

Trabalho



Título em Português:	Substituindo a Condição de Hermiticidade pela Pseudo-Hermiticidade
Título em Inglês:	replacing the hermiticity condition with pseudo-hermiticity
Autor:	Diogo Macedo de Mello
Instituição:	Universidade de São Paulo
Unidade:	Instituto de Física de São Carlos
Orientador:	Miled Hassan Youssef Moussa
Área de Pesquisa / SubÁrea:	Física Geral
Agência Financiadora:	FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo

Substituindo a Condição de Hermiticidade pela Pseudo-Hermiticidade

Diogo Macedo de Mello

Miled Hassan Youssef Moussa

Universidade de São Paulo

diogomacedomello@usp.br

Objetivos

O objetivo dessa pesquisa foi estudar as condições para um Hamiltoniano ter autovalores de energia reais e conservação da norma, para que este possa representar um sistema físico. Primeiro, estudamos a possibilidade de substituir a hermiticidade por uma condição mais abrangente, uma simetria antilinear exata do Hamiltoniano. Então, analisamos pseudo-hermiticidade, condição equivalente à anterior, e como utilizá-la para tratar hamiltonianos pseudo-hermitianos independentes e dependentes do tempo.

Métodos e Procedimentos

Esta pesquisa se constituiu em um estudo bibliográfico de obras selecionadas pelo orientador. Foi realizada uma leitura crítica e sumarização das principais ideias e métodos.

Resultados

A priori, verificamos que se para um Hamiltoniano não hermitiano $\tilde{H}$ vale a simetria

$$[A, \tilde{H}] = 0 \quad (1)$$

para um operador antilinear A , seus autovalores são pares de complexos conjugados. Ainda, se a simetria é exata, ou seja, $\tilde{H}$ e A compartilham os mesmos autoestados, então os autovalores são reais.

A seguir, estudamos a condição de que o hamiltoniano não hermitiano $\tilde{H}$ é pseudo-hermitiano, isto é, existe operador η tal que

$$H = \eta \tilde{H} \eta^{-1} \quad (2)$$

seja hermitiano. Nesse caso, verificamos que o operador $\tilde{H}$ se comporta sob produto escalar em relação à métrica

$$\Theta = \eta^\dagger \eta \quad (3)$$

da mesma forma que o operador hermitiano H sob o produto em relação à identidade. Portanto, a evolução da norma é unitária e ambos compartilham do mesmo espectro de energias, desde que definamos que $\tilde{H}$ deve ser tratado sob esta nova métrica. Vale ressaltar que demais operadores também são observáveis do sistema apenas se hermitianos sob esta mesma métrica.

Em seguida, analisamos o caso para hamiltonianos $\tilde{H}(t)$ não hermitianos dependentes do tempo, no qual a transformação de pseudo-hermiticidade é dada por um operador $\eta(t)$ também dependente do tempo, nos levando ao Hamiltoniano hermitiano

$$H = \eta \tilde{H} \eta^{-1} + i\hbar \frac{\partial \eta}{\partial t} \eta^{-1}. \quad (4)$$

A condição para observabilidade ainda é hermiticidade sob a métrica Θ , logo, a própria energia não é um observável.

Ainda para o tratamento de hamiltonianos dependentes do tempo, introduzimos os invariantes de Lewis-Riesenfeld $I(t)$, definidos pela equação

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H] = 0 \quad (5)$$

Estes são operadores que representam leis de conservação geradas por simetrias, e verificamos que nos permitem construir soluções $|\psi\rangle$ para a equação de Schrödinger da forma

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \exp(i\alpha_{\lambda}) |\lambda\rangle, \quad (6)$$

onde $|\lambda\rangle$ são autoestados do invariante e

$$\alpha_{\lambda}(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \langle \lambda, t' | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \lambda, t' \rangle dt'. \quad (7)$$

Nesse âmbito, analisamos um método que nos permite construir um invariante por meio de um ansatz.

