

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/272179290>

# Modelagem não linear mista para descrever o afilamento de árvores clonais de *Eucalyptus* sp

Article in *Scientia Forestalis/Forest Sciences* - December 2014

CITATIONS

11

READS

196

8 authors, including:



**Samuel de Padua Chaves Carvalho**

Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)

59 PUBLICATIONS 262 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



**Luiz Carlos Estraviz Rodriguez**

University of São Paulo

109 PUBLICATIONS 1,216 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



**Natalino Calegario**

Universidade Federal de Lavras (UFLA)

96 PUBLICATIONS 536 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



**Taciana Villela Savian**

University of São Paulo

42 PUBLICATIONS 380 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



ADVANCED REMOTE SENSING TECHNOLOGIES TO SUPPORT FOREST MANAGEMENT. Funding by Portuguese Science Foundation (SFRH/BD/52408/2013) [View project](#)



LiDAR Remote Sensing of Forest Resources [View project](#)

Modelagem não linear mista para descrever o  
afilamento de árvores clonais de *Eucalyptus* spNon linear mixed modeling to describe  
the taper of clonal *Eucalyptus* spSamuel de Pádua Chaves e Carvalho<sup>1</sup>, Luiz Carlos Estraviz Rodriguez<sup>2</sup>,  
Natalino Calegario<sup>3</sup>, Taciana Villela Savian<sup>4</sup>, Mariana Peres de Lima<sup>5</sup>,  
Carlos Alberto Silva<sup>6</sup>, Adriano Ribeiro de Mendonça<sup>7</sup> e Marcos Felipe Nicoletti<sup>8</sup>

---

**Resumo**

Por meio desse trabalho avaliou-se a qualidade do modelo logístico como uma função de afilamento para estimar o volume individual de árvores clonais de *Eucalyptus* sp em diferentes classes de idades e diâmetro. Para fins de ajuste foi utilizado o método de regressão não-linear de efeitos mistos. As classes de diâmetro e de idade foram consideradas como efeitos aleatórios desse processo. O modelo foi ajustado três diferentes cenários, sendo eles: (i) ajuste do modelo no seu formato original considerando classe de diâmetro nas diferentes classes de idade com efeito aleatório; (ii) ajuste do modelo no seu formato original considerando classe de diâmetro nas diferentes classes de idade com efeito aleatório mais a adição da altura total como covariante; (iii) relativização do modelo original pela altura total e pelo diâmetro considerando a idade como efeito aleatório. Ao se comparar os dois primeiros cenários, o erro-padrão foi reduzido em 40%, passando de 1,4727 para 0,8970 cm. Ao confrontar o segundo e terceiro cenários para fins de estimativa volumétrica, concluiu-se que a precisão aumentou em 1,3% com aplicação do modelo do terceiro cenário, além de melhorias significativas no gráfico de dispersão dos valores preditos versus os observados.

**Palavras-chave:** Regressão Mista; Covariante; Modelos não lineares.

**Abstract**

The aim of this work was to evaluate the quality of the logistic model related to taper in order to estimate the volume of the individual trees of *Eucalyptus* in a clonal plantation with different classes of age and diameter. For testing purposes, we used the non-linear mixed effects regression model, and the classes of diameter and age were considered as random effects of this process. The model considered three different scenarios: (i) fit of the model in its original format, considering diameter's class within different age classes with random effect; (ii) fit of the model in its original format, considering diameter's class within different age classes with random effect plus the addition of total height as covariate; and (iii) relativization of the original model for diameter and total height and by considering age as a random effect. In short, comparing the first two scenarios, the standard error was reduced by 40 %, ranging from 1.4727 to 0.8970 cm, and when comparisons were made between the second and third scenarios for volume estimation purposes, an increase of the model accuracy to 1.3 % with the application of the third scenario was observed; furthermore, improvements in the scatter plot of the observed versus predicted values were observed.

**Keywords:** Mixed Regression; Covariate, Nonlinear models.

---

<sup>1</sup>Doutor, Professor Adjunto. UFMT - Universidade Federal de Mato Grosso - 78060-900, Cuiabá-MT. E-mail: [spccarvalho@ufmt.br](mailto:spccarvalho@ufmt.br).

<sup>2</sup>Doutor, Livre Docente do Departamento de Ciências Florestais. USP - Universidade de São Paulo - ESALQ - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz". Av. Pádua Dias, 11, - Caixa Postal 09, 13418-900 - Piracicaba - SP - Brasil. E-mail: [lcer@usp.br](mailto:lcer@usp.br)

<sup>3</sup>Doutor, Professor Adjunto. UFPA - Universidade Federal de Lavras - Caixa Postal 3037. 37.200-000, Lavras - MG - Brasil. E-mail: [calegari@dcf.ufla.br](mailto:calegari@dcf.ufla.br)

<sup>4</sup>Professora Doutora do Departamento de Ciências Exatas. USP - Universidade de São Paulo - ESALQ - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz". Av. Pádua Dias, 11, - Caixa Postal 09, 13418-900 - Piracicaba - SP - Brasil. E-mail: [tvsvavian@usp.br](mailto:tvsvavian@usp.br)

<sup>5</sup>Mestre, Professora Assistente. UFMT - Universidade Federal de Mato Grosso. Av. Alexandre Ferronato, 1200, Setor Industrial - 78.557-267 - Sinop-MT. E-mail: [marianaperes@ufmt.br](mailto:marianaperes@ufmt.br)

<sup>6</sup>Mestre, Programa de Pós-Graduação em Recursos Florestais. USP - Universidade de São Paulo - ESALQ - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz". Av. Pádua Dias, 11, - Caixa Postal 09, 13418-900 - Piracicaba - SP - Brasil

<sup>7</sup>Doutor, Professor Adjunto. UFES - Universidade Federal do Espírito Santo. Av. Governador Lindemberg, 316, CEP 29550-000, Jerônimo Monteiro-ES. E-mail: [ribeiroflorestal@yahoo.com.br](mailto:ribeiroflorestal@yahoo.com.br)

<sup>8</sup>Mestre, Professor do Departamento de Engenharia Florestal da UDESC/CAV, Av. Luis de Camões, 2090, Lages-SC, 88.520-000. E-mail: [nicoletti@cav.udesc.br](mailto:nicoletti@cav.udesc.br)

## INTRODUÇÃO

Para Couto e Vetorazzo (1999) uma das principais finalidades do inventário florestal é a quantificação do estoque de madeira comumente expresso em volume por unidade de área. Sua quantificação pode ser dada diretamente por métodos destrutivos ou indiretamente por métodos não destrutivos. Leite e Andrade (2002) propuseram uma nova metodologia para conduzir inventários sem a necessidade do abate de árvores; ela é também conhecida como método da altura relativa. Os autores comentam que se trata de uma metodologia relativamente rápida e eficaz com bons níveis de precisão para conduzir inventários florestais sem a necessidade do uso de equações volumétricas para estimativa do volume individual de árvores.

