

**Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**

**Deptº de Engenharia de Estruturas e Fundações**



ISSN 0103-9822

**BT/PEF/9513**

---

**Aplicações do  
Lagrangeano Aumentado  
em Otimização Estrutural**

---

**Paulo de Mattos Pimenta  
Priscila Goldenberg  
Reyolando Brasil**

16001.25

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações  
Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP - Série BT/PEF

Diretor: Prof. Dr. Célio Taniguchi  
Vice-Diretor: Prof. Dr. Eduardo Camilher Damasceno

Chefe do Departamento: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli  
Suplente do Chefe do Departamento: Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta

#### Conselho Editorial

Dinâmica e Estabilidade das Estruturas  
Engenharia de Solos  
Estruturas de Concreto, Metálicas, de Madeira  
Interação Solo-Estrutura  
Mecânica Aplicada  
Métodos Numéricos  
Pontes e Grandes Estruturas  
Teoria das Estruturas

Prof. Dr. C. E. N. Mazzilli  
Prof. Dr. W. Hachich  
Prof. Dr. P. B. Fusco  
Prof. Dr. C. E. M. Maffei  
Prof. Dr. P. M. Pimenta  
Prof. Dr. J. C. André  
Prof. Dr. D. L. de Zagottis  
Prof. Dr. V. M. Souza Lima

Coordenador Técnico: Prof. Dr. L. A. C. Diogo

O Boletim Técnico é uma publicação da Escola Politécnica da USP/Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, fruto de pesquisas realizadas por docentes e pesquisadores desta Universidade

**Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**

**Deptº de Engenharia de Estruturas e Fundações**

\*

ISSN 0103-9822

**BT/PEF/9513**

---

**Aplicações do  
Lagrangeano Aumentado  
em Otimização Estrutural**

---

**Paulo de Mattos Pimenta  
Priscila Goldenberg  
Reyolando Brasil**

**São Paulo - 1995**

Pimenta, Paulo de Mattos

Aplicações do Lagrangeano aumentado em otimização estrutural / P. de M. Pimenta, P. Goldenberg, R.M.L. R. da F. Brasil. -- São Paulo : EPUSP, 1995.

20p. -- (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, BT/PEF/9513)

1. Estruturas - Otimização matemática I. Goldenberg, Priscila II. Brasil, Reyolando Manoel Lopes R. da F. III. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações IV. Título V. Série

CDU 624.04:519.851

# Aplicações do Lagrangeano aumentado em otimização estrutural

Paulo de Mattos Pimenta  
Priscila Goldenberg  
Reyolando Brasil

maio 1995

## Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>MÉTODO LAGRANGEANO AUMENTADO</b>	<b>2</b>
2.1	RESULTADOS TEÓRICOS . . . . .	6
2.2	IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO . . . . .	9
2.3	COMENTÁRIOS FINAIS . . . . .	11
<b>3</b>	<b>PROBLEMA COM RESTRIÇÕES DINÂMICAS</b>	<b>12</b>
3.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	12
3.2	EXEMPLO: otimização de um pórtico plano sujeito a carrega- mento de choque . . . . .	13
3.3	PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL . . . . .	16
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>18</b>

## **RESUMO**

O método do Lagrangeano aumentado utilizado na resolução de problemas de otimização estrutural é descrito. Este método resolve uma seqüência de problemas de minimização sem restrições definidos usando a função custo e as funções restrições. O método mostrou-se bastante eficiente em aplicações como, por exemplo, problemas com restrições dinâmicas. Será efetuado um resumo do método bem como sua aplicação em problemas de otimização com restrições dinâmicas.

## **ABSTRACT**

We present the method of the augmented lagrangian for structural optimization. This method solves a series of minimization problems without restrictions using the cost function and the restriction functions. The method is quite efficient in applications as, for example, in optimization problems with dynamic restrictions.

