

**Minicurso: Um passeio pelas geometrias
não euclidianas**

Prof. José Antonio Verderesi (IME USP)

Prof. Sergio Alves (IME USP)

**SEMANA DA LICENCIATURA
DO IME USP**

de 4 a 8 de outubro de 2004



**Instituto de Matemática
e Estatística da USP**



**Um passeio pelas
geometrias não euclidianas**

base 1
1441281

Prof. Josá Antonio Verderesi
Prof. Sergio Alves
Departamento de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística da USP

UM PASSEIO PELA GEOMETRIA

JOSÉ ANTONIO VERDERESI E SERGIO ALVES

A Geometria, enquanto fato mais ou menos aceito, tem suas origens no Egito. É claro que qualquer um pode protestar sobre isto. Por exemplo, nos desenhos ou utensílios do homem neolítico, aparecem formas geométricas que se repetem em diversas situações.

Vamos procurar contar um pouco sobre a geometria de Euclides até o advento das geometrias não euclidianas.

Euclides foi um matemático convidado a fazer parte da escola de Alexandria, fundada por Ptolomeu I. Ele escreveu o famoso livro *Os Elementos* por volta de 300 a.C. que é considerado o primeiro texto de matemática e o maior *best-seller* da História da Humanidade. O ensino da geometria o adotou como livro texto por mais de dois mil anos. Ele trata do que é conhecido como Geometria Euclidiana, que descreveremos sucintamente. Por simplicidade, trataremos somente da geometria plana (duas dimensões).

Um sistema geométrico consiste de objetos abstratos chamados **pontos**, **retas** e de relações entre eles. As relações primitivas ou aceitas sem demonstração chamam-se **axiomas** ou **postulados**. Euclides procurava definir cada um destes objetos; por exemplo, ponto é o que não tem partes. Matematicamente, isto nada significa, pois não sabemos o que significa *partes*. Utilizando-se destas definições, a obra de Euclides se torna longa e muitas vezes é ambígua.

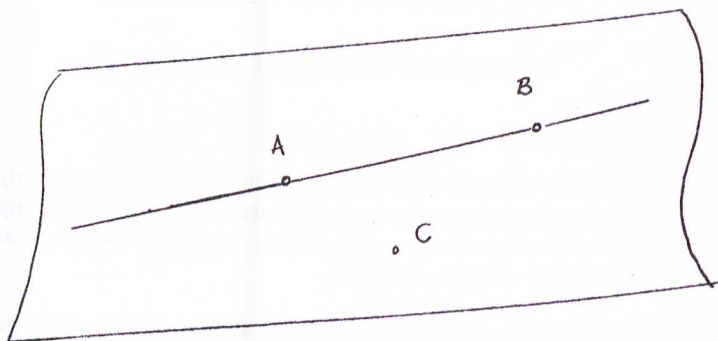
O trabalho de simplificar e sistematizar a obra de Euclides, devemos ao matemático D. Hilbert (1862 – 1943) em seu livro *Fundamentos de Geometria*. Para termos uma idéia do que é um sistema geométrico, descreveremos os axiomas usados por Hilbert. Eles são divididos em cinco grupos:

(1) Incidência

I1: Por dois pontos passa uma única reta;

I2: Uma reta tem pelo menos dois pontos;

I3: Existem três pontos não colineares.



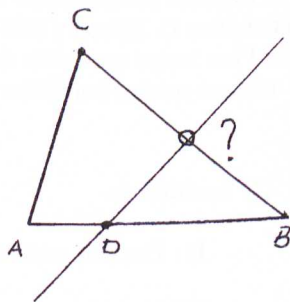
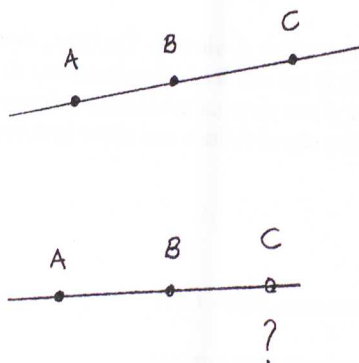
(2) Ordem

O1: Se B está entre A e C , então A , B e C são colineares, distintos e B está entre C e A ;

O2: Dados dois pontos A e B , existe C tal que B está entre A e C ;

O3: Dados três pontos distintos sobre uma reta, no máximo um está sobre os outros dois;

O4 - Axioma de Pasch: Dados três pontos não colineares A , B , C e uma reta r que não passa por eles, se existe um ponto de r entre A e B , então existe um ponto de r entre A e C , ou entre B e C .