Equações de volume são tradicionalmente empregadas quando o objetivo principal de sua aplicação é prever o volume de árvores destinadas apenas a um único produto. Quando o objetivo do estudo é dar usos mais nobres à floresta, torna-se necessário o emprego de técnicas mais sofisticadas de modelagem como o uso de funções de aflamento. As funções de aflamento na sua essência mais simples visam representar a forma da árvore por meio de um modelo matemático, possibilitando estimar número de toras vinculadas a um diâmetro mínimo de uso e estimar volume nas mais variadas porções do tronco, tradicionalmente conhecido como sortimentos florestais (HUSCH et al., 1972; AHRENS; ROBERT, 1981 apud QUEIROZ et al., 2006).

Modelos de aflamento visam, portanto, retratar as variações mencionadas anteriormente com a finalidade de estimar o volume de madeira considerando as árvores como um sólido de revolução. Na literatura florestal, muitos são os trabalhos que envolvem esse procedimento, como em Schöepfer (1966), que propôs o uso de um modelo polinomial de 5º grau, o qual relativiza o aflamento das árvores em função do diâmetro medido a 1,30 m do solo (DAP) e pela altura total. Segundo Figueiredo Filho et al., (1996) funções de aflamento têm sido usadas no Brasil desde os anos 70 e a classe dos modelos polinomiais são as mais utilizadas para descrever as variações no tronco de plantações de *Pinus taeda* e *Pinus elliotti* na região sul do Brasil.

Demaerschalk (1972) propôs um modelo de aflamento compatível com equações de volume para descrever as variações do tronco de árvores de espécies comerciais na colônia britânica.

Na mesma linha de equações compatíveis, Jiang et al., (2005) propuseram um modelo polinomial segmentado compatível com uma equação de volume para duas eco-regiões do oeste da Virginia. Em seu trabalho, os autores avaliam a compatibilidade de predição entre os modelos de Max e Burkhart (1976) e Clark III et al. (1991) com a equação de volume gerada pela integração das funções citadas e verificaram que, em cinco das sete classes de altura em que foram preditos os valores de volume, os erros foram relativamente baixos.

No Brasil segundo Figueiredo Filho (1996), os trabalhos, na sua grande maioria, avaliam modelos polinomiais para descrever o aflamento das árvores, modelos esses classificados como lineares. Porém para Santos (1996), os modelos não lineares são preferíveis para fenômenos biológicos devido a flexibilidade de aplicação que esta classe de modelos proporciona. Alguns autores como Horle et al. (2010), Mendonça et al. (2007); Pires e Calegario (2007) comprovaram a superioridade dos modelos não-lineares com relação aos lineares na modelagem do perfil de árvores.

Diante do exposto, nesse trabalho foi abordada a classe de modelos não-lineares para descrever o aflamento de árvores clonais do gênero *Eucalyptus* sob as hipóteses de que: o modelo não-linear sigmoidal misto (M.N.L.S.M.) explica com maior grau de precisão as variações de altura no tronco quando comparado à sua formulação básica com efeitos fixos; o M.N.L.S.M. heterocedástico melhora a distribuição dos resíduos quando comparado ao homocedástico, o que implica em estimações mais confiáveis dos parâmetros do modelo.

## MATERIAL E MÉTODOS

### Caracterização da área de estudo

O trabalho foi realizado em povoamentos monoclonais de *Eucalyptus* sp localizados no estado de São Paulo e pertencentes à empresa Fibria Celulose. Foram coletados dados de quinze talhões distribuídos em seis fazendas (Tabela 1).

De acordo com Molion (1975) apud Macedo (2009), o clima da região é do tipo Aw, conforme classificação de Köppen, com um total anual de precipitação em torno de 1.100 mm, em que há uma estação seca de inverno com totais mensais de precipitação inferiores a 50 mm, que ocorre entre os meses de abril e setembro. As temperaturas médias do ar oscilam entre 17,7°C em julho e 23,9°C em fevereiro, com

**Tabela 1.** Lista das fazendas experimentais com suas respectivas informações cadastrais.**Table 1.** Experimental stands with cadastral informations.

Projeto	Ano Plantio	Município	Regime	Mat. Genético	Espaçamento	Area (ha)	N_Talhoes
Jataí	2004	PARAIBUNA (SP)	Implantação	D	3,00X2,00	79,33	3
Patizal do Vale Feliz	2003	PARAIBUNA (SP)	Reforma	C	3,00X2,00	53,71	2
Santa Cecilia	2005	SÃO LUÍS DO PARAITINGA (SP)	Implantação	D	3,00X2,00	57,58	2
Santa Terezinha V	2008	JACAREÍ (SP)	Implantação	B	3,00X2,00	94,16	2
Santa Terezinha VI	2009	JACAREÍ (SP)	Implantação	C	3,00X3,00	29,76	2
	2010	JACAREÍ (SP)	Implantação	A	3,00X2,50	5,06	1
São José III	2006	SÃO LUÍS DO PARAITINGA (SP)	Reforma	D	3,00X2,00	138,96	3
Total geral						458,56	15

umidade relativa média do ar em torno de 76%, o que, segundo Silva (1989), caracteriza uma região de clima ameno.

Os solos dessa região são predominantemente do tipo Latossolo Vermelho-Amarelo fase rasa, com probabilidade de ocorrência de Cambissolos e Podzólicos, com textura argilosa (LEPSH; OLIVEIRA, 1987; EMBRAPA, 1999; BRASIL, 1960 apud MACEDO, 2009).

Quanto ao manejo empregado na área, todos os talhões estão sob regime de alto fuste e espaçamento predominante de 3,0m na entrelinha e 2,0m na linha de plantio.

