

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia de Telecomunicações
e Controle

ISSN 1517-3550

BT/PTC/0309

**Otimização Robusta de Carteiras
Utilizando Desigualdades Matriciais
Lineares**

**Rodrigo Barros Nabholz
Oswaldo Luiz do Valle Costa**

São Paulo – 2003

O presente trabalho é um resumo da dissertação de mestrado apresentada por Rodrigo Barros Nabholz, sob orientação do Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa.: "Otimização Robusta de Carteiras Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares", defendida em 29/07/02, na Escola Politécnica.

A íntegra da dissertação encontra-se à disposição com o autor e na Biblioteca de Engenharia Eletricidade da Escola Politécnica da USP.

FICHA CATALOGRÁFICA

Nabholz, Rodrigo Barros

Otimização robusta de carteiras utilizando desigualdades matriciais / Rodrigo Barros Nabholz, Oswaldo Luiz do Valle Costa. -- São Paulo : EPUSP, 2003.

p. -- (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle ; BT/PTC/0309)

1. Mercado financeiro 2. Investimentos (Otimização) 3. Controle (Teoria de sistema e controle) I. Costa, Oswaldo Luiz do Valle II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle III. Título IV. Série ISSN 1517-3550

CDD 332
332.6
629.8312

OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DE CARTEIRAS UTILIZANDO DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

OSWALDO L. V. COSTA, RODRIGO B. NABHOLZ

Depto. de Engenharia de Telecomunicações e Controle
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
São Paulo, SP, Brasil

E-mails: oswaldo@lac.usp.br, rodrigo.nabholz@poli.usp.br

Resumo— O objetivo deste trabalho é formular um problema de seleção robusta de ativos utilizando média-semivariância em termos de um problema de otimização com desigualdades matriciais lineares (LMI). O modelo de média-semivariância usa como função risco uma combinação convexa das semivariâncias (acima e abaixo do retorno esperado) do erro de rastreamento (“tracking error” - a diferença entre a carteira e um *benchmark*). Consideraremos diferentes formas de calcular a média e a semivariância do erro de rastreamento. Iremos então minimizar uma função objetivo definida como uma combinação convexa da função risco menos o retorno esperado de erro de rastreamento. Chamamos de solução robusta a carteira factível que apresenta o valor da função objetivo no pior caso.

Abstract— The main goal of this paper is to formulate a robust mean-semivariance portfolio selection problem in terms of a linear matrix inequalities (LMI) optimization problem. The mean-semivariance model takes as the risk function a convex combination of the semivariances (below and above the expected return) of the tracking error (the difference between the investor's portfolio and a benchmark portfolio). We consider different forms of calculating the mean and semivariance of the tracking error. It is desired to minimize an objective function defined as a convex combination of the risk function minus the expected return of the tracking error. By a robust solution we mean a feasible portfolio which leads to a worst case value function lower than any other worst case value function evaluated at any other feasible portfolio.

Key Words— mean-semivariance; portfolio optimization; linear matrix inequalities; computational tool.

1 Introdução

O modelo de média-variância para seleção de ativos é um problema clássico em finanças introduzido por (Markowitz, 1959), onde deseja-se reduzir os riscos de uma carteira através da diversificação dos ativos. O principal objetivo é maximizar o retorno esperado para um dado nível de risco ou minimizar o risco esperado para um dado retorno esperado. Seleção ótima de ativos é a ferramenta mais usado e conhecida para alocação de capital (ver (Campbell et al., 1997), (Elton e Gruber, 1995), (Jorion, 1992)). Recentemente, o modelo foi estendido para incluir otimização do erro de rastreamento (ver (Roll, 1992)) e modelos de semivariância (ver (Hanza e Janssen, 1998)). Neste caso, o gestor dos recursos é avaliado pela performance obtida em comparação com um *benchmark* pré-estabelecido. O problema da decisão de alocação é baseada na diferença entre o retorno obtido pelo gestor e o retorno do *benchmark*, o chamado erro de rastreamento ou “tracking error”. No modelo de semivariância a função risco é uma combinação convexa das semivariâncias (acima e abaixo do retorno esperado) do erro de rastreamento. Como exemplos de trabalhos sobre o erro de rastreamento podemos mencionar (Roll, 1992) que considera o problema de minimizar a volatilidade do erro de rastreamento, e (Rudolf et al., 1999), que utiliza modelos lineares para minimização do erro de rastreamento. Outras funções objetivos para esta

classe de problemas também podem ser consideradas (ver (Zenios, 1993)), e uma abordagem unificada destas metodologias pode ser encontrada em (Duarte Jr., 1999).

Como apontado em (Rustem et al., 1995), para a estratégia ótima do modelo de média-variância ser útil, os retornos esperados dos ativos e a matriz de covariância precisam ser estimativas precisas. Pequenas variações nos retornos podem provocar grandes mudanças na decisão de alocação, como pode ser visto em (Black e Litterman, 1991). Esta falta de robustez com relação a imprecisão inerente as estimativas dos retornos e variâncias motiva o estudo de modelos robustos de otimização. Neste caso, a otimização não é feita para um único caso de médias e variâncias, mas consideramos um conjunto de valores para estes parâmetros, que chamaremos de cenários. Estratégias robustas para carteira min-max são consideradas em (Rustem et al., 1995), onde deseja-se obter uma carteira que minimize o valor da função objetivo no pior caso (máximo sob os cenários). Apesar de ser uma solução de pior caso entre todos os cenários utilizados, na prática podemos obter uma boa estratégia, principalmente se analisarmos períodos de muita volatilidade e mercados emergentes. Em (Costa e Paiva, 2002) é proposto uma abordagem com desigualdades matriciais lineares para resolver numericamente o problema robusto de seleção ótima de carteiras. Assume-se que os retornos esperados dos ativos bem como a matriz

de covariância pertencem a um politopo convexo definido por alguns vértices escolhidos pelo gestor. Dois problemas foram abordados: o primeiro foi encontrar a carteira de volatilidade mínima no pior caso do erro de rastreamento com uma performance esperada garantida mínima. O segundo foi obter a carteira com o maior retorno esperado no pior caso com uma máxima volatilidade do erro de rastreamento determinada. Mostrou-se que estes dois problemas são equivalentes a resolver problemas de otimização com desigualdades matriciais lineares. Outras referências sobre algoritmos robustos para finanças são (Howe e Rustem, 1997) e (Howe et al., 1996).

Devido ao grande número de técnicas computacionais rápidas e confiáveis disponíveis para problemas de otimização com desigualdades matriciais lineares atualmente (ver (Oliveira et al., 1994)), esta abordagem tem se mostrado uma ferramenta importante para derivação de algoritmos numéricos em controle robusto e problemas relacionados. Em particular, algoritmos utilizando programação semi-definida para obtenção de controle para sistemas estocásticos tem sido apresentados recentemente (ver (Boyd et al., 1994), (Costa et al., 1997), (Geromel et al., 1991)). Deixamos estas referências para maiores detalhes sobre a implementação prática de tais algoritmos.