(3) Congruência

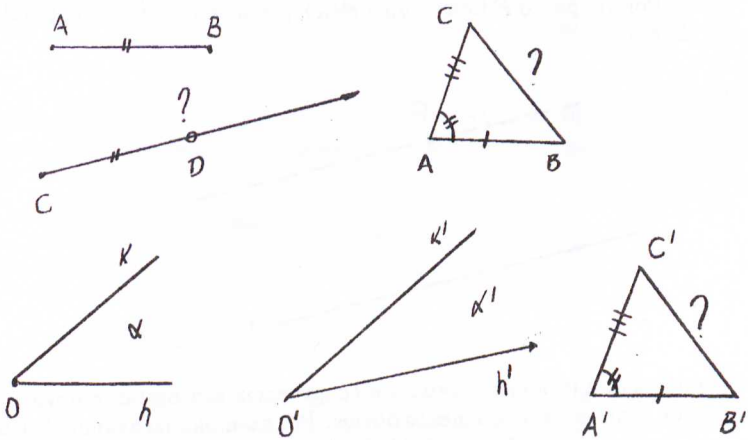
C1: Seja $\overline{AB}$ um segmento e s uma semi-reta que começa em C . Então existe um único ponto D sobre s tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$;

C2: As relações de congruência para segmentos e ângulos são relações de equivalência;

C3: Se B está entre A e C , B' está entre A' e C' , $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$;

C4: Seja $\angle h, k$ um ângulo e h' uma semi-reta com origem O' e α' um dos semi-planos determinado por h' . Então existe uma única semi-reta k' em α' com origem O' tal que $\angle h, k \equiv \angle h', k'$;

C5: Nos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, então $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$.

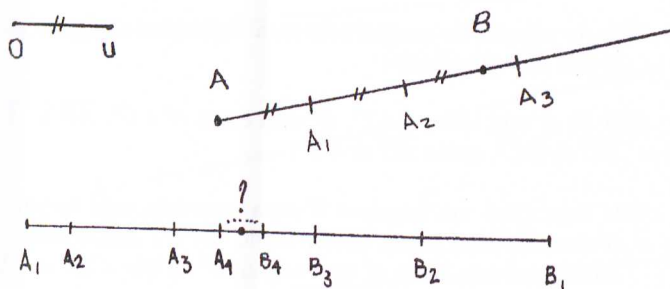


(4) Continuidade

Cont. 1 - Arquimedes: Dados segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{OU}$, existem pontos $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 1$, na semi-reta $\overrightarrow{AB}$ tais que:

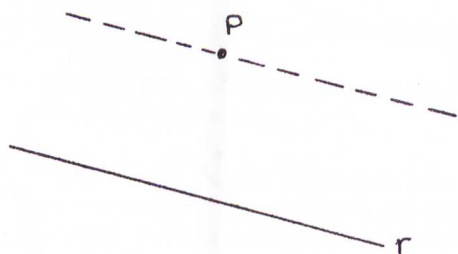
- $\overline{OU} \equiv \overline{AA_1} \equiv \overline{A_1A_2} \equiv \dots \equiv \overline{A_{n-1}A_n}$;
- A_1 está entre A e A_2 , A_2 está entre A_1 e A_3 , ...;
- B está entre A e A_n .

Cont. 2 - Cantor: Seja $[A_1, B_1] \supset [A_2, B_2] \supset \dots$ uma seqüência infinita de intervalos fechados. Então existe pelo menos um ponto $P \in \cap [A_i, B_i]$.



(5) Axioma das Paralelas

Por um ponto P fora de uma reta r passa no máximo uma paralela à reta r .



Os axiomas de incidência, ordem e congruência são bastante óbvios; os axiomas de continuidade são menos óbvios. Por exemplo, no axioma de Cantor, está envolvida a noção de infinidade. Este axioma como formulado aqui veio muito depois de Euclides. Cantor viveu no século XIX (1845 – 1918). Para se ter uma idéia da sutileza deste axioma, consideremos a seqüência

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots$$

Se considerarmos a seqüência aberta $(0, 1/n)$, então $\cap (0, 1/n) = \emptyset$. Já $\cap [0, 1/n] = \{0\}$.