### Base de dados

Para constituir a base de dados foram cubadas rigorosamente, 594 árvores no período de julho a agosto de 2011, distribuídas aleatoriamente em classes de diâmetro e idade (Tabela 2), totalizando 8.078 observações. De cada árvore abatida foram mensurados os diâmetros nas posições de 0,1; 0,7; 1,3; 2,0 m e, posteriormente, de 2,0 em 2,0 m. Foram mensuradas também as informações de altura total (HT) em metros; diâmetro à altura do peito medido a 1,30 m do solo (DAP) em centímetros; e altura comercial (HC) em metros, sendo que esta última corresponde à posição onde o diâmetro é igual a sete centímetros com casca.

**Tabela 2.** Base de dados.**Table 2.** Data base.

Classe de Idade (anos)	Classe Diamétrica (cm)					Total
	< 10	10 --  13	13 --  16	16 --  19	19 --  22	
2	6	0	0	0	0	6
3	25	5	0	0	0	30
4	11	147	203	5	0	366
5	1	9	46	9	1	66
6	0	8	24	10	0	42
7	1	11	22	6	2	42
8	1	4	23	12	2	42
<b>Total</b>	<b>49</b>	<b>196</b>	<b>320</b>	<b>48</b>	<b>11</b>	<b>594</b>

O volume árvore a árvore foi obtido pelo somatório do volume das seções calculado pelo método de Smalian conforme a equação a seguir:

$$V_{ij} = \sum_{i=0,1}^{HT} \frac{g_{ij} + g_{ij+1}}{2} L$$

Em que:  $V_i$  = volume da i-ésima posição da j-ésima árvore ( $m^3$ );  $g_{ij}$  = área seccional na i-ésima posição da j-ésima árvore ( $m^2$ );  $g_{ij+1}$  = área seccional na i+1-ésima posição da j-ésima árvore ( $m^2$ );  $L$  = comprimento da seção (m).

### Modelo avaliado

O uso da função logística para descrever o afilamento de árvores foi abordado por Calegario (2002) e visa descrever as variações da altura quando o diâmetro também varia. Esta abordagem se difere das demais tradicionalmente utilizadas na ciência florestal, pois neste caso, as variações do diâmetro é a variável independente do modelo.

A forma de ajuste do modelo é:

$$h_{ij} = \phi_{1i} + \frac{\phi_{2i} - \phi_{1i}}{1 + \exp[(\phi_{3i} - r_{ij})/\phi_{4i}]} + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

Em que:  $h_{ij}$  = altura da i-ésima árvore na j-ésima posição do fuste (m);  $r_{ij}$  = raio da i-ésima árvore na j-ésima posição do tronco (cm);  $\Phi'_{is}$  = parâmetros da regressão de efeitos fixos e aleatório;  $e_{ij}$  = erro aleatório.

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \Phi_{1i} \\ \Phi_{2i} \\ \Phi_{3i} \\ \Phi_{4i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1i} \\ \beta_{2i} \\ \beta_{3i} \\ \beta_{4i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \\ b_{4i} \end{bmatrix} = \beta + b_i$$

Sendo que  $b_i \sim N(0, \sigma^2)$  e  $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2 I)$ . O vetor  $\beta$  representa os efeitos fixos e o vetor  $b$  os efeitos aleatórios. Nesse estudo, foi investigado o efeito das classes diamétricas como o componente aleatório do modelo (Tabela 2). Inicialmente, assume-se que os resíduos em  $b_i$  são independentes para diferentes valores de  $i$  e independentes de  $\varepsilon_{ij}$  e variância constante. Se violada a suposição de homocedasticidade, uma alternativa é modelar esta estrutura por funções de variância.

De acordo com Pinheiro e Bates (2000) a função logística de quatro parâmetros (Eq.1), tem comportamento sigmoidal, duplamente assintótico horizontalmente onde seus pontos de assíntota são expressos pelos parâmetros  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$ . Na abordagem florestal das funções de aflamento seus parâmetros podem ser assim interpretados:

- $\Phi_1$  é a assíntota horizontal superior quando o raio da árvore tende a zero;
- $\Phi_2$  é a assíntota horizontal inferior quando o raio da árvore tende a um valor positivo infinito;
- $\Phi_3$  é o parâmetro de “meia vida” que representa o ponto de inflexão da curva quando a variável resposta é  $(\Phi_1 - \Phi_2)/2$ . É obrigatoriamente encontrado em um ponto entre a assíntota inferior e superior;
- $\Phi_4$  é o parâmetro que expressa a escala. Seu valor aproximado é obtido em um ponto que ocorre aproximadamente a 75% da diferença dos valores das assíntotas  $0,75(\Phi_1 - \Phi_2)$ .

As considerações mencionadas para interpretação dos parâmetros são de grande relevância, uma vez que os chutes iniciais necessários no processo de ajuste de modelos não lineares são um dos pontos limitantes para o uso dessa classe de modelos e, quando se têm interpretação direta destes parâmetros, os mesmos podem ser obtidos diretamente por uma simples análise de dispersão dos dados.

A forma original de ajuste (Eq.1) foi modificada com a finalidade de simplificar sua aplicação, gerando a equação 2 a seguir.

$$\frac{h_{ij}}{ht_i} = \Phi_{1i} + \frac{\Phi_{2i} - \Phi_{1i}}{1 + \exp\left[\left(\frac{\Phi_{3i} - r_{ij}}{rap_i}\right) / \Phi_{4i}\right]} + \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

Em que:  $rap_i$  = raio da  $i$ -ésima árvore medido a 1,30 m do solo, ou simplesmente raio medido à altura do peito (cm);  $ht_i$  = altura total da  $i$ -ésima árvore (m).

Os modelos (Eq.1 e Eq.2) foram testados em três cenários de ajuste:

§ Ajuste 1: Modelo logístico na sua forma original com ajuste por classe de diâmetro em diferentes classes de idade;

§ Ajuste 2: Modelo logístico na sua forma original, com ajuste por classe de diâmetro em diferentes classes de idade, com adição da variável altura total como covariante, avaliada sua significância;

§ Ajuste 3: Variação do modelo logístico, com ajuste por classe de idade.

A figura 1 ilustra as suposições do 3º cenário.

