À PROCURA DO $\overline{x}$ DO TEOREMA DE TAYLOR-LAGRANGE

Marco Aurélio de Melo Miola

Orientadores: Ana Catarina Pantone Hellmeister

Cláudio Possani

Vamos começar por enunciar o teorema de Taylor-Lagrange, resultado bastante conhecido e ministrado normalmente nos cursos de Cálculo I ou II:

Teorema: "Seja $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^{n-1}, n vezes derivável no intervalo aberto (a,b). Então existe $\overline{x} \in (a,b)$ tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\overline{x})}{n!}(b-a)^n \text{"}$$

Nosso trabalho visa mostrar um resultado que consideramos curioso sobre o $\overline{x}$ do teorema acima. É a procura do $\overline{x}$ perdido...

Enunciemos o resultado:

"Sejam $f : I \to \mathbf{R}$ de classe C^{n+1} e $a \in I$. Temos, pelo teorema de Taylor-Lagrange, que existe pelo menos um $\overline{x}(h)$ que indicaremos por $\overline{x}_h$ tal que:

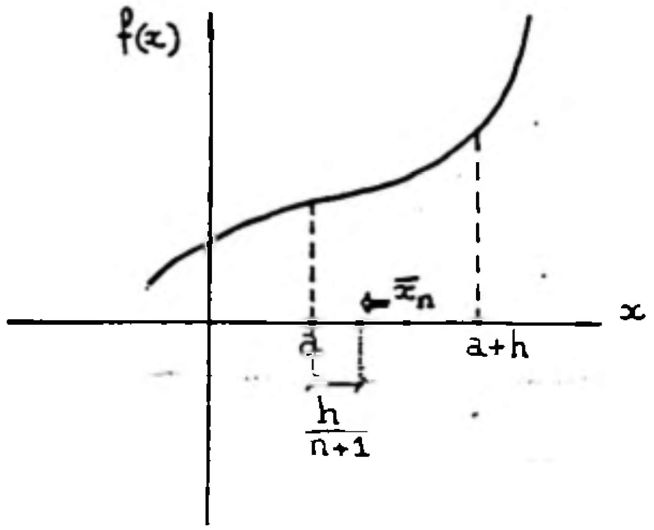
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f'(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\overline{x}_h)}{n!}h^n$$

desde que $(a+h) \in I$.

Pois bem, se $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, seja qual for $\overline{x}_h$ definido acima, temos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{x}_n - a}{h} = \frac{1}{n+1} \text{"}$$

O curioso é que, seja qual for a função f escolhida satisfazendo as hipóteses necessárias, se h se torna suficientemente pequeno, o ponto $\overline{x}_h$ se aproxima cada vez mais do ponto que divide o segmento $[a, a+h]$ na proporção de $\frac{1}{n+1} : 1$, estando $\overline{x}_h$ mais próximo de a.



Podemos considerar o teorema do Valor Médio para a derivada como um caso particular do Teorema de Taylor-Lagrange. Neste caso, o $\overline{x}_n$ do TVM tende para o ponto médio do segmento (desde que $f''(a) \neq 0$. Ver exposição de Thomas Logan Ritchie no mesmo colóquio).

Outra interpretação curiosa que pode ser dada ao resultado é a seguinte. Se a cada h associarmos um único $\overline{x}(h,a)$, construiremos uma função de duas variáveis $x : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, $x(h,a) = \overline{x}_h$. Considerando a fixo, temos que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{x}(h,a) - a}{h} = \frac{1}{n+1}$$

Ou seja, a função que associa o comprimento do intervalo a um $\overline{x}$ é derivável em a e, portanto, contínua em a.

Vamos então à demonstração do resultado:

Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, f de classe C^{n+1} em I, temos que ela satisfaz as condições do Teorema de Taylor-Lagrange. Podemos então escrever para um $a + h \in I$:

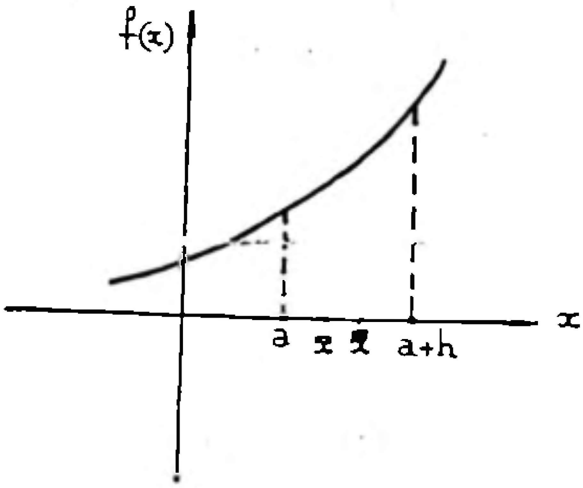
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\overline{x}_h)}{n!}h^n \qquad (1)$$

com $a < \overline{x}_h < a + h$.