Mas o axioma que mais intrigou os matemáticos foi o axioma das paralelas. Euclides, em seu livro, só o usou na 29ª proposição, mesmo sabendo que com ele as demonstrações seriam mais simples.

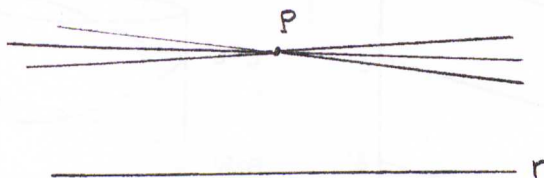
Provavelmente, a dificuldade com este axioma vem do fato que ele envolve a totalidade da reta: uma paralela a uma reta r passando por P é uma reta que prolongada indefinidamente não intercepta r !

Desde Euclides, muitos matemáticos tentaram dar evidências da verdade do postulado das paralelas, procurando uma demonstração ou procurando reduzi-lo a resultados evidentes. Todos os esforços foram em vão.

A solução para o problema das paralelas veio com o surgimento das Geometrias não Euclidianas.

Seus criadores foram o russo Nicolai Lobachevski (1793–1856) e o húngaro Jonas Bolyai (1802 – 1860). A obra que marca a data da descoberta das Geometrias não Euclidianas é a de Lobachevski: *Sobre os fundamentos da Geometria* (geometria imaginária ou geometria de Lobachevsky), que apareceu em 1829. Jonas Bolyai publicou sua *Ciência Absoluta do Espaço* em 1832.

A idéia deles foi substituir o axioma das paralelas pela sua negação: por um ponto P fora de uma reta r passa mais que uma paralela a r .



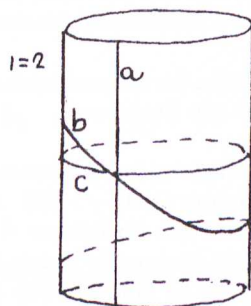
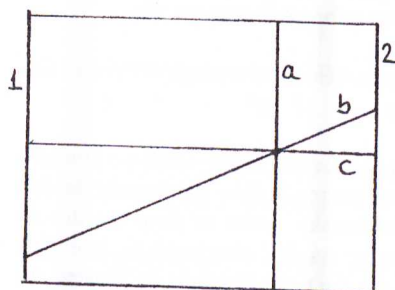
Com isto, eles desenvolveram uma geometria tão completa, tão coerente e tão elegante como a de Euclides. Posteriormente, outros matemáticos, com destaque a F. Klein (1849 – 1825), H. Poincaré (1854 – 1912), Riemann (1826 – 1966), mostraram que as geometrias não euclidianas eram tão consistentes quanto a geometria euclidiana, dando interpretações euclidianas para elas.

Para finalizar, é necessário salientar que o trabalho de Riemann, dando continuidade ao trabalho de Gauss sobre superfícies no espaço, se baseia numa noção de espaço tão geral que inclui as geometrias euclidianas, não euclidianas e outras geometrias.

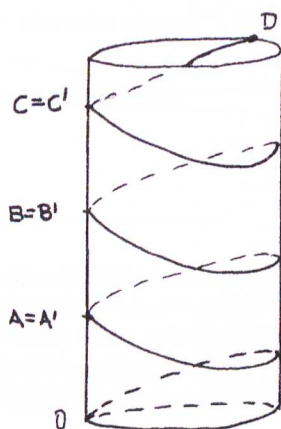
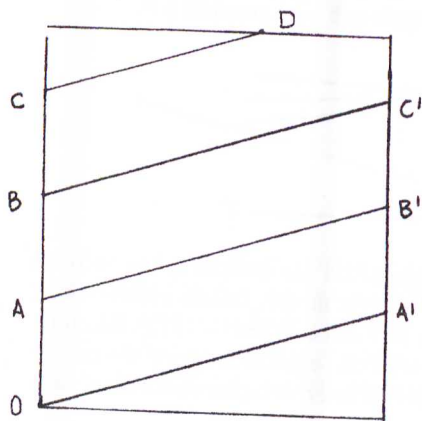
Não desenvolveremos nenhuma destas geometrias, pois isto seria demasiado longo, mas procuraremos dar uma concretude a partir de exemplos ou modelos dos novos conceitos que surgiram das reflexões de todos estes pesquisadores.

A Geometria do Cilindro:

Um cilindro é obtido identificando dois lados de um retângulo.