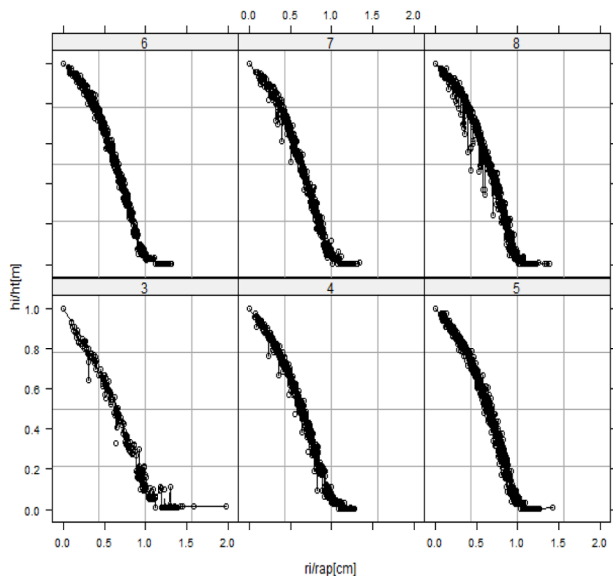


Figura 1. Tendência da relação  $hi/ht$  em função do  $ri/rap$  representando o terceiro cenário de ajuste.

Figure 1. Trend of relationship between  $hi/ht$  and  $ri/rap$ .

O volume por árvore foi obtido por técnicas de integração de sólido de revolução. O método descrito neste trabalho é conhecido na literatura como geração do volume de sólidos por invólucros cilíndricos ou volume por cascas cilíndricas (Leithold, 1994). O volume deste sólido é obtido pela soma de  $n$  elementos retangulares conforme a seguir:

$$V_j = \sum_{i=1}^n \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^n 2\pi R_i f(R_i) \Delta_i R \quad (3)$$

Em que:  $V_j$  = volume da  $j$ -ésima árvore em  $m^3$ ;  $V_i$  = volume do  $i$ -ésimo cilindro variando de 1 ...  $n$  cilindros invólucros ( $m^3$ );  $R_i$  = raio médio do  $i$ -ésimo cilindro gerado (m);  $f(R_i)$  = função ou modelo que expresse as variações da altura em metros, que é o modelo logístico abordado neste estudo;  $\Delta_i R$  = retângulo projetado no plano x-y de base  $[R_{i-1}, R_i]$  expresso em metros.

A formulação para volume deste sólido é a soma de Riemman que corresponde à aproximação da integral que retorna o volume do sólido de revolução conforme equação 4.

$$V = \int_{R=\min}^{R=\max} 2\pi R f(R) dR \quad (4)$$

Em que:  $R_{\min}$  representa o raio na posição de estimativa de raio mínimo e  $R_{\max}$  é o raio de estimativa do raio máximo.  $V$  é o volume da seção entre o raio mínimo e máximo.

A aplicação da integral é limitada ao valor máximo do diâmetro/raio mensurado no campo (DAP). Todavia, é necessário considerar como valor máximo o diâmetro na base da árvore para evitar tendências de subestimativas do volume individual das árvores. As equações 5 e 6 corrigem o valor do DAP para a base da árvore (Calegario, 2002).

$$r_{ij}(h_{ij}) = \phi_{3i} - \ln \left[ -\frac{h_{ij} - \phi_{2i}}{h_{ij} - \phi_{1i}} \right] \phi_{4i} \quad (5)$$

$$r_{ij} \left( \frac{h_{ij}}{ht_i} \right) = \phi_{3i} - \ln \left[ -\frac{h_{ij}/ht_i - \phi_{2i}}{h_{ij}/ht_i - \phi_{1i}} \right] \phi_{4i} \quad (6)$$

Em que:  $r_{ij}$  = raio estimado na  $j$ -ésima posição da  $i$ -ésima árvore (cm);  $h_{ij}$  =  $j$ -ésima posição em que se deseja estimar o raio da  $i$ -ésima árvore (m);  $ht_i$  = altura total da  $i$ -ésima árvore (m);  $\ln$  = logaritmo na base neperiana;  $\Phi_i$  = parâmetros da regressão definidos anteriormente.

### Ajuste e seleção dos modelos

Para ajuste dos modelos foi utilizada a função *nlme* do pacote *nlme* desenvolvido pelos autores José Carlos Pinheiro e Douglas Bates, disponível no software R a partir da versão 3.1.

As estatísticas para seleção de modelos propostas nesse estudo são:

a) Critério de Informação de Akaike - AIC

$$AIC = -2 \ln(mv) + 2p \quad (7)$$

Em que:  $\ln$  = logaritmo na base neperiana;  $mv$  = valor da função de verossimilhança;  $p$  = número de parâmetros do modelo.

De acordo com Vismara (2009) a grande vantagem desta estatística é o fato de considerar comparações entre modelos não hierarquizados considerando-os apenas como concorrentes.

b) Critério de informação Bayesiano - BIC

$$BIC = -2 \ln(mv) + p \ln(n) \quad (8)$$

Em que:  $n$  = número de observações na amostra

Quanto menores os valores de *AIC* e *BIC*, melhor e mais aderente a distribuição amostral dos dados é o modelo.

c) Raiz quadrada do erro médio (RMSE)

Raiz quadrada do erro médio ou erro padrão residual é o valor não viesado da estimativa do desvio padrão amostral e fornece uma ideia do desvio do modelo em relação à média.

Sua formulação é dada por:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y - \hat{Y})^2}{n-p}} \quad (9)$$

Em que:  $Y$  = valor observado;  $\hat{Y}$  = valor predito;  $n$  = número de observações;  $p$  = número de parâmetros.

d) Teste da razão da máxima verossimilhança (T.R.M.V)

Para os casos de modelos aninhados e/ou hierarquizados sugere-se o T.R.M.V (PINHEIRO; BATES, 2000). Sua essência consiste em comparar modelos aninhados dois a dois nos quais o seu valor é obtido pela diferença dos valores das suas funções de verossimilhança. O teste segue uma distribuição qui-quadrado por se tratar de uma razão de variâncias. O modelo com maior valor da máxima verossimilhança apresenta maior precisão e é preferível, desde que significativo em um nível  $\alpha\%$  de significância.

$$T.R.M.V = 2[\ln mv_2 - \ln mv_1] \quad (10)$$

Em que:  $mv_2$  = valor de função de verossimilhança do modelo 2;  $mv_1$  = valor de função de verossimilhança do modelo 1.

