Sistemas Biortogonais em Espaços de Banach

Maurício Rossetto Corrêa*
Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil
Christina Brech (orientadora)†
Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil

Palavras-chave: espaços de Banach, sistemas biortogonais, axioma de Martin, forcing.

Uma das maneiras mais eficazes de analisar e interpretar um espaço de Banach é via bases de Schauder [2]. Embora todo espaço vetorial tenha uma base algébrica, isso não é sempre verdade para bases desse tipo. Na verdade, é possível provar que se um espaço de Banach X possui uma base de Schauder então X é separável. Visando definir uma noção similar para espaços não separáveis é que surgem as bases longas de Schauder.

Definição 1. *Uma sequência transfinita de vetores $\{x_\gamma\}_{\gamma<\Gamma} \subseteq X$ é dita uma* ***base longa de Schauder*** *se, para todo $x \in X$, existe uma sequência transfinita única de escalares $(\alpha_\gamma)_{\gamma<\Gamma}$ tal que*

$$x = \sum_{\gamma<\Gamma} \alpha_\gamma x_\gamma.$$

Visto que nem todo espaço de Banach possui base longa de Schauder, muitas vezes é necessário nos restringirmos a subespaços fechados ou quocientes para que possamos desfrutar de tais estruturas. É natural então nos indagarmos se todo espaço de Banach de dimensão infinita possui um quociente de dimensão infinita com base de Schauder. Em caso de resposta afirmativa, qual o maior tamanho possível que uma base desse tipo pode admitir?

Segundo Plichko (1983), a resposta para essa pergunta está intimamente atrelada com a existência de sistemas biortogonais não enumeráveis específicos.

Definição 2. *Sejam X um espaço de Banach e $\Gamma \neq \emptyset$. Uma família $\big\{(x_\gamma, x_\gamma^*)\big\}_{\gamma\in\Gamma} \subseteq X \times X^*$ é dita* ***sistema biortogonal*** *se $\langle x_\alpha, x_\beta^*\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in \Gamma$.*

Nesse pôster, investigaremos a existência de sistemas biortogonais em espaços de funções $C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \text{ é contínua}\}$, onde K é um espaço compacto.

Teorema 1. *Se vale o axioma de Martin, então um espaço compacto K é metrizável se, e somente se, todos os sistemas biortogonais de $C(K)$ são enumeráveis.*

Isso significa que, sob o axioma de Martin, obtemos uma caracterização de quando $C(K)$ possui sistemas biortogonais não enumeráveis. Vários outros resultados podem ser obtidos utilizando hipóteses combinatórias ainda mais fortes como o máximo de Martin ou o axioma do forcing próprio.

Referências

[1] HÁJEK, Petr *et al.* **Biorthogonal Systems in Banach Spaces**. 1. Nova York: Springer New York, 2008.

*rossetto@ime.usp.br
†brech@ime.usp.br

[2] TODORCEVIC, Stevo. Biorthogonal systems and quotient spaces via baire category methods. **Mathematische Annalen**, Berlim, 335, 687–715, Abril/2006.

[3] LAZAR, Aldo Joram. Points of support for closed convex sets. **Illinois Journal of Mathematics**, Springfield, 25, 302-305, Verão/1981.

[4] PLICHKO, Anatolij Mykolayovych. Fundamental biorthogonal systems and projective bases in Banach spaces. **Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR**, Leningrado, 33, 240-241, Março/1983.