Uma reta no plano é caracterizada como a que realiza a menor distância entre dois pontos.

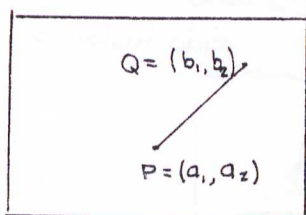


As retas do plano são enroladas no cilindro.

- a : reta vertical
- b : circunferência
- c : espiral

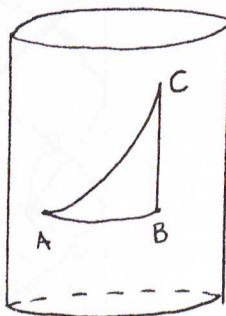
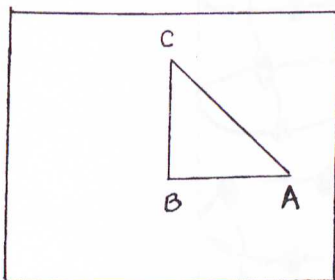
Se chamarmos **pontos** os pontos do cilindro, **retas** as curvas do tipo a, b, c , então por dois pontos P, Q do cilindro passa uma reta.

Podemos, então, calcular a distância entre P e Q .

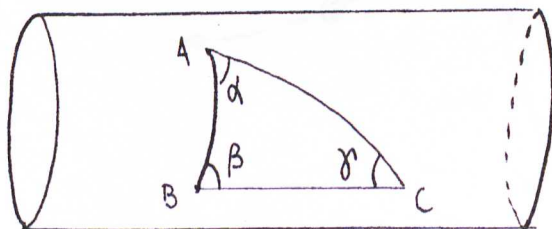


$$d(P, Q) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Podemos calcular a área de um triângulo e seus ângulos.