As estatísticas utilizadas no estudo foram complementadas com as análises gráficas dos resíduos padronizados e também com análises dos valores preditos versus os observados.

e) Função de variância

Quando violada a pressuposição básica de homogeneidade de variância foi avaliada a função *varPower* disponível no pacote *nlme* do software estatístico R para modelar a estrutura de variância entre os grupos. Os modelos desta função são:

$$Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2 |\vartheta_{ij}|^{2\delta} \quad (11)$$

Correspondida pela função de variância a seguir:

$$g(\vartheta_{ij}, \delta) = |\vartheta_{ij}|^\delta \quad (12)$$

Segundo Pinheiro e Bates (2000), a função  $g$  é composta do parâmetro  $\delta$ , o qual é considerado como não restrito (assume valores do conjunto dos números reais). Isto implica que seu uso é adequado nos casos onde a variância aumenta ou diminui com o valor absoluto da covariável.

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

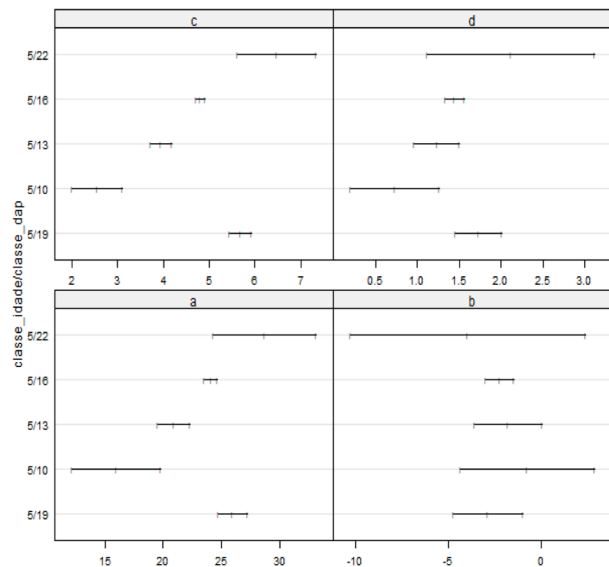
É possível verificar pelas tabelas 3 e 4 que todos os parâmetros foram significativos em um nível de 5% de significância, com baixos valores

de erro padrão. Sendo assim, a relação funcional proposta é adequada para descrever as variações da altura e do diâmetro (Figuras 2 e 3).

Assim como as transformações logarítmicas, a modificação das variáveis do modelo no seu formato original reduziu consideravelmente as variações da dispersão dos dados.

Com o objetivo de reduzir as variações nos dados e aumentar o grau de precisão do modelo, partiu-se do princípio que as variações por classes de diâmetro nas correspondentes classes de idade aconteciam de forma aleatória e que deveriam ser consideradas como um componente randômico do modelo misto. A figura 4 ilustra esta suposição.

Os intervalos de confiança dos parâmetros do modelo fixo indicam uma tendência de aleatoriedade para cada classe de diâmetro nos parâmetros do modelo logístico, em especial nos parâmetros  $\Phi_1$ ,  $\Phi_3$  e  $\Phi_4$  representados pelas letras a, c e d respectivamente (PINHEIRO; BATES, 2000).



**Figura 4.** Intervalos de confiança dos parâmetros por classe de diâmetro para a idade de cinco anos.

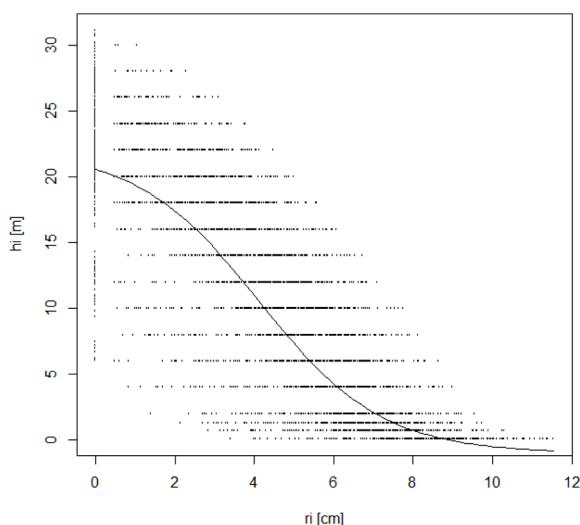
**Figure 4.** Confidence intervals of parameters by diameter class at age five years.

**Tabela 3.** Parâmetros do modelo fixo no seu formato original.  
**Table 3.** Parameters of fixed model in original form.

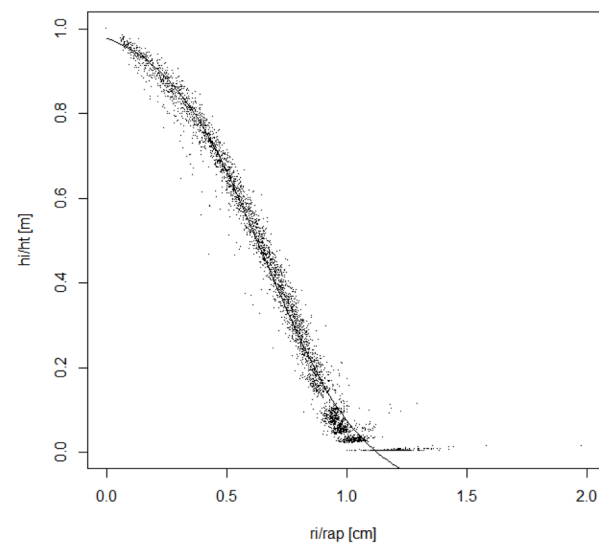
Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	Valor de t	Pr(> t )
$\Phi_1$	22,0428	0,2548	86,51	2,00E-16
$\Phi_2$	-0,99201	0,2404	-4,13	3,70E-05
$\Phi_3$	4,12193	0,0418	98,57	2,00E-16
$\Phi_4$	1,54574	0,0493	31,33	2,00E-16

**Tabela 4.** Parâmetros do modelo fixo relativizado.  
**Table 4.** Parameters of relativized model relativized.

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	Valor de t	Pr(> t )
$\Phi_1$	1,02549	0,00186	552,1	2,00E-16
$\Phi_2$	-0,11126	0,0025	-44,6	2,00E-16
$\Phi_3$	0,65873	0,00106	621	2,00E-16
$\Phi_4$	0,21003	0,00121	174,2	2,00E-16



**Figura 2.** Curva média do modelo original na base de ajuste utilizada.  
**Figure 2.** Average curve to original form in data base.