Pelas mesmas razões, podemos escrever:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\overline{\overline{x}}_h)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (2)$$

com $a < \overline{\overline{x}}_h < a + h$.



Fazendo (1) - (2):

$$[f^{(n)}(\overline{x}_h) - f^{(n)}(a)].\frac{h^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(\overline{\overline{x}}_h)}{(n+1)!}.h^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n)}(\overline{x}_h) - f^{(n)}(a)}{n} = \frac{f^{(n+1)}(\overline{\overline{x}}_h)}{(n+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n)}(\overline{x}_h) - f^{(n)}(a)}{\overline{x}_h - 1}.\frac{\overline{x}_h - 1}{h} = \frac{f^{(n+1}(\overline{\overline{x}}_n)}{n+1}.$$

Como as expressões acima são iguais, quaisquer que sejam as escolhas de $\overline{x}_h$ e $\overline{\overline{x}}_h$, temos, desde que existam os limites:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f^{(n)}(\overline{x}_h) - f^{(n)}(a)}{\overline{x}_h - a}.\frac{\overline{x}_h - a}{h} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n+1)}(\overline{\overline{x}}_h)}{(n+1)} \quad (3)$$

Como f é C^{n+1}, temos que $f^{(n+1)}$ é contínua em I. Além disso, $\lim_{h \to 0} \overline{\overline{x}}_h = a$. Portanto:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n+1)}(\overline{\overline{x}}_h)}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1} \quad (4)$$

Também por f ser C^{n+1} e devido ao fato de $\lim_{h \to 0} \overline{x}_h = a$ temos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(\overline{x}_h) - f^{(n)}(a)}{\overline{x}_h - 1} = \left(f^{(n)}(a)\right)' = f^{(n+1)}(a) \quad (5)$$

Substituindo (4) e (5) em (3) e lembrando que por hipótese $f^{(n+1}(a) \neq 0$, temos:

$$f^{(n+1)}(a).\lim_{h\to 0}\frac{\overline{x}_h - a}{h} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{\overline{x}_h - a}{h} = \frac{1}{n+1},$$

que é o resultado esperado.

Vamos a seguir mostrar alguns exemplos onde procuramos "testar" a validade do resultado ou mostrar casos onde não valem as hipóteses.

Exemplo 1:

Seja um polinômio de grau n. Podemos escrever:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \Rightarrow p(0) = a_0 .$$

Temos para as derivadas:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + n.a_nx^{n-1} \Rightarrow p'(0) = a_1$$
$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \ldots + n.(n-1)x^{n-2} \Rightarrow p''(0) = 2a_2$$
$$\vdots$$
$$p^{(n+1)}(x) = n!.a_n.x + (n-1)!.a_{n-1} \Rightarrow p^{(n+1)}(0) = (n-1)!.a_{n-1} .$$

Desenvolvendo por Taylor até a ordem $(n-1)$ em torno do zero ($p(x)$ é C^n em toda reta real)

$$p(x) = p(0) + p'(0).x + \frac{p''(0)}{2!}.x^2 + \ldots + \frac{p^{(n-1)}}{(n-1)!}(\overline{x}).x^{n-1}, \quad 0 < \overline{x} < x .$$

Substituindo a expressão do polinômio e suas derivadas:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n = a_0+a_1x+\frac{2a_2}{2}x^2+\frac{3!a_3}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}[n!a_n\overline{x}+(n-1)!a_{n-i}]x^{n-1}$$

Cancelando os termos iguais:

$$a_nx^n = na_n\overline{x}.x^{n-1} \Rightarrow \overline{x} = \frac{x}{n}$$

Como fizemos o desenvolvimento de Taylor até ordem $n-1$, verificamos o nosso resultado para um polinômio de ordem n. Melhor que isso, além de $\lim_{x\to 0}\frac{\overline{x}}{x}=\frac{1}{n}$, temos que $\frac{\overline{x}}{x}=\frac{1}{n}$, qualquer que seja x.

Exemplo 2:

Seja $f(x)=e^x$. A função f é de classe C^∞ e $f^{(n)}(x)=e^x$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$. Fazendo o desenvolvimento de Taylor de ordem n para e^x em torno do zero, temos:

$$
\begin{aligned}
e^x &= e^0+e^0.x+\frac{e^0x^2}{2!}+\ldots+\frac{e^{\overline{x}}}{n!}.x^n, \quad 0<\overline{x}<x\\
\Rightarrow\ e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{e^{\overline{x}}.x^n}{n!}, \quad 0<\overline{x}<x
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Desenvolvendo e^x por sua série infinita de Taylor, temos a seguinte igualdade:

$$
1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{e^{\overline{x}}}{n!}x^n \Rightarrow
$$

$$
\Rightarrow\ e^{\overline{x}}.\frac{x^n}{n!}=\frac{x^n}{n!}\left(1+\frac{x}{(n+1)}+\frac{x^2}{(n+2)(n+1)}+\ldots\right) \Rightarrow
$$

$$
e^{\overline{x}}=1+\frac{x}{(n+1)}+\frac{x^2}{(n+2)(n+1)}+\ldots
$$

Para o cálculo do limite que estamos interessados temos:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\overline{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ell n\ e^{\overline{x}}}{\ell n\ e^x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ell n\left[1+\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+2)(n+1)}+\ldots\right]}{\ell n[1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots}\right).
$$