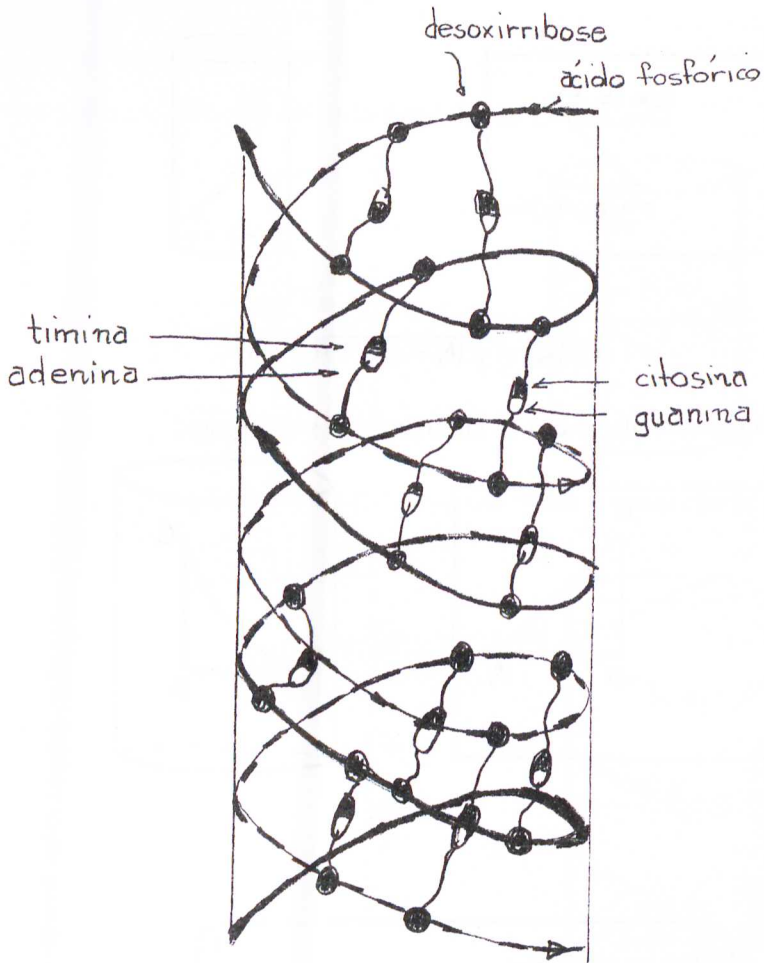


$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

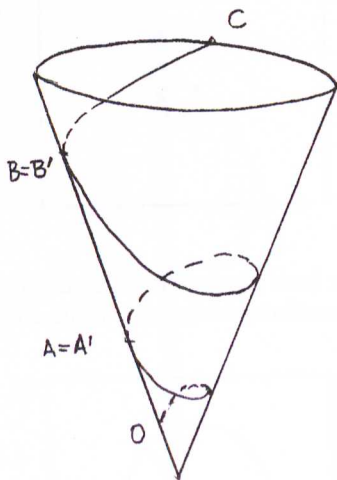
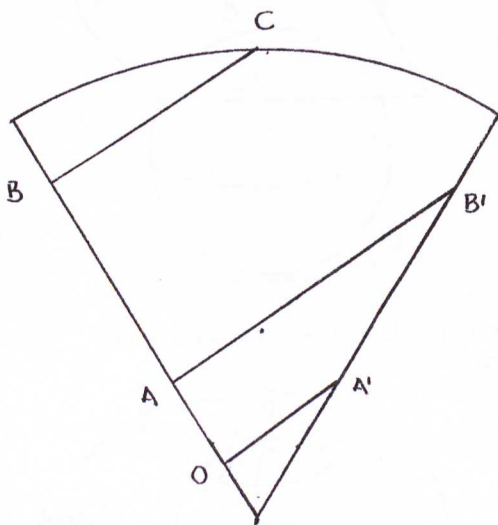
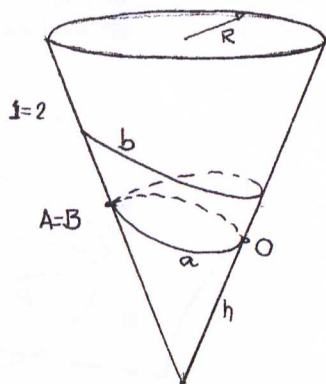
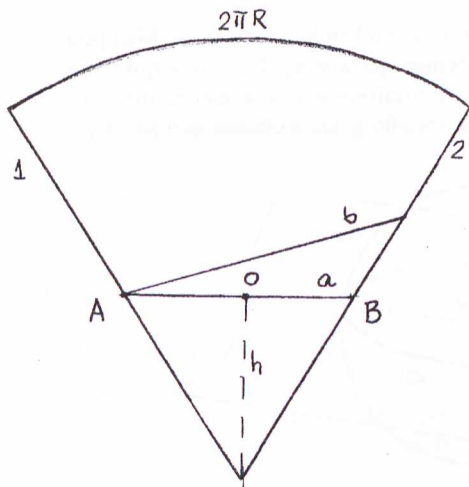


$$\alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ.$$

A bioquímica utiliza a geometria do cilindro para descrever o DNA (ácido desoxirribonucleico), um componente do núcleo das células que transmite a identidade na reprodução do ser vivo.



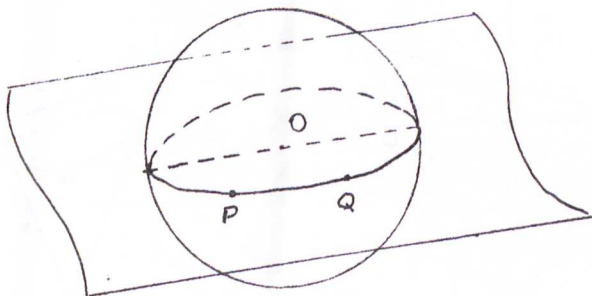
Da mesma maneira, podemos estudar a geometria de um cone. Observe as figuras:



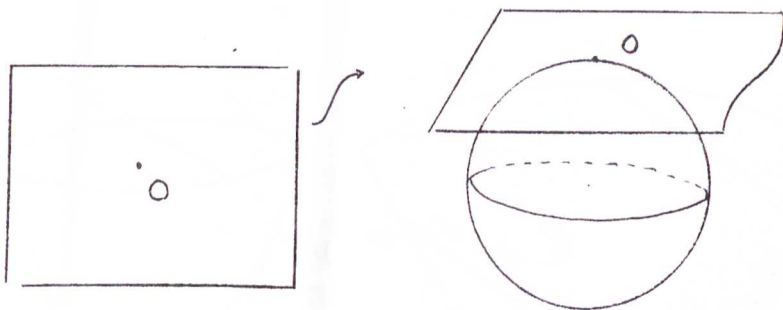
A Geometria da Esfera:

Sera possível, com uma folha de papel e com uma tesoura construir uma esfera, como fizemos com o cilindro e com o cone?