**Figura 3.** Curva média do modelo modificado na base de ajuste.  
**Figure 3.** Average curve to modified model in data base.

**Tabela 5.** Análise da variância para seleção do modelo logístico misto propostos nos cenários 1 e 2.  
**Table 5.** Analysis of variance for selection mixed model proposed in 1 and 2 scenarios.

Modelo	G.L.	AIC	BIC	LogLik	T.R.M.V	valor de p
Logístico misto	13	29.599,94	29.690,90	-14.786,97		
Logístico misto modificado	16	21.854,88	21.966,83	-10.911,44	7.751,06	<0,0001

G.L.: Graus de Liberdade

Os valores de erro padrão foram reduzidos de 3,675 para 1,880 cm quando considerado o efeito aleatório no ajuste da forma original do modelo logístico. Cao e Wang (2011) sugerem o uso dos modelos de efeitos mistos para aumentar o nível de acurácia das predições. Visando reduzir ainda mais o quadrado médio do resíduo e conseqüente, explicando um pouco mais as variações nos dados, foi inserido como covariante a variável altura total. A covariante foi inserida decompondo os parâmetros de efeito fixo  $\Phi_1$  e  $\Phi_3$  após verificada sua não significância nos parâmetros  $\Phi_2$  e  $\Phi_4$ .

Para todas as estatísticas analisadas, o modelo misto logístico com adição da covariante foi superior, sendo que sua preferência foi confirmada pelo T.R.M.V com valor  $p$  inferior a 5%. O valor do quadrado médio do resíduo foi reduzido de 1,4727 cm para 0,8970 cm. Carvalho et al. (2011) observaram uma redução do erro de 15% para 12% na predição da área basal e de 26% para 4% na predição do volume abordando este mesmo tema.

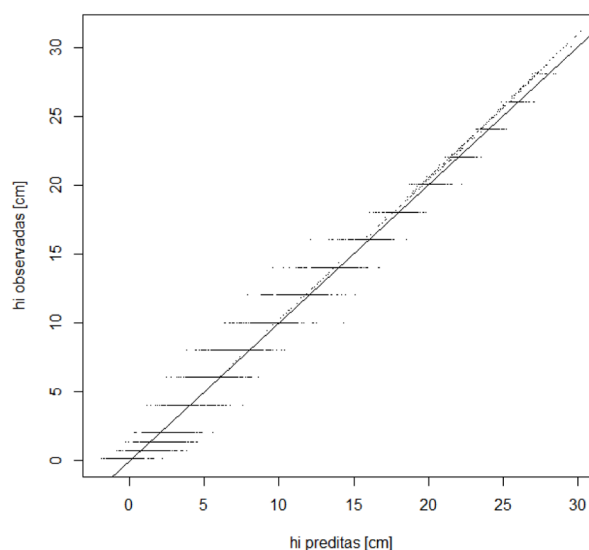
A partir deste ponto, foram comparadas as estimativas do afilamento e do volume do modelo logístico no seu formato original com adição da variável altura como covariante selecionada nos passos anteriores com o modelo relativizado pela altura total e DAP proposto no 3º cenário de ajuste.

Em comparação ao modelo modificado foi verificado que houve uma melhoria expressiva na relação dos valores preditos versus os observados para o modelo relativizado principalmente nos valores centrais e da base da árvore. Este fato se torna relevante uma vez que os valores mais expressivos das porções do tronco se encontram nestas porções da árvore.

Observa-se também que pelas figuras 5 e 6, rejeita-se a hipótese de que o comportamento sigmoidal do modelo logístico anularia a probabilidade de estimativas negativas nas porções extremas da árvore. Esta situação foi contornada por alguns autores como em Guimarães e Leite (1992), e Leite et al. (2006)

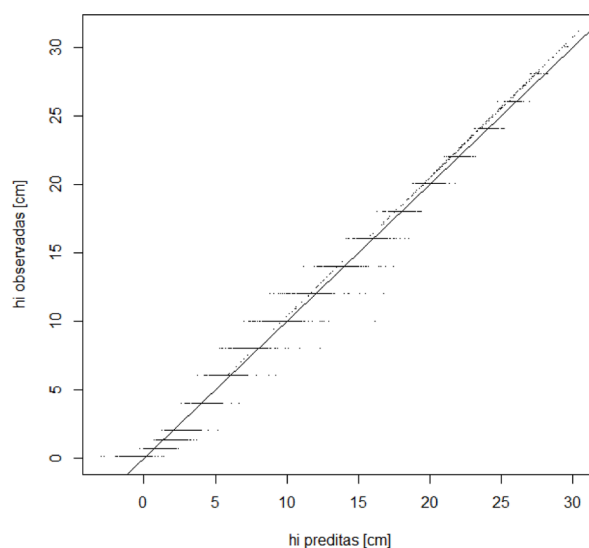
O valor do quadrado médio do resíduo foi reduzido de 0,8970 para 0,6448 cm. Os valores percentuais dos erros de estimativas das alturas

são de 9,48% para o modelo com covariante e 6,80% para o modelo relativizado. As figuras 7 e 8 mostram a eficiência de ambos os modelos na estimativa do volume de cada árvore, obtido pela comparação do volume total por árvore com a estimativa gerada pela integração de ambas as funções.



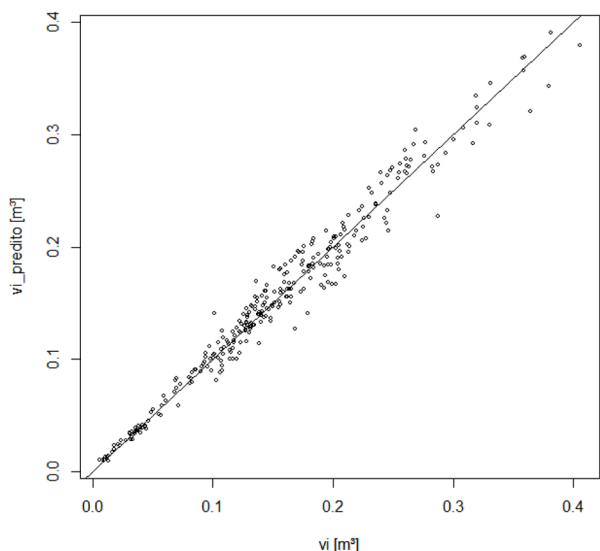
**Figura 5.** Preditos versus observados para o modelo logístico misto com covariante.