Finalmente, utilizando esses métodos, pudemos solucionar alguns exemplos clássicos da literatura. Entre eles, os destaques são o Hamiltoniano para oscilador harmônico quântico com bombeamento quadrático independente do tempo

$$\tilde{H} = \omega(a^{\dagger}a + 1/2) + \alpha a^2 + \beta a^{\dagger 2} \quad (8)$$

para o qual encontramos os autovalores

$$E_n = \hbar\sqrt{\omega^2 - 4\alpha\beta}(n + 1/2); \quad (9)$$

e o Hamiltoniano para oscilador harmônico quântico com bombeamento linear dependente do tempo

$$\tilde{H}(t) = \omega(t)(a^{\dagger}a + 1/2) + \alpha(t)a + \beta(t)a^{\dagger} \quad (10)$$

para o qual construímos um autoestado a partir do estado coerente do invariante associado; além de indicar como seria a construção dos demais.

Conclusões

Neste estudo, verificamos que a condição de pseudo-hermiticidade é suficiente para garantir um espectro real de energia e a evolução unitária da norma. A introdução desta, a partir da nova métrica, possibilita tratar uma nova classe de operadores, que anteriormente era impossível devido à imposição de hermiticidade. Ainda, atestamos que para hamiltonianos pseudo-hermitianos dependentes do tempo, apesar de a própria energia não ser observável, a evolução da norma é unitária e existe observabilidade de outros operadores.

Agradecimentos

Agradecimentos à FAPESP pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] C.M. Bender and S Boettcher. Phys. Rev. Lett. 80, 5243, 1998.
- [2] A. Mostafazadeh. Journal of Mathematical Physics, 43(1):205–214, 2002.
- [3] A. Mostafazadeh. J. Math. Phys. 43, 205; 2814; 3944, 2002.
- [4] A. Mostafazadeh. Journal of Mathematical Physics, 43(8):3944–3951, 2002.
- [5] A. Fring and M. H. Y. Moussa. Phys. Rev. A 93, 042114, 2016.
- [6] L. F. Alves da Silva, R. A. Dourado, and M. H. Y. Moussa. SciPost Phys. Core 5, 012, 2022.
- [7] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld. J. Math. Phys. 10, 1969.
- [8] L. F. Alves da Silva, R. A. Dourado, and M. H. Y. Moussa. Phys. Rev. A 98, 032102, 2018.
- [9] D.P. Musumbu, H.B. Geyer, and W.D. Heiss. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 40(2):F75–F80, 2007. 10
- [10] R. R. Puri and S. V. Lavande. Physics Letters 70A, 1979.

Replacing the Hermiticity Condition with Pseudo-Hermiticity

Diogo Macedo de Mello

Miled Hassan Youssef Moussa

Universidade de São Paulo

diogomacedomello@usp.br

Objectives

The objective of this research was to study the condition under which a Hamiltonian presents real energy spectrum and norm conservation, in order for it to be suitable for representing a physical system. At first, we studied the possibility of replacing hermiticity with a more general condition: an exact antilinear symmetry of the Hamiltonian. Then, we analyzed the pseudo-hermiticity, a condition equivalent to the latter, and began to utilize it to treat pseudo-Hermitian Hamiltonians both time-independent and time-dependent.

Methods and Procedures

This research consisted of a bibliographic study of works selected by the advisor. Then, a critical reading and summarization of their main ideas and methods was conducted.

Results

A priori, we verified that if a non-Hermitian Hamiltonian $\tilde{H}$ satisfies the symmetry

$$[A, \tilde{H}] = 0 \quad (1)$$

for an antilinear operator A , then the energy eigenvalues come in complex-conjugated pairs. Also, if the symmetry is unbroken, that is, if $\tilde{H}$ and A share the same eigenstates, the eigenvalues are real.