O limite acima é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando L'Hospital:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{\overline{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{1+\frac{x}{(n+1)}+\frac{x^2}{(n+2)(n+1)}+\ldots}\right).\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2x}{(n+2)(n+1)}+\ldots\right)}{\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{2!}+\ldots}\right).\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots\right)}=\frac{1}{n+1},
$$

obtendo assim o resultado esperado.

Exemplo 3:

$f(x)=x^6.\sin\frac{1}{x}$ se $x\neq 0$ e $f(0)=0$

$f'(x) = 6x^5 . \sin \frac{1}{x} - x^4 . \cos \frac{1}{x}, \ x \neq 0$

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^6 . \sin \frac{1}{x}}{x} = 0$

$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0,$ portanto $f'(x)$ é contínua em $\mathbf{R}$

$f''(x) = (30x^4 - x^2) \sin \frac{1}{x} - (10x^3 . \cos \frac{1}{x}), \ x \neq 0$

$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 0$

$\lim_{x \to 0} f''(x) = 0,$ portanto $f''(x)$ é contínua em $\mathbf{R}$ e $f''(0) = 0.$

A função não satisfaz as hipóteses do resultado se fizermos o desenvolvimento de Taylor para $f(x)$ em torno do zero até primeira ordem, pois $f''(0) = 0$.

Observemos o seguinte: escolhamos x tal que $f(x) = 0$ (há infinitos). Temos, pelo TVM:

$$\exists \ \overline{x} \quad \text{tal que} \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(\overline{x}) \ \Rightarrow \ f'(\overline{x}) = 0 \tag{1}$$

Basta observar que temos infinitos pontos de máximo e mínimo local em $(0, x)$ para concluir que existem infinitos $\overline{x}$ que satisfazem a igualdade de (1). Mais do que isso. podemos escolher $\overline{x}$ tão próximo de zero quanto queiramos. Estes fatos mostram que $\nexists \ \lim_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x}$. Se $f''(0) \neq 0$, teríamos que $\lim_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x} = \frac{1}{2}$.

Exemplo 4:

$f(x) = x^6 \sin \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$

$f'(x) = 6x^5 . \sin \frac{1}{x} - x^4 . \cos \frac{1}{x} + x, \ \ x \neq 0$

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

$\lim_{x \to 0} f'(0) = 0,$ portanto $f'(x)$ é contínua em $\mathbf{R}$

$f''(x) = (30x^4 - x^2) . \sin \frac{1}{x} - 10x^3 . \cos \frac{1}{x} + 1, \quad x \neq 0$

$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 1$

$\lim_{x \to 0} f''(x) = 1$ portanto $f''(x)$ é contínua em $\mathbf{R}$ e $f''(x) = 1 \neq 0.$

Tomemos $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = 0$. Pelo TVM, $\exists \ \overline{x}$ tal que:

$$f(x_0) = f(0) + f'(\overline{x}) . x_0 \ \Rightarrow \ f(\overline{x}) = 0 \ .$$

Como a função f satisfaz nossas hipóteses (é C^2 e $f''(0) \neq 0$), temos que, qualquer que seja a escolha para $\overline{x}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x} = \frac{1}{2},$$

o que é bastante curioso (compare com o exemplo anterior).

Para um x qualquer, ainda temos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x} = \frac{1}{2}.$$

Tentemos explicitar $\overline{x}$. Do TVM:

$$\begin{aligned}
& f(x) = f(0) + f'(\overline{x}).x \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \; x^6 \sin\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} = \left(6\overline{x}^5 \sin\frac{1}{x} - \overline{x}^4.\cos\frac{1}{\overline{x}} + \overline{x}\right).x \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \; x^5 \sin\frac{1}{x} + \frac{x}{2} = 6\overline{x}^5.\sin\frac{1}{x} - \overline{x}^4.\cos\frac{1}{x} + \overline{x} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Não obtivemos progressos na resolução da equação (1) para explicitar $\overline{x}$. No entanto, seria uma questão curiosa numa prova de Cálculo I a seguinte:

"Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\overline{x}}{x}$, sabendo que $\overline{x}$ e x se relacionam por (1)."

Bibliografia: Elon Lages de Lima - Um Curso de Análise - Vol.I.