O principal objetivo deste artigo é utilizar desigualdades matriciais lineares para resolver um problema de otimização do erro de rastreamento robusto utilizando critério de média-semivariância e considerando diferentes valores para os retornos esperados e semivariâncias. Vamos assumir que os retornos esperados dos ativos pertencem a um politopo convexo definido por alguns vértices escolhidos pelo gestor. Para o cálculo das semivariâncias, vamos considerar estimativas baseadas em dados históricos dos retornos dos ativos. Pesos decrescentes ao longo do tempo são aplicados ao conjunto de dados. Assumimos também que a matriz formada pelos pesos pertence a um politopo convexo definido por alguns vértices escolhidos pelo gestor. A idéia por trás desta hipótese é que estes parâmetros (expectativa de retornos e semivariâncias) não são exatamente conhecidas e dificilmente são estimadas com precisão. A função objetivo que queremos minimizar é a combinação convexa da semivariância do erro de rastreamento menos o retorno esperado do erro de rastreamento. O problema de otimização robusto do erro de rastreamento neste caso é determinar a carteira que minimiza o pior caso (máximo sob todas as possíveis combinações convexas dos parâmetros) da função objetivo. Acreditamos que esta técnica representa uma ferramenta computacional importante na direção de superar as principais limitações do modelo de otimização de média-variancia mencionado acima, com foco especial para problemas reais.

Este artigo está organizado da seguinte maneira. A notação, resultados básicos e a formulação do problema que será considerado durante todo o trabalho são apresentados na seção 2. Seção 3 apresenta a formulação com desigualdades matriciais lineares para o problema de otimização de média-semivariância para o caso do erro de rastreamento robusto. A Seção 4 apresenta simulações numéricas com ações da Bovespa. O artigo é concluído na seção 5 com comentários finais. Todas as provas podem ser encontradas em (Costa e Nabholz, 2002).

2 Preliminares

2.1 Desigualdades Matriciais Lineares e Definições Básicas

Vamos denotar por \mathbb{R} e \mathbb{R}^n o espaço dos reais e vetores n -dimensionais reais respectivamente. Para uma dada matriz Q , definimos Q' como a matriz transposta de Q e $Q \geq 0$ ($Q > 0$ respectivamente) significa que a matriz simétrica Q tem que ser semi-definida positiva (definida positiva). Para $x \in \mathbb{R}^n$ e 0 o vetor zero n -dimensional, a desigualdade $x \geq 0$ significa que cada elemento do vetor x é maior ou igual a zero.

Vejamos alguns fatos básicos sobre desigualdades matriciais lineares (LMI). Um LMI (não-estrito) tem a forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i \geq 0 \quad (1)$$

onde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis e as

matrizes simétricas $F_i, i = 0, \dots, n$ são dadas. Um resultado importante para converter desigualdades convexas não-lineares em formulação LMI é o chamado complemento de Schur, que apresentamos a seguir (ver (Saberi et al., 1995), pag 13).

Proposição 1. Suponha $R > 0$. Então

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S' & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2)$$

se e somente se

$$Q - SR^{-1}S' \geq 0. \quad (3)$$

Note que a primeira desigualdade na Proposição 1 está na forma de um LMI, e a segunda está na forma de uma desigualdade convexa não-linear. Um problema de otimização com desigualdades matriciais lineares consiste em achar um x factível (ou seja, achar x tal que $F(x) \geq 0$) que minimize (ou maximize) uma função convexa $c(x)$. Como mostrado em (Boyd et al., 1994), (Ghaoui e Niculescu, 2000), existem atualmente algoritmos numéricos para resolução de problemas de otimização com desigualdades matriciais

lineares bastante eficientes (por exemplo (Oliveira et al., 1994)), com o ótimo global encontrado em tempo polinomial ((Boyd et al., 1994), (Ghaoui e Niculescu, 2000)).

Um Corolário imediato da Proposição 1 é o seguinte:

Corolário 1. Suponha $Q \geq 0$ uma matriz n por n , $x(i) \in \mathbb{R}^n$, e $\sum_{i=1}^k \alpha(i) = 1$, $\alpha(i) \geq 0$, $i = 1, \dots, k$. Então

$$\left\| Q^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^k \alpha(i)x(i) \right) \right\|^2 \leq \sum_{i=1}^k \alpha(i) \left\| Q^{\frac{1}{2}}x(i) \right\|^2. \quad (4)$$

Assim sendo vamos definir por conveniência, para \mathbb{X} um espaço de vetores reais ou matrizes, e uma coleção de pontos $v(i) \in \mathbb{X}$, $i = 1, \dots, \kappa$, o politopo convexo $Con\{v(1), \dots, v(\kappa)\}$ como

$$Con\{v(1), \dots, v(\kappa)\} = \left\{ v \in \mathbb{X}; v = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha(i)v(i), \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha(i) = 1, \alpha(i) \geq 0 \right\} \quad (5)$$

A formulação acima será utilizada na caracterização da robustez no modelo financeiro.

Para um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, definimos os vetores $[x]_+ \in \mathbb{R}^n$ e $[x]_- \in \mathbb{R}^n$ da seguinte maneira

$$[x]_+ = \begin{pmatrix} \max\{0, x_1\} \\ \vdots \\ \max\{0, x_n\} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

e $[x]_- = x - [x]_+$, onde x_i é o i -ésimo componente do vetor x . Seja Λ uma matriz diagonal n por n com componentes positivos. É fácil ver que

$$[x]_+' \Lambda [x]_- = 0. \quad (7)$$

Desta forma definimos para $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, e Λ uma matriz diagonal n por n com elementos positivos,

$$\Upsilon(x, u) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(u - x), \quad (8)$$

$$\Delta(y, v) = \Lambda^{\frac{1}{2}}(v + y), \quad (9)$$

$$g(x, y, u, v) = \theta \|\Upsilon(x, u)\|^2 + (1 - \theta) \|\Delta(y, v)\|^2 \quad (10)$$

onde $\theta \in [0, 1]$. Suponha que queremos obter $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $u \geq 0$ e $v \geq 0$ tal que minimize $g(x, y, u, v)$. Seja

$$g(x, y) = \min_{u \geq 0, v \geq 0} g(x, y, u, v). \quad (11)$$

Proposição 2. Para quaisquer $u \geq 0, v \geq 0$,

$$g(x, y, u, v) \geq \theta \|\Lambda^{\frac{1}{2}}[x]_-\|^2 + (1 - \theta) \|\Lambda^{\frac{1}{2}}[x]_+\|^2 \quad (12)$$

e o ponto de mínimo em (11) é atingido para $u = [x]_+$, $v = -[y]_-$ e $g(x, y) = \theta \|\Lambda^{\frac{1}{2}}[x]_-\|^2 + (1 - \theta) \|\Lambda^{\frac{1}{2}}[y]_+\|^2$.