Then, we studied the condition of pseudo-hermiticity by the non-Hermitian Hamiltonian $\tilde{H}$, that is, there exists some operator η such that

$$H = \eta \tilde{H} \eta^{-1} \quad (2)$$

is Hermitian. In this case, we verified that the operator $\tilde{H}$ behaves in a scalar product defined by the metric

$$\Theta = \eta^\dagger \eta \quad (3)$$

the same way the Hermitian operator H behaves in a standard scalar product. Therefore, the evolution of the norm is unitary and both share their real energy spectrum, as long as we define that $\tilde{H}$ must be treated under this new metric. The general condition for an operator to be a system observable is that it must be Hermitian under the metric.

Next, we analyzed the case for time-dependent non-Hermitian Hamiltonians (t) , in which the pseudo-hermiticity transformation is given by an also time-dependent $\eta(t)$ operator, taking us to the Hermitian Hamiltonian

$$H = \eta \tilde{H} \eta^{-1} + i\hbar \frac{\partial \eta}{\partial t} \eta^{-1}. \quad (4)$$

The condition for observability still is hermiticity under the metric Θ , thus, the energy is no longer an observable.

Furthermore, for the treatment of time-dependent Hamiltonians, we introduced Lewis-Riesenfeld invariants $I(t)$, defined by the equation

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H] = 0 \quad (5)$$

These operators represent laws of conservation generated by symmetries, and we verified they allow us to construct solutions $|\psi\rangle$ for the Schrödinger equation in the form

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \exp(i\alpha_{\lambda}) |\lambda\rangle, \quad (6)$$

where $|\lambda\rangle$ are eigenstates of the invariant and

$$\alpha_{\lambda}(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t \langle \lambda, t' | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H | \lambda, t' \rangle dt'. \quad (7)$$

In this section, we studied a method that helps us find an invariant by the use of an ansatz.

Finally, utilizing these methods, we were able to solve some of literature classics examples. Between them, the noteworthy are the Hamiltonian for the time-independent quantum harmonic oscillator with quadratic pumping

$$\tilde{H} = \omega(a^{\dagger}a + 1/2) + \alpha a^2 + \beta a^{\dagger 2} \quad (8)$$

for which we found the real eigenvalues

$$E_n = \hbar\sqrt{\omega^2 - 4\alpha\beta}(n + 1/2); \quad (9)$$

and the Hamiltonian for the time-dependent quantum harmonic oscillator with linear pumping

$$\tilde{H}(t) = \omega(t)(a^{\dagger}a + 1/2) + \alpha(t)a + \beta(t)a^{\dagger} \quad (10)$$

for which we built an eigenstate from the coherent state of the associated invariant; besides showing how would follow the construction of the others.

Conclusion

In this study, we verified that the condition of pseudo-hermiticity is sufficient to ensure a real energy spectrum and unitary evolution of norm. Its introduction, through the adoption of this new metric, enables treating a new class of operators, that before was impossible due to the imposition of hermiticity. We also attested that, for time-dependent pseudo-Hermitian Hamiltonian, despite energy is not being an observable, there is unitarity in norm conservation and observability of other operators

Acknowledgements

We acknowledge FAPESP for the financial support.

References

- [1] C.M. Bender and S Boettcher. Phys. Rev. Lett. 80, 5243, 1998.
- [2] A. Mostafazadeh. Journal of Mathematical Physics, 43(1):205–214, 2002.
- [3] A. Mostafazadeh. J. Math. Phys. 43, 205; 2814; 3944, 2002.
- [4] A. Mostafazadeh. Journal of Mathematical Physics, 43(8):3944–3951, 2002.
- [5] A. Fring and M. H. Y. Moussa. Phys. Rev. A 93, 042114, 2016.
- [6] L. F. Alves da Silva, R. A. Dourado, and M. H. Y. Moussa. SciPost Phys. Core 5, 012, 2022.
- [7] H. R. Lewis and W. B. Riesenfeld. J. Math. Phys. 10, 1969.
- [8] L. F. Alves da Silva, R. A. Dourado, and M. H. Y. Moussa. Phys. Rev. A 98, 032102, 2018.
- [9] D.P. Musumbu, H.B. Geyer, and W.D. Heiss. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 40(2):F75–F80, 2007. 10
- [10] R. R. Puri and S. V. Lavande. Physics Letters 70A, 1979.