**Figure 5.** Predicted versus observed in logistic mixed model with covariate.

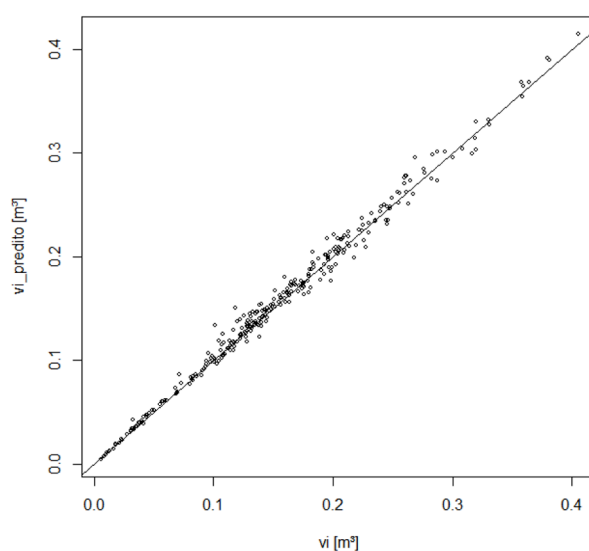


**Figura 6.** Valores preditos versus observados para o modelo relativizado.

**Figure 6.** Predict values versus observed in relativized model.



**Figura 7.** Volumes preditos versus observados para o modelo misto com covariante.  
**Figure 7.** Predict volumes versus observed in the mixed model with covariate.



**Figura 8.** Volume preditos versus observados para o modelo misto relativizado.  
**Figure 8.** Predict volumes versus observed volumes in relativized mixed model.

Visualizando as figuras 7 e 8, é notável uma melhoria expressiva na qualidade da estimativa proporcionada pelo modelo relativizado em que os pontos tendem a estarem mais concentrados em torno da reta [0,1] havendo assim, uma menor dispersão dos dados. Esta afirmação se confirma pelo coeficiente de variação com valor de 2,4% para o modelo misto com adição de covariante e 1,3% para o modelo misto relativizado.

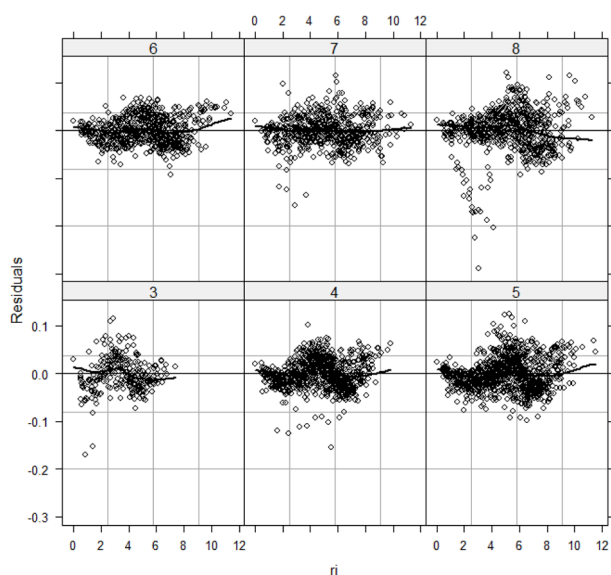
Após os testes apontarem para o modelo relativizado como mais indicado para representar os dados desse estudo, avaliou-se a eficiência do uso da função de variância neste modelo, conforme tabela 6 e figuras 9 e 10.

Apesar dos testes apontarem para o modelo heterocedástico como mais indicado para representar o perfil das árvores do estudo, os gráficos de resíduos padronizados não permitiram tirar as mesmas conclusões.

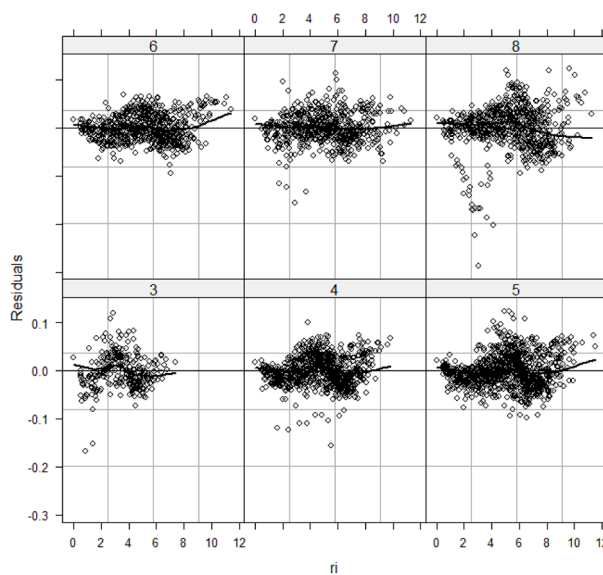
**Tabela 6.** Análise da variância para comparar o modelo relativizado homocedástico versus o heterocedástico.  
**Table 6.** Analysis of variance to compare relativized homocedastic versus heterocedastic models.

Modelo	G.L.	AIC	BIC	LogLik	TRMV	valor de p
Misto Relativizado homocedástico	9	-32.842,64	-32.779,67	16.430,32		
Misto Relativizado heterocedástico	10	-32.853,86	-32.783,89	16.436,93	13,21	0,0003

G.L.: Graus de Liberdade



**Figura 9.** Resíduos padronizados do modelo relativizado homocedástico por classe de idade.  
**Figure 9.** Standard residuals in the relativized homocedastic model by age class.



**Figura 10.** Resíduos padronizados do modelo relativizado heterocedástico por classe de idade.  
**Figure 10.** Standard residuals in the relativized heterocedastic model by age class.

## CONCLUSÕES

Apesar do comportamento assintótico do modelo logístico, o mesmo estimou valores negativos de altura tanto na base quanto no topo.

Quando avaliado seu formato original de ajuste, o modelo com presença de covariável é preferível à sua forma simplificada.

O modelo logístico relativizado é estatisticamente superior ao modelo com presença de covariável e apresenta menos variabilidade na estimativa do volume.

Não houve melhoria na distribuição dos resíduos quando adicionada funções de variância no processo de ajuste.

Visando associar precisão e parcimônia, recomenda-se o modelo logístico misto relativizado homocedástico como o mais indicado para descrever as variações da altura no aflamento das árvores avaliadas bem como na estimativa do volume individual das árvores.

## AGRADECIMENTOS

A Fibria Celulose pela concessão dos dados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CALEGARIO, N. **Modeling Eucalyptus stand growth based on linear and nonlinear mixed-effects models**. 2002. 123 p. Tese (Doutorado em Ciências Florestais) – Universidade da Geórgia, Athens, 2002.
- CAO, Q. V.; WANG, J. Calibrating fixed and mixed effects taper equations. *Forest Ecology and Management*, Amsterdam, v. 262, n. 4, p. 671-673, 2011.
- CARVALHO, S. P. C.; CALEGARIO, N.; SILVA, F. E.; BORGES, L. A. C.; MENDONÇA, A. R.; LIMA, M. P. Modelos não lineares generalizados aplicados na predição da área basal e volume de *Eucalyptus* clonal. *Cerne*, Lavras, v. 17, n. 4, p. 541-548, 2011.
- CLARK III, A.; SOUTER, R. A.; SCHLAEGEL, B. E. **Stem profile equations for southern tree species**. Ashville: USDA Forest Service, 1991. (SE-282 Research Paper).
- COUTO, H. T. Z.; VETTORAZZO, S. S. Seleção de equações de volume e peso seco comercial para *Pinus taeda*. *Cerne*, Lavras, v. 5, n. 1, p. 69-80, 1999.
- DEMAERSCHALK, J. P. Converting volume equations to compatible taper equations. *Forest Science*, Lawrence, v. 18, n. 3, p. 241-245, 1972.
- FIGUEIREDO-FILHO, A.; BORDERS, B. E.; HITCH, K. L. Taper equations for *Pinus taeda* plantations in Southern Brazil. *Forest Ecology and Management*, Amsterdam, v. 83, n. 1/2, p. 39-46, 1996.
- GUIMARÃES, D. P.; LEITE, H. G. Um novo modelo para descrever o perfil do tronco. *Revista Árvore*, Viçosa, v.16, n.2, p.170-180, 1992.
- HORLE, D. C.; MENDONÇA, A. R.; CARVALHO, S. P. C.; CALEGARIO, N. Modelagem não-linear do perfil longitudinal de fustes de *Pinus oocarpa*. *Cerne*, Lavras, v. 16, n. 2, p.177-184, 2010.
- HUSCH, B.; MILLER, C. I.; BEERS, T. W. **Forest mensuration**. 2 ed. New York: The Ronald Press, 1972. 410 p.
- JIANG, L.; BROOKS, J. R.; WANG, J. Compatible taper and volume equations for yellow-poplar in West Virginia. *Forest Ecology and Management*, Amsterdam, v. 213, n. 1/3, p. 399-409, 2005.
- LEITE, H. G.; ANDRADE, V. C. L. Um método para condução de inventários florestais sem o uso de equações volumétricas. *Revista Árvore*, Viçosa, v. 26, n. 3, p. 321-328, 2002.
- LEITE, H. G.; GAMA, J. R. V.; CRUZ, J. P.; SOUZA, A. L. Função de aflamento para *Virola surinamensis* (ROLL.) WARB. *Revista Árvore*, Viçosa, v. 30, n. 1, p. 99-106, 2006.
- LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1994. 1 v.
- MACEDO, R. C. **Estimativa volumétrica de povoamento clonal de *Eucalyptus* sp através de laserscanner aerotransportado**. 2009. 145 p. Dissertação (Mestrado em Sensoriamento Remoto) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2009.
- MAX, T. A.; BURKHART, H. E. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science*, Lawrence, v. 22, n. 3, p. 283-289.

- MENDONÇA, A. R.; SILVA, G. F.; OLIVEIRA, J. T. S.; NOGUEIRA, G. S. Avaliação de funções de aflamento visando a otimização de fustes de *Eucalyptus* sp. para multiprodutos. *Cerne*, Lavras, v. 13, n. 1, p. 71-82, 2007.
- PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-effects models in S and S-PLUS**. New York: Springer-Verlag, 2000. 528 p.
- PIRES, L. M.; CALEGARIO, N. Ajuste de modelos estocásticos lineares e não lineares para a descrição do perfil longitudinal de árvores. *Revista Árvore*, Viçosa, v. 31, n. 5, p. 845-852, 2007.
- QUEIROZ, D. MACHADO, S. A.; FILHO, A. F.; ARCE, J. E.; KOEHLER, H. S. Avaliação e validação de funções de aflamento para *Mimosa scabrella* Benth em povoamentos da região metropolitana de Curitiba-PR. *Floresta*, Curitiba, v. 36, n. 2, p.183-199, 2006.
- R Core Team. **R: A language and environment for statistical computing 2.15.3**. Vienna: Core Team, 2013. Disponível em: < <http://www.R-project.org> >. Acesso em: 01 mar. 2013
- SANTOS, J. **Análise de modelos de regressão para estimar a fitomassa da floresta tropical úmida de terra-firme da Amazônia brasileira**. 1996. 121 p. Tese (Doutorado em Ciências Florestais) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 1996.
- SCHÖEPFER, W. **Automatisierung des Massen, Sorten und Wertberechnung stender Waldbestände SchriftenreiheBad**. [S.l.]: Wurt-Forstl., 1966. 1 v.
- SILVA, A. F. **Composição florística e estrutura fitossociológica do estrato arbóreo da Reserva Florestal Professor Augusto Ruschi, São José dos Campos, SP**. 1989. 162 p. Tese (Doutorado em Ciências Biológicas) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.
- VISMARA, E. S. **Mensuração da biomassa e construção de modelos para construção de equações de biomassa**. 2009. 103 p. Dissertação (Mestrado em Recursos Florestais) – Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiróz, Universidade de São Paulo. Piracicaba, 2009.

Recebido em 22/10/2013  
Aceito para publicação em 04/08/2014