2.2 Modelo Financeiro

Vamos considerar um modelo financeiro onde existam N ativos com risco representados pelo vetor aleatório de retornos A (tomando valores em \mathbb{R}^N), e um ativo livre de risco com retorno conhecido $r \in \mathbb{R}$. Por conveniência, iremos escrever $A(t)$ para denotar o vetor de retornos num certo instante de tempo t e por $A_i(t)$ a i -ésima componente deste vetor $A(t)$. O vetor aleatório de retornos A tem vetor de médias $\mu \in \mathbb{R}^N$, e uma matriz de covariância $N \times N$ dimensional Ω . Desta forma A pode ser escrito como

$$A = \mu + \epsilon \quad (13)$$

onde ϵ é um vetor aleatório com média zero e matriz de covariância Ω . É conveniente definir o vetor $\varphi \in \mathbb{R}^{N+1}$ como:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mu \\ r \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Uma carteira ω será dada por um vetor em \mathbb{R}^N onde suas componentes são os pesos investidos nos ativos com risco A , ou seja, a i -ésima componente ω_i de ω é a proporção da carteira investida no ativo i . Assumiremos que a carteira pertença então ao conjunto Γ , definido em termos do seguinte LMI:

$$\Gamma = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^N; F_0 + \sum_{i=1}^N \omega_i F_i \geq 0 \right\} \quad (15)$$

onde F_i , $i = 0, \dots, N$ são matrizes simétricas dadas. O conjunto Γ é conveniente para representar restrições do tipo: a soma das componentes da carteira ser menor ou igual a 1, e não permitir *short-selling*. Ou seja, restrições do tipo:

$$\omega' \mathbf{1} \leq 1, 0 \leq \omega_i, i = 1, \dots, N \quad (16)$$

onde $\mathbf{1}$ representa um vetor N -dimensional formado por 1 em todas posições. Neste caso, as matrizes F_i tem dimensão $(N+1) \times (N+1)$. A matriz F_0 será formado por zeros exceto o elemento $(1, 1)$, que será 1. Para $i = 1, \dots, N$, as matrizes F_i são

$$F_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, F_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Consideremos agora que $(1 - \omega' \mathbf{1})$ é investido num ativo livre de risco r . Assim sendo, o retorno do investidor é dado por

$$\omega' A + (1 - \omega' \mathbf{1})r. \quad (18)$$

Tomemos ainda uma carteira conhecida ω_B fornecida pelo gestor, chamada *benchmark*. O retorno do *benchmark* é como em (18), ou seja,

$$\omega'_B A + (1 - \omega'_B 1)r. \quad (19)$$

De (18) e (19) temos que a diferença entre o retorno da carteira do investidor ω e o *benchmark*, definido como o erro de rastreamento $e(\omega)$, é

$$e(\omega) = (\omega - \omega_B)' A + (\omega_B - \omega)' 1r. \quad (20)$$

O valor esperado do erro de rastreamento $e(\omega)$, denotado por $\rho(\omega)$, segue das equações (13) e (20), e é dado por

$$\begin{aligned} \rho(\omega) &= (\omega - \omega_B)' \mu + (\omega_B - \omega)' 1r \\ &= (\omega - \omega_B)' (\mu - 1r) \end{aligned} \quad (21)$$

e a variância (volatilidade), denotada por $\sigma^2(\omega)$, é

$$\sigma^2(\omega) = (\omega - \omega_B)' \Omega (\omega - \omega_B). \quad (22)$$

Como mencionado anteriormente, estamos interessados em medir o risco através de uma combinação convexa das semivariâncias acima e abaixo da média do retorno do erro de rastreamento, que são definidas como segue: a semivariância abaixo da média é definida por

$$\begin{aligned} \eta^-(\omega) &= E((\min\{0, e(\omega) - \rho(\omega)\})^2) \\ &= E((\min\{0, (\omega - \omega_B)' (A - \mu)\})^2) \end{aligned} \quad (23)$$

e a semivariância acima da média por

$$\begin{aligned} \eta^+(\omega) &= E((\max\{0, e(\omega) - \rho(\omega)\})^2) \\ &= E((\max\{0, (\omega - \omega_B)' (A - \mu)\})^2) \end{aligned} \quad (24)$$

De (23) e (24), a função risco é definida, para $\theta \in [0, 1]$, como

$$\theta \eta^-(\omega) + (1 - \theta) \eta^+(\omega). \quad (25)$$

Pode-se verificar que para $\theta = \frac{1}{2}$, temos $\frac{1}{2}(\eta^-(\omega) + \eta^+(\omega)) = \frac{1}{2}\sigma^2(\omega)$. O parâmetro θ representa o grau de aversão ao risco do investidor. Para maiores detalhes e propriedades desta função risco citamos (Hanza e Janssen, 1995), (Duarte Jr., 1999), (Markowitz, 1959).

Suponhamos que um conjunto de dados históricos $a_i(t)$, $t = 1, \dots, T$, está disponível, onde $a_i(t)$ representa o valor observado do retorno aleatório $A_i(t)$ no instante t . Vamos assim definir a matriz \mathcal{A} como:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_1(1) & \dots & a_N(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1(T) & \dots & a_N(T) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Portanto a t -ésima linha de \mathcal{A} representa o valor observado de $A(t)$. Seja

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda(T) \end{bmatrix} \quad (27)$$

onde $\lambda(t)$ representa o peso dado ao valor observado no instante t quando estimamos os parâmetros $\eta^-(\omega), \eta^+(\omega)$. Assumiremos que $\sum_{t=1}^T \lambda(t) = 1$. Das equações (23), (24), (26), uma estimativa para $\eta^-(\omega), \eta^+(\omega)$ usando \mathcal{A} , os pesos Λ , e a média μ , denotadas por $\eta_{\mu, \Lambda}^-(\omega), \eta_{\mu, \Lambda}^+(\omega)$ respectivamente, seria dada por:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu, \Lambda}^-(\omega) &= \left\| \Lambda^{\frac{1}{2}} [(\mathcal{A} - 1\mu')(\omega - \omega_B)]_- \right\|^2 = \\ &= \sum_{t=1}^T \lambda(t) \left(\left[\sum_{i=1}^N (a_i(t) - \mu_i)(\omega_i - \omega_{iB}) \right]_- \right)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\mu, \Lambda}^+(\omega) &= \left\| \Lambda^{\frac{1}{2}} [(\mathcal{A} - 1\mu')(\omega - \omega_B)]_+ \right\|^2 = \\ &= \sum_{t=1}^T \lambda(t) \left(\left[\sum_{i=1}^N (a_i(t) - \mu_i)(\omega_i - \omega_{iB}) \right]_+ \right)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

2.3 Seleção Robusta de Carteiras Utilizando Semivariância

Vamos abordar nesta seção o problema de seleção robusta de carteiras utilizando semivariância como função risco, que é o objetivo principal deste trabalho. Vamos lembrar que se tivéssemos estimativas precisas para os parâmetros μ, r_f e $\eta_{\mu, \Lambda}^-(\omega), \eta_{\mu, \Lambda}^+(\omega)$ então o problema de otimização a ser resolvido seria, para $\delta \in [0, 1], \theta \in [0, 1]$, dado por:

$$\inf_{\omega \in \Gamma} f_{\varphi, \Lambda}(\omega) \quad (30)$$

onde

$$\begin{aligned} f_{\varphi, \Lambda}(\omega) &= -(1 - \delta)(\omega - \omega_b)' (\mu - 1r_f) \\ &\quad + \delta(\theta \eta_{\mu, \Lambda}^-(\omega) + (1 - \theta) \eta_{\mu, \Lambda}^+(\omega)) \end{aligned} \quad (31)$$

(lembrando que $\varphi = \begin{pmatrix} \mu \\ r_f \end{pmatrix}$). Vale ressaltar que δ representa o grau de aversão ao risco do investidor. A medida que δ aumenta de 0 para 1, aumenta também a cautela do investidor.