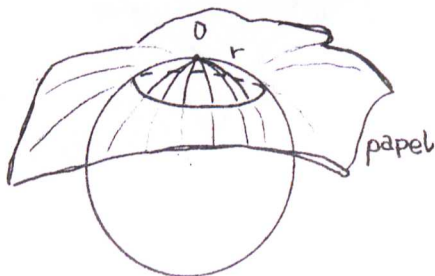
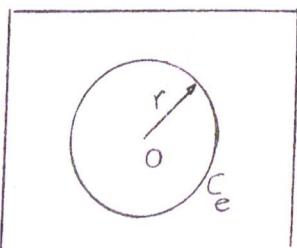
Qualquer um já sentiu a dificuldade de se embrulhar uma bola. Mas poucos sabem explicar o porquê. Consideremos, para simplificar, que queremos construir uma esfera de raio $R = 1$. Assumiremos que a menor distância entre dois pontos da esfera é dada pelo arco do grande círculo que passa por eles.



Marquemos na folha um ponto O e comecemos a embrulhar a esfera com o ponto O no polo norte.



Se fosse possível, então a circunferência no plano de raio r iria cair sobre a circunferência de raio r sobre a esfera.



O comprimento da circunferência C_e é dado por

$$C_e = 2\pi \sin r$$

e a área do círculo esférico por

$$A_e = 2\pi(1 - \cos \phi).$$

Mas o comprimento da circunferência no plano é dado por

$$C = 2\pi r$$

e sua área, por

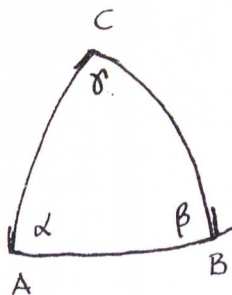
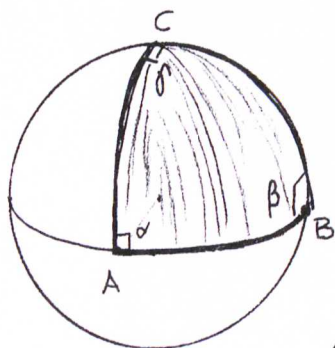
$$A = \pi r^2$$

o que conduz a um absurdo!

Assim, para enrolar uma esfera por um plano é necessário que este seja elástico, por exemplo, uma folha de borracha!

Medir no plano é diferente de medir na esfera. Isto mostra a dificuldade de construir um atlas usando distâncias!

Apesar disto, podemos considerar a geometria da esfera. As retas são grandes círculos, pois eles realizam a menor distância entre pontos.



$$A = 4\pi R^2$$

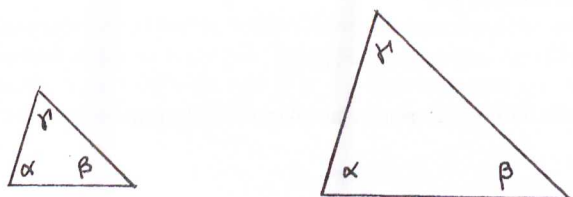
$$A_{\Delta} = \frac{4\pi R^2}{8} = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{2} > \pi$$

Suponhamos $R = 1$.

$$A_{\Delta} = \frac{\pi}{2} = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

Esta fórmula mostra que se dois triângulos têm os mesmos ângulos, então eles são congruentes.



Esta é a chamada geometria elíptica, e foi descoberta por Riemman.

Referências Bibliográficas

O leitor interessado em aprofundar os temas aqui tratados encontrará farta bibliografia disponível em nossas bibliotecas e livrarias. A maioria destes textos é escrito em língua inglesa e, por isso, pouco acessível a muitos dos leitores.

A lista abaixo apresenta uma pequena amostra de livros escritos em português ou espanhol que supomos ajudará o leitor a preencher suas necessidades.

[1] COURANT, R. e ROBBINS, H., *O que é Matemática?* Ed. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2000.

[2] EFIMOV, N. V., *Geometria Superior*, Ed. Mir, Moscou, 1984.

[3] HILBERT, D., *Fundamentos de la Geometria* Madrid, 1953.

[4] STRUIK, D. J., *História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, Lisboa, 1992.

Realização:



Universidade de São Paulo



Instituto de Matemática e Estatística da USP

• FEUSP Faculdade de Educação da USP

Patrocínio:

