximação,  $\sin(\alpha) = \alpha$  e  $\cos(\alpha) = 1$ . Portanto:

$$E_{rot} = \begin{bmatrix} 1 & -\epsilon_z & \epsilon_y & 0 \\ \epsilon_z & 1 & \epsilon_x & 0 \\ -\epsilon_y & \epsilon_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

onde :  $\epsilon_x$  é o erro rotacional infinitesimal em torno do eixo x,  $\epsilon_y$  é o erro rotacional infinitesimal em torno do eixo y, e  $\epsilon_z$  é o erro rotacional infinitesimal em torno do eixo z.

A matriz de erro total é obtida através do produto matricial expresso em (17) e o resultado desta operação é dado pela matriz (18).

$$E_{total} = E_{trans} \cdot E_{rot} \quad (17)$$

$$E_{total} = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y & \delta_x \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x & \delta_y \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 & \delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

É importante observar que esta matriz de transformação homogênea, Equação 18, contém todos os erros geométricos de carros de movimentação em translação de máquinas (Paul, 1981).

### 3.1. Caminho da Sonda

A posição dos sistemas de coordenadas e os braços fixos podem ser verificados na **Erro! A origem da referência não foi encontrada..**

A matriz que representa o movimento do sistema de coordenadas 1 com relação ao sistema 0 pode ser escrito como:

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_z(y) & \varepsilon_y(y) & \delta_x(y) \\ \varepsilon_z(y) & 1 & -\varepsilon_x(y) & \delta_y(y) + Y_{reg} \\ -\varepsilon_y(y) & \varepsilon_x(y) & 1 & \delta_z(y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

onde  $Y_{reg}$  é a medida indicada no mostrador da MM3C.

Em relação ao sistema de coordenadas 2 com relação ao sistema 1 pode ser escrito abaixo, por se tratar de uma translação pura entre os dois sistemas num mesmo corpo rígido não apresenta nenhum erro.

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & Z_{fix1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

onde  $Z_{fix1}$  é uma distância fixa e é chamado de Braço de Abbè.

Porém ocorreu uma mudança do eixo Y para o eixo X, o sistema 2 esta na parte do eixo X. Se tratando de um instrumento mecânico e que depende de ajustes, podem ocorrer possíveis erros de ortogonalidade entre os sistemas 1 e 2. Neste caso, definisse uma matriz de ortogonalidade  $[O_{XY}]$  dada por:

$$O_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_z0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_z0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

A matriz de transformação entre os sistemas 2 e 3 está descrita em (22).

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_z(x) & \varepsilon_y(x) & X_{reg} + \delta x(x) \\ \varepsilon_z(x) & 1 & -\varepsilon_x(x) & \delta y(x) \\ -\varepsilon_y(x) & \varepsilon_x(x) & 1 & \delta z(x) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

onde  $X_{reg}$  é a medida indicada no mostrador da máquina.

Entre os sistemas 3 e 4 há apenas uma translação pura e possíveis erros de ortogonalidade, isto deve-se ao sistema 4 estar sobre o eixo Z que desliza sobre mancais fixos no carro X. Neste caso será modelado o erro de ortogonalidade entre os eixos Z e X e Z e Y. A matriz de ortogonalidade será dada por:

$$O_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon_y 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon_x 0 & 0 \\ -\varepsilon_y 0 & \varepsilon_x 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

O sinal que é negativo indica que a translação ocorre no sentido contrário à direção positiva do eixo.

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_z(z) & \varepsilon_y(z) & \delta x(z) \\ \varepsilon_z(z) & 1 & -\varepsilon_x(z) & \delta y(z) - Y_{fix} \\ -\varepsilon_y(z) & \varepsilon_x(z) & 1 & \delta z(z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

A outra designada por  ${}^4T_5$  modela o comprimento fixo do término do eixo Z até o centro da esfera da sonda.

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -Z_{fix2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

onde  $Z_{fix2}$  é o Braço de Abbè.

### 3.2. Caminho da peça

O vetor que representa o caminho da peça, sem erros, tem como componentes as translações ideais e são observadas na matriz de transformação abaixo. Observe que nesta matriz não estão incluídos os erros de rotação e também os erros de translação.

$${}^0T_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_{reg} \\ 0 & 1 & 0 & Y_{reg} - Y_{fix1} \\ 0 & 0 & 1 & Z_{fix1} - Z_{fix2} - Z_{reg} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

onde:  $X_{reg}$ ,  $Y_{reg}$  e  $Z_{reg}$  são as leituras mostradas na máquina.

### 3.3. Matriz de Erro Final da Máquina

Com o correto emprego da técnica de modelamento pode-se determinar o erro de posicionamento relativo entre a ponta da sonda e peça através da expressão (27).

$$E = [T_{sonda}]^{-1} \times T_{peça}, \quad (27)$$

onde  $T_{sonda}$  e  $T_{peça}$  representam respectivamente a posição do ponto de trabalho da ponta da sonda e o ponto ideal de contato na peça, isto tudo com relação ao sistema de referência.

O sistema sonda com relação ao sistema referência é dado pelo produto das matrizes:  $T_{sonda} = {}^0T_1 \times {}^1T_2 \times O_{XY} \times {}^2T_3 \times O_{XYZ} \times {}^3T_4$  e o sistema peça com relação ao sistema referência é dado por  $T_{peça} = {}^0T_5$

Realizando as operações indicadas nas equações obtém-se a matriz de erro sintetizado.

Considerando que a máquina analisada utiliza uma sonda de ponta única, pode-se tomar apenas a última coluna da matriz encontrada como resultado. E o erro para cada direção vai ser dada por:

$$Ev_x = \frac{\delta x(x) + \delta x(y) + \delta x(z) + (\varepsilon_0 + \varepsilon(y)) * Y_{fix1} + \varepsilon_0 * (Z_{reg} + Z_{fix2}) - \varepsilon(x) * (-Z_{reg} - Z_{fix2}) - \varepsilon(z) * (-Z_{reg} - Z_{fix2}) + \varepsilon(y) * (Z_{reg} + Z_{fix1} + Z_{fix2})}{Z_{fix2}} \quad (28)$$

$$Ev_y = \frac{\delta y(y) + \delta y(x) + \delta y(z) + X_{reg} * (\varepsilon_0 + \varepsilon(y)) + Z_{reg} * (\varepsilon_0 - \varepsilon(x) + \varepsilon(y) - \varepsilon(z)) - Z_{fix2} * (\varepsilon_0 - \varepsilon(x) + \varepsilon(y) - \varepsilon(z)) - \varepsilon(y) * Z_{fix1}}{Z_{fix2}} \quad (29)$$

$$Ev_z = \delta z(z) + \delta z(x) + \delta z(y) - \varepsilon(y) * X_{reg} - \varepsilon(x) * Y_{fix2} - \varepsilon(y) * Y_{fix2} \quad (30)$$

onde:  $\delta a(a) \rightarrow$  erro de posição “a”;  $\delta a(b) \rightarrow$  erro de retilineidade do eixo “b” devido ao movimento no eixo “a”;  $\varepsilon a(b) \rightarrow$  erro angular em torno do eixo “a” devido ao movimento no eixo “b”;  $\varepsilon w0 \rightarrow$  erro de ortogonalidade entre os eixos que pertencem ao plano perpendicular ao eixo “w”.

#### 4. CONCLUSÕES

Foi feita uma vasta revisão bibliográfica sobre as Técnicas de Transformações Homogêneas e um modelamento cinemático para a Máquina de medir Brown & Sharpe modelo Ponte Móvel foi realizado.

De acordo com o objetivo deste trabalho a conclusão mais relevante está relacionada com a utilização da teoria das Transformações Homogêneas. Esta exige um trabalho computacional relativamente grande, principalmente quando os termos de segunda ordem são considerados.

A metodologia proposta mostrou-se eficiente na análise da estrutura da máquina.

Apesar de não ter sido mostrado outros métodos para que se proceda uma comparação entre métodos, o resultado mostra-se coerente e dentro das estimativas realizadas.

A metodologia é aplicável a todas as máquinas complexas e, portanto, eventualmente pode ser utilizada também na comparação de máquinas ferramentas.

#### 5. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer a FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo suporte financeiro a esse trabalho.

#### 6. REFERÊNCIAS

- DENAVIT, J. & HARTENBERG, R. S. (1955) “A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices”. Journal of Applied Mechanics, 215-221, Jun.
- DI GIACOMO, B.; MARTINEZ ORREGO, R.M.; VIEIRA SATO, D.P. (1997). “An exploratory study about the second order errors in mathematical models of coordinate measuring machines”. Metrocal.
- HOCKEN, R. et al (1977) “Three Dimensional Metrology”. CIRP Annals, v.26, p. 403-408.
- PAUL, R. P. (1981) “Robot manipulators: mathematics, programming, and control” Massachusetts, The MIT Press, p. 1-278
- RESHETOV, D. N. & PORTMAN, V. T. (1988) “Accuracy of machine tools” s.ed. The American Society of Mechanical Engineers.

## Coordinate measuring machine modelling using homogeneous transformation

**Abstract:** *The metrological performance of a coordinate measuring machine is related to its capability of measuring mechanical elements within the required or desired precision. CMMs, however, present errors that are inherent to its structure and affect accuracy and repeatability during the measurement process, producing what was conventionally labelled as volumetric errors. This error can be obtained by means of machine calibration and mathematical modelling, which describes as the individual errors of all the components. The utilization of rigid body kinematics with homogeneous transformation matrix has become more popular in recent days. This research aims to determine the volumetric errors components synthesization equations making use of the theory of homogeneous transformation. The developed system was applied to a CMM. During the error analysis implementation, coordinate systems were placed on strategically defined positions, as table to support the part to be measured, moving bridge, moving arm and probe tip. Looking forward the completion of the proposed objective, individual errors of a Brown & Sharp CMM were collected using an HP interferometric laser system.*

**Keywords:** *Coordinate measuring machine, volumetric errors, Homogeneous transformation theory.*