Podemos ver, das equações (28) e (29), que as estimativas para $\eta^-(\omega), \eta^+(\omega)$ dependem diretamente de Λ, φ . Diferentes valores de Λ, φ levam a diferentes valores da função objetivo (31). Consideraremos assim a situação na qual deseja-se utilizar no problema de otimização (30) todos os possíveis valores dos parâmetros Λ, φ dentro dos politopos convexos $\Xi = \text{Con}\{\varphi(1), \dots, \varphi(\kappa)\}$, e $\Sigma = \text{Con}\{\Lambda(1), \dots, \Lambda(\nu)\}$. Vamos assumir novamente que $\sum_{t=1}^T \lambda(k, t) = 1, k = 1, \dots, \nu$,

onde $\lambda(k, t)$ são os elementos na diagonal de $\Lambda(k)$. É importante ressaltar que os valores $\varphi(1), \dots, \varphi(\kappa)$ e $\Lambda(1), \dots, \Lambda(\nu)$ são fornecidos pelo gestor da carteira, e portanto não estamos interessados neste estudo em maneiras de obtê-los. O parâmetro $\mu(i)$ irá representar diferentes estimativas para o retorno dos ativos de risco, seja em função de diversas formas de cálculo ou de diferentes cenários futuros do período no qual a carteira manter-se-á inalterada. De forma análoga os parâmetros $r_f(i)$ podem representar valores distintos que a taxa livre de risco pode assumir no mesmo período. Os parâmetros $\Lambda(k)$ denotam diferentes pesos que podemos considerar na estimativa da função risco nas equações (28), (29). Logo, a versão robusta do problema de otimização de carteiras posta em (30), (31) é dada por:

$$\inf_{\omega \in \Gamma} \sup_{\varphi \in \Xi, \Lambda \in \Sigma} f_{\varphi, \Lambda}(\omega). \quad (32)$$

Portanto estamos querendo determinar uma carteira ω^* tal que:

$$\sup_{\varphi \in \Xi, \Lambda \in \Sigma} f_{\varphi, \Lambda}(\omega^*) \leq \sup_{\varphi \in \Xi, \Lambda \in \Sigma} f_{\varphi, \Lambda}(\omega). \quad (33)$$

para cada $\omega \in \Gamma$, ou seja, existem $\varphi \in \Xi, \Lambda \in \Sigma$ de forma que:

$$\sup_{\varphi \in \Xi, \Lambda \in \Sigma} f_{\varphi, \Lambda}(\omega^*) \leq f_{\varphi, \Lambda}(\omega). \quad (34)$$

Note que é possível obtermos para algum $\bar{\varphi} \in \Xi, \bar{\Lambda} \in \Sigma$:

$$f_{\bar{\varphi}, \bar{\Lambda}}(\omega) \leq f_{\bar{\varphi}, \bar{\Lambda}}(\omega^*) \leq \sup_{\varphi \in \Xi, \Lambda \in \Sigma} f_{\varphi, \Lambda}(\omega^*). \quad (35)$$

Quanto maiores forem os conjuntos Ξ e Σ , maiores as chances de encontrarmos $\bar{\varphi} \in \Xi, \bar{\Lambda} \in \Sigma$ satisfazendo (35). Logo a utilização de um número muito grande de cenários pode deteriorar a performance do método, dado que obtemos uma solução ω^* desnecessariamente pessimista que minimiza o maior valor (pior caso) da função objetivo nos conjuntos Ξ e Σ . Logo, o bom desempenho desta modelagem depende bastante de uma escolha criteriosa dos cenários que serão considerados no problema de min-max.

No que segue, será conveniente fazermos as seguintes definições para $u \geq \mathbf{0}, v \geq \mathbf{0}, \omega \in \Gamma, \varphi \in \Xi, \Lambda \in \Sigma$:

$$\Upsilon_{\varphi, \Lambda}(\omega, u) = \left\{ \Lambda^{\frac{1}{2}}(u - (\mathcal{A} - \mathbf{1}\mu')(\omega - \omega_b)) \right\} \quad (36)$$

$$\Delta_{\varphi, \Lambda}(\omega, v) = \left\{ \Lambda^{\frac{1}{2}}(v + (\mathcal{A} - \mathbf{1}\mu')(\omega - \omega_b)) \right\}. \quad (37)$$

Definimos também

$$\begin{aligned} g_{\varphi, \Lambda}(\omega, u, v) &= -(1 - \delta)(\omega - \omega_b)'(\mu - \mathbf{1}r) \\ &\quad + \delta\theta\|\Upsilon_{\varphi, \Lambda}(\omega, u)\|^2 \\ &\quad + \delta(1 - \theta)\|\Delta_{\varphi, \Lambda}(\omega, v)\|^2. \end{aligned}$$

Proposição 3. Para cada $\omega \in \Gamma$ fixado,

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in \Xi, \Lambda \in \Sigma} f_{\varphi, \Lambda}(\omega) &= \\ \min_{u \geq \mathbf{0}, v \geq \mathbf{0}} \max_{k=1, \dots, \kappa, \ell=1, \dots, \nu} &g_{\varphi(k), \Lambda(\ell)}(\omega, u, v). \end{aligned} \quad (38)$$

3 Formulação LMI

Vamos introduzir agora uma formulação para o problema robusto de seleção de carteiras apresentado em (32) utilizando desigualdades matriciais lineares. Mostraremos, através de um teorema, que a formulação LMI para o problema (32) é:

$$\text{Minimizar } z \quad (39)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S'_1 & I & 0 \\ S'_2 & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (41)$$

$$i = 1, \dots, \kappa, k = 1, \dots, \nu \quad (41)$$

$$u \geq \mathbf{0}, v \geq \mathbf{0}, \omega \in \Gamma. \quad (42)$$

onde:

$$S_0 = (z + (1 - \delta)(\omega - \omega_B)'(\mu(i) - \mathbf{1}r(i)))$$

$$S_1 = (\delta\theta)^{\frac{1}{2}} \Upsilon_{\varphi(i), \Lambda(k)}(\omega, u)',$$

$$S_2 = (\delta(1 - \theta))^{\frac{1}{2}} \Delta_{\varphi(i), \Lambda(k)}(\omega, v)'$$

e as variáveis são: u, v, z, ω . Vale ressaltar que na equação (41) a desigualdade é para cada elemento dos vetores T -dimensional u, v , e $\mathbf{0}$ representa o vetor T -dimensional zero.

O resultado a seguir mostra que o problema de otimização utilizando desigualdades matriciais lineares apresentado acima (39 - 42) resolve o problema de otimização robusta de carteiras (32).

Teorema 1. $\bar{\omega} \in \Gamma$ é uma solução ótima do problema $\inf \sup$ posto em (32) se e somente se $\bar{u}, \bar{v}, \bar{z}, \bar{\omega}$ é solução ótima do problema LMI posto em (39) a (42). Mais ainda,

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \max_{i=1, \dots, \kappa, k=1, \dots, \nu} \\ &\quad \left\{ -(1 - \delta)(\bar{\omega} - \omega_b)'(\mu(i) - \mathbf{1}r(i)) \right. \\ &\quad \left. + \delta(1 - \theta)\|\Lambda(k)^{\frac{1}{2}}[(\mathcal{A} - \mathbf{1}\mu(i))'(\bar{\omega} - \omega_b)]_+\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \delta\theta\|\Lambda(k)^{\frac{1}{2}}[(\mathcal{A} - \mathbf{1}\mu(i))'(\bar{\omega} - \omega_b)]_-\|^2 \right\} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\bar{u} = [(\mathcal{A} - \mathbf{1}\mu(i))'(\bar{\omega} - \omega_b)]_+ \quad (44)$$

$$\bar{v} = -[(\mathcal{A} - \mathbf{1}\mu(i))'(\bar{\omega} - \omega_b)]_- \quad (45)$$

e $i \in \{1, \dots, \kappa\}, \xi \in \{1, \dots, \nu\}$ atingem o máximo na equação (43).

Vale ressaltar que o problema de otimização utilizando desigualdades matriciais lineares colocado acima é equivalente ao seguinte problema de

programação não-linear:

Minimizar z

Sujeito a:

$$\begin{aligned} z + (1 - \delta)(\omega - \omega_b)'(\mu(i) - \mathbf{1}r(i)) + \\ \delta\theta(u - \tau(i))'\Lambda(k)(u - \tau(i)) + \\ \delta(1 - \theta)(v + \tau(i))'\Lambda(k)(v + \tau(i)) \geq 0 \\ i = 1, \dots, \kappa, k = 1, \dots, \nu \\ u \geq \mathbf{0}, v \geq \mathbf{0} \\ \omega \in \Gamma \end{aligned}$$

onde $\tau(i) = (\mathcal{A} - \mathbf{1}\mu(i))'(\omega - \omega_b)$.

Assim sendo, podemos utilizar também métodos para problemas de programação não-linear para resolver o problema robusto de carteiras. A vantagem de utilizar desigualdades matriciais lineares é que este tipo de formulação é tratável tanto do ponto de vista teórico como numérico, e existem hoje códigos bastante eficientes para obtenção de soluções.

Para o caso no qual temos $\theta = 1$, o problema de otimização (39)-(42) pode ser simplificado para:

Minimizar z

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_0 & \mathcal{S}_1 \\ \mathcal{S}_1' & I \end{bmatrix} \geq 0 \\ i = 1, \dots, \kappa, k = 1, \dots, \nu \\ u \geq \mathbf{0}, \omega \in \Gamma,$$

e de forma análoga para $\theta = 0$. Para o caso onde temos $\theta = \frac{1}{2}$ o problema de otimização (39)-(42) pode ser simplificado a

Minimizar z

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S}_0 & \delta^{\frac{1}{2}}(\omega - \omega_B)' \Omega(i, k) \\ \delta^{\frac{1}{2}} \Omega(i, k) (\omega - \omega_B) & \Omega(i, k) \end{bmatrix} \geq 0 \\ i = 1, \dots, \kappa, k = 1, \dots, \nu, \omega \in \Gamma$$

onde $\Omega(i, k) = (\mathcal{A} - \mathbf{1}\mu(i))'\Lambda(k)(\mathcal{A} - \mathbf{1}\mu(i))'$.

4 Exemplos Numéricos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos numéricos com base na formulação LMI apresentada acima. Nosso objetivo é calcular uma carteira robusta que acompanhe a variação do Ibovespa. Para isto selecionamos as 37 ações mais representativas na carteira do Ibovespa no ano de 2001, que responderam por, no mínimo, 85% da carteira no período. Calculamos a carteira ótima semanalmente de 02/01/2001 a 30/03/2001, e utilizamos os últimos 63 dados para construir a matriz de retornos \mathcal{A} . Assumimos ainda que a riqueza inicial disponível para investimento era 100 unidades.

Geramos 3 conjuntos diferentes de carteiras. Para a *Simulação 1* temos:

- $\kappa = 1, \nu = 1$ (um único LMI),

- $\delta = 0,94$,

- $\theta = 0,75$,

$$\bullet \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{63} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{63} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{63} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{63} \end{bmatrix}.$$

Para *Simulação 2* consideramos:

- $\kappa = 2, \nu = 2$ (quatro LMIs),

- $\delta = 0,97$,

- $\theta = 0,75$,

$$\bullet \quad \Lambda(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{63} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{63} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{63} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{63} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \Lambda(2)\frac{1}{c} = \begin{bmatrix} 010 \times 0,90^{59} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0,10 \times 0,90^1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0,10 \end{bmatrix}$$

E para *Simulação 3*:

- $\kappa = 2, \nu = 2$ (quatro LMIs),

- $\delta = 0,99$,

- $\theta = 0,75$,

$$\bullet \quad \Lambda(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{63} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{63} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{63} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{63} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \Lambda(2)\frac{1}{c} = \begin{bmatrix} 010 \times 0,90^{59} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0,10 \times 0,90^1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0,10 \end{bmatrix}$$

onde c um fator de normalização. Em ambos os casos calculamos o vetor μ de acordo com a média móvel dos últimos 63 dias, e utilizamos os pesos dos ativos selecionados na composição do Ibovespa para obter o vetor ω_B . Consideramos o ativo livre de risco r_k como o CDI-Cetip.

Os resultados foram obtidos utilizando um solver chamado **LMISol** desenvolvido por

Oliveira, de Faria e Geromel da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, e disponivel em (Oliveira et al., 1994).

No primeiro gráfico temos a variação semanal das 4 carteiras (*Simulação 1, Simulação 2, Simulação 3* e o Ibovespa). No segundo temos o comportamento das carteiras ao longo do tempo, dado que o investimento inicial foi 100

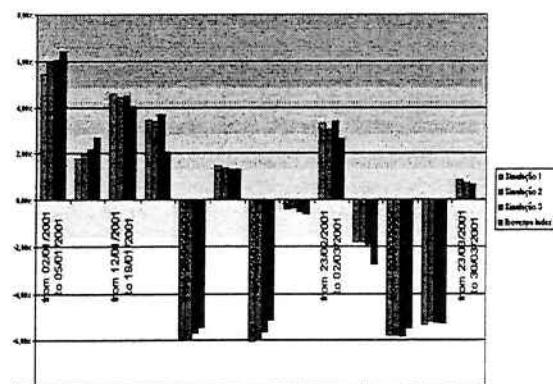


Figura 1. Retornos Semanais das Carteiras

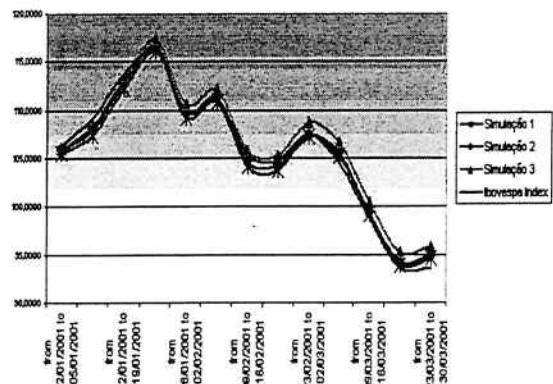


Figura 2. Retorno Total das Carteiras

5 Conclusões

Neste artigo consideramos o problema de seleção ótima de ativos usando semivariâncias como uma medida para a função risco do erro de rastreamento. Assumimos que os retornos esperados dos ativos e do ativo livre de risco, bem como os pesos para o cálculo das semivariâncias, pertencem a um politopo convexo definido por alguns elementos conhecidos que formam os vértices do politopo. O valor da função objetivo é definido como uma combinação convexa da função risco

menos o retorno esperado do erro de rastreamento. Mostramos ainda que o problema de encontrar a carteira com o mínimo pior caso da função objetivo é equivalente a resolver um problema de otimização com desigualdades matriciais lineares, de forma a possibilitar o uso de ferramentas poderosas disponíveis para resolução desta classe de problemas. Apresentamos simulações numéricas com ações negociadas na Bovespa, usando dados do primeiro trimestre de 2001. Os resultados computacionais obtidos sugerem que o uso deste tipo de formulação pode ser bastante útil em problemas de otimização robusta de carteiras.

Referências Bibliográficas

- Black, F. e Litterman, R. (1991). Asset allocation: Combining investor views with market equilibrium, *Journal of Fixed Income* 1: 7–18.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities and Control Theory*, SIAM, Philadelphia.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W. e MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Costa, O. L. V., do Val, J. B. R. e Geromel, J. C. (1997). A convex programming approach to H_2 -control of markovian jump linear systems, *International Journal of Control* 66: 557–579.
- Costa, O. L. V. e Nabholz, R. B. (2002). A linear matrix inequalities approach to robust mean-semivariance portfolio optimization, in Kontoghiorghes, E. J., Rustem, B., Siokos, S., editors *Computational Methods in Decision-Making, Economics and Finance*, Kluwer Academic Publishers.
- Costa, O. L. V. e Paiva, A. C. (2002). Robust portfolio selection using linear matrix inequalities, *Journal of Economic Dynamics and Control* 26: 889–909.
- Duarte Jr., A. M. (1999). Fast computation of efficient portfolios, *The Journal of Risk* 4: 71–94.
- Elton, E. J. e Gruber, M. J. (1995). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, Wiley, New York.
- Geromel, J. C., Peres, P. L. D. e Bernussou, J. (1991). On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems, *SIAM J. on Control and Optimization* 29: 381–402.
- Ghaoui, L. E. e Niculescu, S. I. (2000). *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*, SIAM, Philadelphia.

- Hanza, F. e Janssen, J. (1995). Portfolio optimization model using asymmetric risk function, *Proc. 5th AFIR, Brussels, Belgium, Vol III bis* pp. 3–32.
- Hanza, F. e Janssen, J. (1998). The mean-semivariances approach to realistic portfolio optimization subject to transactions costs, *Applied Stochastics Models and Data Analysis* **14**: 275–283.
- Howe, M. A. e Rustem, B. (1997). A robust hedging algorithm, *Journal of Economic Dynamics and Control* **21**: 1065–1092.
- Howe, M. A., Rustem, B. e Selby, M. J. P. (1996). Multi-period minimax hedging strategies, *European Journal of Operational Research* **93**: 185–204.
- Jorion, P. (1992). Portfolio optimization in practice, *Financial Analysts Journal (January–February)* **1**: 68–74.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley, New York.
- Oliveira, M. C., Faria, D. P. e Geromel, J. C. (1994). Lmisol user's guide, Available at <http://www.dt.fee.unicamp.br/~carvalho/#soft>.
- Roll, R. (1992). A mean/variance analysis of tracking error, *The Journal of Portfolio Management* **18**: 13–22.
- Rudolf, M., Wolter, H. J. e Zimmermann, H. (1999). A linear model for tracking error minimization, *The Journal of Banking and Finance* **23**: 85–103.
- Rustem, B., Becker, R. G. e Marty, W. (1995). Robust min-max portfolio strategies for rival forecast and risk scenarios, *Journal of Economic Dynamics and Control* **24**: 1591–1621.
- Saberi, A., Sannuti, P. e Chen, B. M. (1995). *H₂-Optimal Control*, Prentice Hall.
- Zenios, S. A. (1993). *Financial Optimization*, Cambridge University Press.

BOLETINS TÉCNICOS - TEXTOS PUBLICADOS

- BT/PTC/9901 – Avaliação de Ergoespirômetros Segundo a Norma NBR IEC 601-1- MARIA RUTH C. R. LEITE, JOSÉ CARLOS TEIXEIRA DE B. MORAES
- BT/PTC/9902 – Sistemas de Criptofonia de Voz com Mapas Caóticos e Redes Neurais Artificiais – MIGUEL ANTONIO FERNANDES SOLER, EUVALDO FERREIRA CABRAL JR.
- BT/PTC/9903 – Regulação Sincronizada de Distúrbios Senodais – VAIDYA INÉS CARRILLO SEGURA, PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA
- BT/PTC/9904 – Desenvolvimento e Implementação de Algoritmo Computacional para Garantir um Determinado Nível de Letalidade Acumulada para Microorganismos Presentes em Alimentos Industrializados – RUBENS GEDRAITE, CLÁUDIO GARCIA
- BT/PTC/9905 - Modelo Operacional de Gestão de Qualidade em Laboratórios de Ensaio e Calibração de Equipamentos Eletromédicos – MANUEL ANTONIO TAPIA LÓPEZ, JOSÉ CARLOS TEIXEIRA DE BARROS MORAES
- BT/PTC/9906 – Extração de Componentes Principais de Sinais Cerebrais Usando Karhunen – Loève Neural Network – EDUARDO AKIRA KINTO, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PTC/9907 – Observador Pseudo-Derivativo de Kalman Numa Coluna de Destilação Binária – JOSÉ HERNANDEZ LÓPEZ, JOSÉ JAIME DA CRUZ, CLAUDIO GARCIA
- BT/PTC/9908 – Reconhecimento Automático do Locutor com Coeficientes Mel-Cepstrais e Redes Neurais Artificiais – ANDRÉ BORDIN MAGNI, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR
- BT/PTC/9909 – Análise de Estabilidade e Síntese de Sistemas Híbridos – DIEGO COLÓN, FELIPE MIGUEL PAIT
- BT/PTC/0001 – Alguns Aspectos de Visão Multiescalas e Multiresolução – JOÃO E. KOGLER JR., MARCIO RILLO
- BT/PTC/0002 – Placa de Sinalização E1: Sinalização de Linha R2 Digital Sinalização entre Registradores MFC- PHILLIP MARK SEYMOUR BURT, FERNANDA CARDOSO DA SILVA
- BT/PTC/0003 – Estudo da Técnica de Comunicação FO-CDMA em Redes de Fibra Óptica de Alta Velocidade – TULIPA PERSO, JOSÉ ROBERTO DE A. AMAZONAS
- BT/PTC/0004 – Avaliação de Modelos Matemáticos para Motoneurônios – DANIEL GUSTAVO GOROSO, ANDRÉ FÁBIO KOHN
- BT/PTC/0005 – Extração e Avaliação de Atributos do Eletrocardiograma para Classificação de Batimentos Cardíacos – ELDER VIEIRA COSTA, JOSÉ CARLOS T. DE BARROS MORAES
- BT/PTC/0006 – Uma Técnica de Imposição de Zeros para Auxílio em Projeto de Sistemas de Controle – PAULO SÉRGIO PIERRI, ROBERTO MOURA SALES
- BT/PTC/0007 – A Connected Multireticulated Diagram Viewer – PAULO EDUARDO PILON, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR
- BT/PTC/0008 – Some Geometric Properties of the Dynamic Extension Algorithm – PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA
- BT/PTC/0009 – Comparison of Alternatives for Capacity Increase in Multiple-Rate Dual-Class DS/CDMA Systems – CYRO SACARANO HESI, PAUL ETIENNE JESZENSKY
- BT/PTC/0010 – Reconhecimento Automático de Ações Faciais usando FACS e Redes Neurais Artificiais – ALEXANDRE TORNICE, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR
- BT/PTC/0011 – Estudo de Caso: Tornando um Projeto Testável Utilizando Ferramentas Synopsis – REINALDO SILVEIRA, JOSÉ ROBERTO A. AMAZONAS
- BT/PTC/0012 – Modelos Probabilísticos para Rastreamento em Carteiras de Investimento – HUGO G. V. DE ASSUNÇÃO, OSWALDO L. V. COSTA
- BT/PTC/0013 – Influência de um Controle Imperfeito de Potência e Monitoramento da Atividade Vocal na Capacidade de Sistemas DS/CDMA – MÁRCIO WAGNER DUARTE ROLIM, PAUL JEAN ETIENNE JESZENSKY
- BT/PTC/0014 – Canceladores de Interferência Sucessivo e Paralelo para DS/CDMA – TAUFIK ABRÃO, PAUL JEAN E. JESZENSKY
- BT/PTC/0015 – Transmissão de Serviços de Multimídia num Sistema Móvel Celular CDMA de Banda Larga – EDUARDO MEIRELLES MASSAÚD, PAUL JEAN ETIENNE JESZENSKY
- BT/PTC/0016 – Disseminação do HIV em uma População Homossexual Heterogênea – MARCOS CASADO CASTÑO, JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA
- BT/PTC/0017 – Implementação e Avaliação em Laboratório de um Monitor Cardíaco Portátil para Três Derivações – RAISA FERNÁNDEZ NUNEZ, JOSE CARLOS TEIXEIRA DE BAROS MORAES
- BT/PTC/0018 – Projeto de Filtros Recursivos de N-ésima Banda – IRINEU ANTUNES JÚNIOR, MAX GERKEN
- BT/PTC/0019 – Relative Flatness and Flatness of Implicit Systems – PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA, CARLOS CORRÊA FILHO
- BT/PTC/0020 – Estimativa de Fluxo Sangüíneo nas Artérias Coronárias Usando Imagens de Cineangiociardiotografia – ANA CRISTINA DOS SANTOS, SÉRGIO SHIGUEMI FURUIE
- BT/PTC/0021 – Modelos Populacionais para AIDS e Análise do Equilíbrio sem Epidemia – ELIZABETH FERREIRA SANTOS, JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA

- BT/PTC/0101 – Model-Based Soft-Sensor Design for On-Line Estimation of the Biological Activity in Activated Sludge Wastewater Treatment Plants – OSCAR A. Z. SOTOMAYOR, SONG WON PARK, CLAUDIO GARCIA
- BT/PTC/0102 – Reconhecimento Automático do Locutor Utilizando a Rede Neural Artificial *Field Distributed Memory* – FDM – MARCELO BLANCO, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PTC/0103 – Algoritmos de Filtragem e Previsão em Modelos de Volatilidade – FERNANDO LOVISOTTO, OSWALDO L. V. COSTA
- BT/PTC/0104 – Método de Diferenças Temporais Aplicado às Equações de Riccati Acopladas entre Si – OSWALDO L. V. COSTA, JULIO C. C. AYA
- BT/PTC/0105 – Método de Diferenças Finitas e de Monte Carlo em Derivativos – ANDRÉ CURY MAIALI, OSWALDO LUIZ DO VALLE COSTA
- BT/PTC/0106 – Resolução de um Problema Inverso de Eletromagnetismo por Meio de Redes Neurais Artificiais – ARNALDO MEGRICH, JORGE MIECZYSŁAW JANISZEWSKI
- BT/PTC/0107 – Projeto de Controlador de Temperatura para Perfusion Peritoneal com Hipertermia e Quimioterapia – GIANCARLO ANTONIO BERZACOLA, FUAD KASSAB JÚNIOR
- BT/PTC/0108 – O Papel de Diferentes Grupos Populacionais na Transmissão Sexual do HIV – ELIZABETH FERREIRA SANTOS, JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA
- BT/PTC/0109 – Terapias Ótimas Anti-HIV para a Redução da Transmissão Vertical – RENATO BEVILACQUA, LUIZ HENRIQUE ALVES MONTEIRO
- BT/PTC/0110 – Brain Signal Analysis Using Non-Linear ARIMA Models – ERNANE J. X. COSTA, EUVALDO FERREIRA CABRAL JR.
- BT/PTC/0111 – Cancelamento de Eco Acústico Estéreo: Análise de Algoritmos Adaptativos e um novo Método de Redução do Desalinhamento – ROBERTO ROSCHEL BELLI, PHILLIP MARK SEYMOUR BURT
- BT/PTC/0112 – Natural Gas Flow Computer With Open Architecture Using Intelligent Instrumentation And Field Bus – OSMEL REYES VAILLANT, CLAUDIO GARCIA
- BT/PTC/0113 – Aplicação de Métodos de Inteligência Artificial em Inteligência de Negócios – ROGÉRIO GARCIA DUTRA, EUVALDO FERREIRA CABRAL JR.
- BT/PTC/0114 – Detectores Multusuário para DS/CDMA – Canceladores de Interferência – TAUFIK ABRÃO, PAUL JEAN E. JESZENSKY
- BT/PTC/0115 – Reconhecimento Automático do Locutor Usando Pré-Processamento em Sons Nasalizados com Diversos Classificadores Neurais – ROBERTO AMILTON BERNARDES SÓRIA, EUVALDO FERREIRA CABRAL JR.
- BT/PTC/0116 – Aplicando a Técnica de Times Assíncronos na Otimização de Problemas de Empacotamento Unidimensional – REINALDO DE BERNARDI, TSEN CHUNG KANG
- BT/PTC/0117 – A Simplified Implementation of the Theory of Emotions for Emotrots – RODRIGO DE TOLEDO CAROPRESO, RODRIGO DIAS MORGADO, EUVALDO FERREIRA CABRAL JR.
- BT/PTC/0118 – Modelos Dinâmicos Aplicados à Propagação de Vírus em Redes de Computadores – BETYNA FERNÁNDEZ NAVARRO, JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA
- BT/PTC/0119 – Técnicas para Melhorar o Desempenho do Método dos Análogos Modificado em Predição de Séries Temporais Caóticas – LUIZ MONZÓN BENITEZ, ADEMAR FERREIRA
- BT/PTC/0120 – Um Modelo Microscópico para a Simulação de uma Intersecção Semaforizada – EDUARDO ULI NELLAR, ADEMAR FERREIRA
- BT/PTC/0121 – Subspace Identification Methods Applied to Activated Sludge Processes: A Performance Comparison Study – OSCAR A. Z. SOTOMAYOR, SONG WON PARK, CLAUDIO GARCIA
- BT/PTC/0122 – Controle Avançado de Temperatura para Perfusion Peritoneal com Hipertermia e Quimioterapia – ARNALDO LAGANARO JÚNIOR, FUAD KASSAB JÚNIOR
- BT/PTC/0123 – Análise de Sinais Biológicos Utilizando Wavelets – FRANCO BELTRAME RUNZA, FUAD KASSAB JÚNIOR
- BT/PTC/0123 – Certificação de Estimuladores Neuromusculares no Sistema Brasileiro de Certificação de Equipamentos Médicos – EDUARDO RODRIGUES MANDL, JOSÉ CARLOS TEIXEIRA DE BARROS
- BT/PTC/0201 – Aplicação de Transformadas Tempo – Freqüência e de Redes Neurais Artificiais no Processamento Digital de Sinais Cerebrais – MARCOS TEIXEIRA DE FREITAS FILHO, EUVALDO FERREIRA CABRAL JR.
- BT/PTC/0202 – Aspectos de Identificação para Controle de Sistemas NARX usando Redes Neurais RBF – RITA DE CÁSSIA PAVANI LAMAS, ADEMAR FERREIRA
- BT/PTC/0203 – A Equação de Riccati Estacionária na Estimação Linear em Sistemas Lineares Discretos no Tempo com Saltos Markovianos – SUSSET GUERRA JIMENEZ, OSWALDO LUIZ DO VALLE COSTA
- BT/PTC/0204 – Comparação entre Algoritmos de Identificação Não-Assistida de Canais de Comunicação Baseados em Estatísticas de Segunda Ordem – CLÁUDIO JOSÉ BORDIN JÚNIOR, LUIZ ANTONIO BACCALA
- BT/PTC/0205 – Desenvolvimento de um Simulador de uma Sub-Rede da Medula Espinal – ROGÉRIO RODRIGUES LIMA CISI, ANDRÉ FABIO KOHN
- BT/PTC/0206 – Novos Modelos de Motoneurônios de Vertebrados – MARCOS FRAGA VIEIRA, ANDRÉ FABIO KOHN

- BT/PTC/0207 – Modelagem Auto-Regressiva e Memórias Associativas na Classificação de Sinais Eletromiográficos de Agulhas – IARA KAZUYO IKE, CINTHIA ITIKI
- BT/PTC/0208 – Análise da Classificação e da Síntese de Expressões Faciais com Redes Neurais Artificiais – OLIMPO MURILO CAPELI, EUVALDO FERREIRA CABRAL JUNIOR
- BT/PTC/0209 – Guiagem Automática de um Veículo Autônomo Baseada em Sistema de Visão – NICOLÁS CÉSAR LAVINIA, JOSE JAIME DA CRUZ
- BT/PTC/0210 – Some Geometric Properties of Differential-Algebraic Equations – PAULO SÉRGIO PEREIRA DA SILVA, CARLOS JUTTI WATANABE
- BT/PTC/0211 – Modelos de Média-Variância de Período Simples e Multi-Períodos na Análise de Carteiras de Investimento – MARGARETH AP. DE SOUZA BUENO, OSWALDO LUIZ DO VALLE COSTA
- BT/PTC/0212 – Avaliação da Utilização de Centrais Públicas de Informações de Crédito num Modelo de Previsão para Risco de Crédito – GUILHERME GONZALEZ C. PARENTE, OSWALDO LUIZ DO VALLE COSTA
- BT/PTC/0213 – Propagação de Erros de Freqüência em Redes Mestre Escravo em Estrela Dupla – SANTOS ANDRÉS CASTILHO VARGAS, JOSÉ ROBERTO CASTILHO PIQUEIRA
- BT/PTC/0214 – Avaliação Prática de um Algoritmo de Alta Resolução na Determinação de Freqüências de Ressonância em Estruturas de Grande Porte – LUIZ ANTONIO BARBOSA COELHO, LUIZ ANTONIO BACCALÁ
- BT/PTC/0301 – Finite Horizon Quadratic Optimal Control Problem of Markovian Jump Linear Systems With Partial Information – ESTEBAN FERNANDEZ TUESTA, OSWALDO LUIZ DO VALLE COSTA
- BT/PTC/0302 – A Framework for Admission Control Based on Aggregate Traffic Measurements and Network Characterization – ALEXANDRE BARBOSA DE LIMA, JOSE ROBERTO DE ALMEIDA AMAZONAS
- BT/PTC/0303 – Identificação Nebulosa da Concentração de Oxigênio Dissolvido do Tanque de Aeração de uma Estação de Tratamento de Esgotos por Lodos Ativados – ALEXANDRE MAGNO PARENTE DA ROCHA, CLAUDIO GARCIA
- BT/PTC/0304 – Cálculo de Balanço de Potência em Sistemas DWDM com Spans Variáveis e Amplificadores com Curva de Ganho não Plana – WALMARA DE PAULA HERMAN, JOSÉ ROBERTO DE ALMEIDA AMAZONAS
- BT/PTC/0305 – Robust Model Tracking and 2-D Control Design – FABRIZIO LEONARDI, JOSÉ JAIME DA CRUZ
- BT/PTC/0306 – Classificação de Ações do Mercado Financeiro Utilizando Técnicas Fuzzy –RENATO APARECIDO AGUIAR, ROBERTO MOURA SALES
- BT/PTC/0307 – Esquemas de Multitaxa para Sistemas CDMA de Banda Larga – ANDRÉ FAGUNDES DA ROCHA, PAUL JEAN ETIENNE JESZENSKY
- BT/PTC/0308 – A Time-Invariant Flat System Always Admits a Time-Invariant Flat Output – PAULO SERGIO PEREIRA DA SILVA, PIERRE ROUCHON