# 1 INTRODUÇÃO

O método do Lagrangeano aumentado, originalmente apresentado por Hestenes[1] e Powell[2] no contexto de programação matemática sujeita a restrições de igualdade mostrou-se muito mais eficiente que os métodos de penalidades e dos multiplicadores de Lagrange, conforme mencionado em Fletcher[3]. A generalização do método do Lagrangeano aumentado para problemas de programação matemática envolvendo restrições de desigualdade foram apresentadas por diversos autores entre eles Rockafeller[4] e Fletcher[3]. Recentemente, o método do Lagrangeano aumentado tem sido amplamente utilizado na resolução de problemas de otimização estrutural, de modo bastante satisfatório. Podemos por exemplo citar o uso do Lagrangeano aumentado no estudo do problema de contato envolvendo fricção, conforme apresentado por Simo [5], a otimização de estruturas sujeitas a restrições dinâmicas, apresentado por Chahande[6], a utilização do Lagrangeano aumentado em análise elasto-plástica Medrano[7 – 8], e outros.

O presente trabalho visa apresentar, em linhas gerais, o método do Lagrangeano aumentado e ilustrar uma de suas aplicações em otimização estrutural. Na seção 2 apresentaremos os fundamentos do método, definindo a função Lagrangeana aumentada e apresentando condições necessárias e suficientes de otimalidade, bem como uma idéia geral da implementação do método. Na seção seguinte apresentaremos o problema de otimização com restrições dinâmicas como formulado por Chahande[6].

## 2 MÉTODO LAGRANGEANO AUMENTADO

O método Lagrangeano aumentado tem sido amplamente descrito na literatura por Fletcher[3], Luenberger [9] e outros. No decorrer deste trabalho indicaremos por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

um vetor de  $\mathfrak{R}^n$  e por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

uma matriz com  $n$  linhas e  $m$  colunas.

Além disto suporemos que as funções são contínuas com derivadas parciais contínuas até segunda ordem. Neste caso, o vetor gradiente de uma função  $f$  em relação a  $\mathbf{x}$  será indicado por

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{bmatrix}$$

e a matriz Hessiana será indicada por

$$\nabla^2 f = \left[ \partial^2 f / \partial^2 x_{ij} \right]$$

Para apresentarmos o método vamos considerar o problema geral de programação matemática :

Problema P. Determinar um vetor  $\mathbf{x}$  de  $\mathfrak{R}^n$  que minimiza a função objetivo  $f(\mathbf{x})$  sujeito às seguintes restrições

restrições de igualdade :

$$g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, l$$

restrições de desigualdade :

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad ; \quad i = l + 1, \dots, m.$$

Muitos conceitos e procedimentos podem ser discutidos usando somente as restrições de igualdade. A este problema denominaremos de problema com restrições de igualdade (ECP). Quando somente restrições de desigualdade aparecerem denominaremos de problema com restrições de desigualdade (ICP). O problema P é bastante geral e pode ser utilizado para modelar diversos problemas de otimização estrutural, conforme Haug[10], Morris[11] e outros.

Uma dificuldade com as aplicações em Engenharia é que, em muitas aplicações as funções envolvidas no problema dependem implicitamente das variáveis de projeto. Este fato torna difícil e caro o cálculo do gradiente das funções envolvidas. O método do Lagrangeano aumentado, conforme veremos mais adiante, resolve uma seqüência de problemas de minimização sem restrições. Este fato alivia o problema do cálculo dos gradientes uma vez que somente um gradiente precisa ser calculado, a saber, o gradiente do funcional aumentado. Devemos observar que mesmo para o cálculo deste gradiente devemos fazer uma análise cuidadosa e na literatura existem diversas maneiras de tratar este problema [12 – 13]. Como o funcional Lagrangeano será muito mencionado neste trabalho, vamos inicialmente defini-lo :

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(\mathbf{x}) \quad (1)$$

onde  $u_i$  são os multiplicadores de Lagrange que podem ser reunidos no vetor  $\mathbf{u}$ . O método do Lagrangeano aumentado utiliza o Lagrangeano acima, acrescentando um termo que penaliza as restrições. Genericamente, podemos escrever o Lagrangeano aumentado da seguinte forma

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{x}) + P(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{u}, \mathbf{r}) \quad (2)$$

onde  $P(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{u}, \mathbf{r})$  é a função penalidade generalizada e  $\mathbf{r}$  é um vetor que contém só parâmetros de penalidade. No caso em que  $\Phi$  é constituída do Lagrangeano acrescido dos termos de penalidade o nome Lagrangeano aumentado fica justificado. Os valores de  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{u}$  são escolhidos no começo de cada minimização sem restrições e, a seguir, o funcional  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})$  é minimizado com relação a  $\mathbf{x}$ . No final de cada minimização os valores de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{r}$  são atualizados e o processo continua até atingir convergência. Diversos problemas computacionais devem ser analisados em cada uma das questões mencionadas. Além disto um estudo cuidadoso deve ser efetuado frente a cada novo problema comparando com métodos primais [14 – 15]. A título de ilustração convém mencionar que testes realizados por Arora [16] mostraram que os métodos primais se comportam bastante satisfatoriamente para problemas com restrições estáticas. O mesmo não ocorre com restrições dinâmicas [17] onde o método Lagrangeano aumentado mostrou-se mais eficiente.

O método do Lagrangeano aumentado pode ser esquematizado nos seguintes passos:

PASSO 1 : ( Estimativas iniciais ) Fazer  $k = 0$ . Escolher uma estimativa inicial para  $\mathbf{u}^0, \mathbf{r}^0$

PASSO 2:(Resolução do problema de minimização) Minimize  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^k, \mathbf{r}^k)$  em relação a  $\mathbf{x}$ .

Seja  $\mathbf{x}^k$  a solução.

PASSO 3:(Teste de convergência) Caso a convergência já tenha sido atingida, pare o processo; caso contrário vá ao passo 4.

PASSO 4:(atualização) Atualize  $\mathbf{u}^k$  e cresça  $\mathbf{r}^k$  se necessário.

PASSO 5: Faça  $k=k+1$  e vá ao passo 2.

Conceitualmente o método é muito simples e sua essência está contida nos passos 2 e 4. Daí a performance do método depende de quão eficiente estes dois passos são executados. No passo 2 o método de minimização sem restrição utilizado e a precisão requerida para a minimização de  $\Phi$  determinam o comportamento e eficiência do Lagrangeano aumentado. Procedimentos para atualizar  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{r}$  também governam o comportamento e eficiência do método. Daí estes dois aspectos deverem ser analisados cuidadosamente. Métodos do tipo gradiente e quase-Newton (BFGS)[3] são freqüentemente utilizados na literatura [17] como sugestão para o passo 2. Não devemos descartar a possibilidade de utilizarmos outros métodos como, por exemplo, os gradientes conjugados [3], que também é um método bastante eficiente. Independente do método utilizado devemos observar que o critério de parada do algoritmo de minimização sem restrições tem uma influência marcante no resultado final. Em geral, o critério de parada para o passo 2 é atingido quando

$$\|\nabla_{\mathbf{x}}\Phi(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{r}^k)\| \leq \epsilon \quad (3)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{x}}$  indica o gradiente em relação à variável  $\mathbf{x}$  e  $\epsilon$  é a precisão desejada.

Relativamente ao passo 4 existem diversos modos de atualizar  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{r}$ . A título de ilustração mostramos o método sugerido por Hestenes[1].

O multiplicador de Lagrange pode ser atualizado para a  $i$ -ésima restrição de igualdade por

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + g_i(\mathbf{x}^k) \quad (4)$$

onde  $\theta_i^k$  define o multiplicador de Lagrange por

$$u_i^k = r_i \theta_i^k$$

onde  $k$  indica o  $k$ -ésimo passo da minimização sem restrição. Quando restrições de desigualdade são presentes os multiplicadores podem ser atualizados por

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \max\{g_i(\mathbf{x}^k), \theta_i^k\} \quad ; \quad \theta_i^{k+1} \geq 0 \quad i = l+1, \dots, m \quad (5)$$

O Lagrangeano aumentado pode ser definido de diversas maneiras. A mais popular é a sugerida por Rockafellar [4]

$$\Phi(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{r}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l r_i ((g_i + \theta_i)^2 - \theta_i^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=l+1}^m r_i ((g_i + \theta_i)_+^2 - \theta_i^2) \quad (6)$$

onde  $r_i \theta_i (= u_i)$  são os multiplicadores de Lagrange e  $(h)_+ = \max\{0, h\}$ . Este funcional se aproxima muito do funcional apresentado por Fletcher [3], a saber:

$$\Phi(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{r}) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l r_i (g_i + \theta_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=l+1}^m r_i (g_i + \theta_i)_+^2 \quad (7)$$

A escolha de um ou outro não influencia muito na solução final do problema. Observamos que os funcionais acima apresentados constituem-se expressões da função Lagrangeana acrescidas de termos de penalidades, daí o nome Lagrangeano aumentado.

## 2.1 RESULTADOS TEÓRICOS

Nesta seção vamos inicialmente comparar as condições necessárias e suficientes para o problema P com as do problema de minimização sem restrições do funcional dado por Rockafellar para  $k$  suficientemente grande, isto é, depois de um número suficiente de iterações. A seguir, apresentaremos as propriedades de convergência do método. Seja  $\mathbf{x}^*$  a solução do problema P e  $\nabla g_i(\mathbf{x}^*)$ ,  $i \in E \cup I$  linearmente independente em  $\mathbf{x}^*$ , onde  $E$  é o conjunto de índices relativamente as restrições de igualdade e  $I$  o conjunto dos índices relativos as restrições de desigualdade, ativas em  $\mathbf{x}^*$ . Então sabemos que existem multiplicadores de Lagrange  $\mathbf{u}^*$  tais que :

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (8)$$

Seja a seguir  $\mathbf{x}^k$  o mínimo de  $\Phi(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{r})$  onde  $\mathbf{u}^k$  é o parâmetro corrente na  $k$ -ésima iteração e  $\mathbf{r} > 0$ , (isto é, todas componentes positivas). Neste caso, a condição de primeira ordem para o Lagrangeano aumentado é

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{x}^k) + \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^l r_i (g_i(\mathbf{x}^k) + \theta_i^k) \nabla g_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=l+1}^m r_i (g_i(\mathbf{x}^k) + \theta_i^k)_+ \nabla g_i(\mathbf{x}^k) = 0$$

Aqui nós estamos supondo que

$$\nabla(g_i(\mathbf{x}^k) + \theta_i^k)_+^2 = 2((g_i(\mathbf{x}^k) + \theta_i^k)_+) \nabla g_i(\mathbf{x}^k) \quad ; \quad i = l + 1, \dots, m \quad (10)$$

Resultando  $\nabla\Phi$  contínuo, conforme Luenberger[9]. Como

$$(g_i(\mathbf{x}) + \theta_i)_+ = \max\{g_i(\mathbf{x}) + \theta_i, 0\} = \theta_i + \max\{-\theta_i, g_i(\mathbf{x}^k)\}$$

podemos escrever a equação acima da seguinte forma :

$$\nabla\Phi(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{x}^k) + \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^l r_i (g_i(\mathbf{x}^k) + \theta_i^k) \nabla g_i(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=l+1}^m r_i (\theta_i^k + \max\{-\theta_i^k, g_i(\mathbf{x}^k)\}) \nabla g_i(\mathbf{x}^k) = 0$$

Suponhamos que  $\theta_i^k$  sejam escolhidos de modo a satisfazer as atualizações (4) e (5) vistas acima e suponha também que, a seqüência gerada por  $\theta_i^k$  seja convergente com limite  $\theta_i^*$ ,  $i=1, \dots, m$ . Como

$$g_i(\mathbf{x}^k) = 0 \quad i = 1, \dots, l$$

$$\max\{-\theta_i^k, g_i(\mathbf{x}^k)\} = 0 \quad i = l + 1, \dots, m$$

a condição (11) coincide com a condição (8) vemos que a condição do problema sem restrição coincide com condição do problema com restrição. Daí poderemos concluir que

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^*$$

$$r_i \theta_i^k = r_i \theta_i^* = u_i^*.$$

Observemos também que a condição

$$\max\{-\theta_i^k, g_i(\mathbf{x}^k)\} = 0 \quad i = l + 1, \dots, m$$

pode ser satisfeita somente quando  $\theta_i^k = 0$  ou  $g_i(\mathbf{x}^k) = 0$  ou ambos nulos. Esta condição também pode ser reescrita

$$-\theta_i^k \cdot g_i(\mathbf{x}^k) = 0 \quad i = l + 1, \dots, m$$

Daí as condições acima serem equivalentes às condições de Kuhn-Tucker do problema P :

$$\nabla f(\mathbf{x}^k) + \sum_{i=1}^m u_i^k \nabla g_i(\mathbf{x}^k) = 0$$

$$g_i(\mathbf{x}^k) = 0 \quad , i = 1, \dots, l$$

$$g_i(\mathbf{x}^k) \leq 0 \quad , i = l + 1, \dots, m$$

$$u_i^k \geq 0 \quad , i = l + 1, \dots, m$$

$$g_i(\mathbf{x}^k) u_i^k = 0 \quad , i = l + 1, \dots, m$$

Da discussão acima vemos que o objetivo da escolha de  $u_i$  (ou  $\theta_i$ ) como em (4) e (5) é para obter

$$g_i(\mathbf{x}^k) \longrightarrow 0$$

e

$$\max\{-\theta_i^k, g_i(\mathbf{x}^k)\} \longrightarrow 0 \quad i = l + 1, \dots, m.$$

Este resultado nos leva a

$$\mathbf{x}^k \longrightarrow \mathbf{x}^*$$

demonstrando que  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local do problema P.

Até o momento, só nos preocupamos com as condições necessárias para mínimo local. Podemos também estudar as condições suficientes. As condições suficientes para  $\mathbf{x}^*$  ser um mínimo local isolado para o problema P é que

$$\langle \mathbf{x}, \nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \mathbf{x} \rangle > 0$$

para todo  $\mathbf{x} \neq 0$  e satisfazendo as condições

$$\langle \nabla g_i(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} \rangle = 0 \quad i \in E \cup I$$

$$\langle \nabla g_i(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} \rangle \leq 0 \quad i \notin E \cup I$$

onde  $\nabla^2 L$  é a matriz Hessiana da função Lagrangeana e  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$ .

Se  $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  é definida positiva então temos uma condição suficiente para  $\mathbf{x}^*$  ser um mínimo local isolado. Entretanto, se esta condição não se verifica,  $\mathbf{x}^*$  não será isolado mas ainda pode ser um mínimo local [17].

Seja agora  $\mathbf{x}^k$  tal que para  $k$  suficientemente grande satisfaz as condições necessárias de otimalidade do Lagrangeano aumentado de Rockafeller. Como condição suficiente para  $\mathbf{x}^k$  ser mínimo local de  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^k, \mathbf{r}), \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{r})$  deve ser definida positiva. Para  $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^*$  as condições acima não garantem que  $\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{r})$  seja definida positiva. Entretanto, os parâmetros de penalidade  $\mathbf{r}$  podem ser aumentados de modo a tornar  $\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{r})$  definida positiva.

Antes de concluirmos esta seção vamos mencionar as propriedades de convergência. Não estudaremos aqui detalhadamente estas questões que estão amplamente descritas na literatura [1, 3, 17]. Nós diremos que a convergência é global se a seqüência gerada pelo algoritmo convergir para um ponto de mínimo local começando de um ponto inicial arbitrário (queremos ressaltar que não estamos afirmando que o mínimo é global). A convergência global do método Lagrangeano aumentado pode ser colocada como segue:

Se existir  $M > 0$  tal que

$$\|\mathbf{r}^k\| > M \quad , \quad \text{com} \quad r_i^k > r_i^0 > 0 \quad \forall k$$

então

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{M}{\|\mathbf{r}^k\|} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|$$

$$\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\| \leq \frac{M}{\|\mathbf{r}^k\|} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|$$

para  $\mathbf{u}^k \in T$ , onde  $T$  é uma bola aberta de centro  $\mathbf{u}^*$ .

A velocidade de convergência do método depende criticamente do procedimento de atualização dos multiplicadores. Em Arora[17] este assunto é amplamente estudado. Além disto, o referido trabalho estuda diferentes modos de estudar a minimização sem restrições.

## 2.2 IMPLEMENTAÇÃO DO ALGORITMO

A implementação que apresentaremos é devida a Powell[2].

Utilizaremos um parâmetro  $K'$  definido por :

$$K' = \max\left\{\max_{1 \leq i \leq l} |g_i|; \max_{l+1 \leq i \leq m} |\max(g_i, -\theta_i)|\right\}$$

PASSO 1 : Faça  $k = 0$  e  $K = \infty$ . Escolha uma estimativa inicial para  $\mathbf{x}^0$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\theta^0$ , e escalares  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 1$ ,  $\epsilon > 0$ , onde  $\epsilon$  é a precisão desejada.  $\alpha$  é utilizado para forçar decrescimento suficiente nas violações das restrições e  $\beta$  utilizado para crescer os parâmetros penalidades.

PASSO 2: Faça  $k = k + 1$ .

PASSO 3: Minimize  $\Phi(\mathbf{x}, \theta^k, \mathbf{r})$  (definidos por Rockafeller ou Fletcher), com relação a  $\mathbf{x}$ . Seja  $\mathbf{x}^k$  o ótimo neste passo.

PASSO 4 : Calcule

$$g_i(\mathbf{x}^k) \quad i = 1, \dots, m.$$

Calcule  $K'$  e verifique o seguinte critério de convergência :

$$K' \leq \epsilon$$

$$\|\nabla \Phi(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{r})\| \leq \epsilon.$$

Se o critério for satisfeito, então pare. Caso contrário estabeleça os seguintes conjuntos :

$$I_E = \{i : |g_i| > \frac{K}{\alpha}, i = 1, \dots, l\}$$

$$I_I = \{i : |\max\{g_i, -\theta_i\}| > \frac{K}{\alpha}, i = l + 1, \dots, m\}$$

PASSO 5 : Se

$$K' \geq K$$

coloque

$$r_i = \beta r_i$$

$$\theta_i^{k+1} = \frac{\theta_i^k}{\beta} \quad \forall i \in I_E \cup I_I$$

e vá ao passo 2. Neste caso nós aumentamos a penalidade por um fator  $\beta$  e diminuimos  $\theta_i$  do mesmo fator, mantendo o multiplicador inalterado.

PASSO 6 : Atualize  $\theta_i^k$  colocando

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + g_i(\mathbf{x}^k) \quad i = 1, \dots, l$$

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \max\{g_i(\mathbf{x}^k), -\theta_i^k\} \quad i = l+1, \dots, m$$

Se  $K' \leq \frac{K}{\alpha}$ , coloque  $K = K'$  e vá ao passo 2.

PASSO 7: Coloque

$$r_i = \beta r_i$$

e

$$\theta_i^{k+1} = \frac{\theta_i^k}{\beta} \quad \forall i \in I_E \cup I_I.$$

Coloque  $K=K'$  e vá ao passo 2.

## 2.3 COMENTÁRIOS FINAIS

Vimos no resumo acima o método do Lagrangeano aumentado para a resolução do problema de minimização com restrições de igualdade e desigualdade. Neste método, tanto a função objetivo como as restrições são utilizadas para construir um funcional, a saber, o Lagrangeano aumentado, utilizado para construir uma seqüência de problemas de minimização sem restrições. Nestas minimizações sem restrições os multiplicadores são mantidos fixos e devem ser atualizados a cada passo. Mencionamos a importância destes dois procedimentos bem como apresentamos condições de otimalidade e propriedades de convergência. Antes de passarmos para o exemplo ilustrativo vamos mencionar que a implementação deste método é simples, comparada com a de outros métodos. Tudo o que precisamos é uma subrotina eficiente de minimização sem restrições. Este fato é particularmente verdadeiro quando tratamos de problemas com restrições dinâmicas em problemas de otimização com restrições dependentes do tempo, conforme veremos mais adiante.

### 3 PROBLEMA COM RESTRIÇÕES DINÂMICAS

#### 3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

A formulação geral de um problema de otimização com restrições dinâmicas consiste em encontrar um vetor  $n$ -dimensional  $\mathbf{x}$ , denominado vetor das variáveis de projeto, que minimiza o funcional custo dado por

$$f = f_b(\mathbf{x}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_c(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), t) dt \quad (12)$$

sujeito as restrições

$$g_i = g_b(\mathbf{x}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g_c(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), t) dt = 0 \quad i = 1, \dots, l \quad (13)$$

$$g_i = g_b(\mathbf{x}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g_c(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), t) dt \leq 0 \quad i = l + 1, \dots, m \quad (14)$$

e para todo  $t \in [t_0, t_f]$

$$g_i = g_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), t) dt = 0 \quad i = m + 1, \dots, l' \quad (15)$$

$$g_i = g_p(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), t) dt \leq 0 \quad i = l' + 1, \dots, m' \quad (16)$$

onde  $\mathbf{z}(t)$  é um  $\mu$  - vetor das variáveis de estado que suporemos funções contínuas de  $t$ , os funcionais custo e restrições supostos convenientemente diferenciáveis e  $t_0$  e  $t_f$  instantes iniciais e finais respectivamente. Em otimização estrutural, as variáveis de estado devem satisfazer o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{z}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (17)$$

com as condições iniciais

$$\dot{\mathbf{z}}(t_0) = \dot{\mathbf{z}}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0,$$

onde  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  é uma matriz  $\mu * \mu$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  é uma matriz  $\mu * \mu$ ,  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  é uma matriz  $\mu * \mu$  e  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  é um vetor  $\mu * 1$ .

No método dos multiplicadores, as respostas dinâmicas são integradas no intervalo de tempo e combinadas com a função custo para obter o funcional composto. Este funcional pode ser interpretado como Lagrangeano para o problema aumentado com certas penalidades. Daí o funcional ser ocasionalmente denominado de Lagrangeano aumentado. No processo de otimização, seleciona-se um valor inicial para os multiplicadores e minimiza-se o Lagrangeano aumentado. A seguir, os multiplicadores são atualizados e o processo é repetido. Para o problema dinâmico acima o Lagrangeano aumentado é definido por:

$$\Phi(\mathbf{x}, \theta, \mathbf{r}, t_f) = f(\mathbf{x}, t_f) + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^l r_i (g_i(\mathbf{x}, t_f) + \theta_i)^2 + \sum_{i=l+1}^m r_i ((g_i(\mathbf{x}, t_f) + \theta_i)_+)^2 \right\} +$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \sum_{i=m+1}^{l'} r_i (g_i(\mathbf{x}, t) + \theta_i(t))^2 + \sum_{i=l'+1}^{m'} r_i ((g_i(\mathbf{x}, t) + \theta_i(t))_+)^2 \right\} dt. \quad (18)$$

Aqui  $r_i \theta_i = u_i$  para  $i=1, \dots, m$  são os multiplicadores de Lagrange correspondentes às restrições  $g_i(\mathbf{x}, t_f)$ ;  $i=1, \dots, m$ . Estes multiplicadores são constantes com relação ao tempo. Também  $\theta_i \geq 0$  para  $i=l+1, \dots, m$ .

Além disto,  $r_i \theta_i = u_i$   $i = m+1, \dots, m'$  são os multiplicadores de Lagrange correspondentes as restrições  $g_i(\mathbf{x}, t)$ ;  $i = m+1, \dots, m'$ . Estes multiplicadores são funções contínuas no tempo. Também  $\theta_i(t) \geq 0$  para  $i = l'+1, \dots, m'$ . Finalmente,  $r_i (> 0)$  é o parâmetro penalidade correspondente as restrições  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m'$ . Este parâmetro de penalidade é constante ao longo do tempo quando correspondente às restrições independentes do tempo  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , e é função do tempo quando correspondente às restrições dependentes do tempo  $g_i$ ,  $i = m+1, \dots, m'$ .

### 3.2 EXEMPLO: otimização de um pórtico plano sujeito a carregamento de choque

Apresenta-se, na Fig.1, exemplo de um pórtico metálico plano de duas baias e dois andares, adaptado de [10]. Trata-se de uma estrutura facilmente encontrável em aplicações na Engenharia civil. É constituída de seis colunas e duas vigas em perfis I de aço. Os momentos de inércia  $I$  das seções transversais das peças são escolhidos como variáveis de projeto.

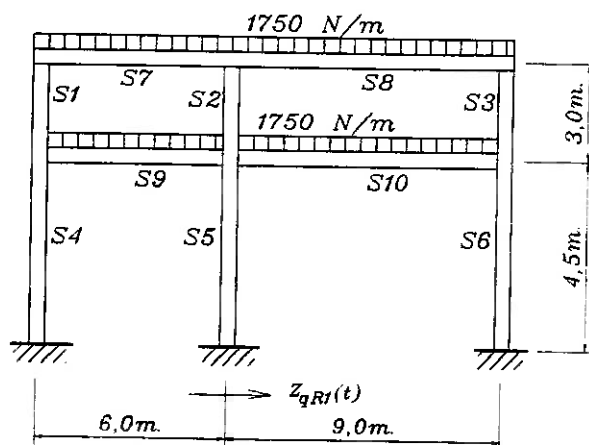


Fig.1 - Pórtico c/ movimento de suportes

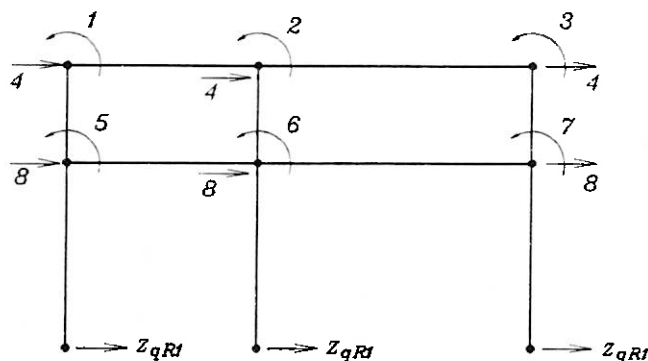


Fig.2 - Modelo matemático

Considera-se um carregamento estático de gravidade de  $1775 \text{ N/m}$  distribuído sobre as vigas horizontais. Para simulação de efeito de terremotos, admite-se deslocamento horizontal das fundações em forma de um pulso de meia onda de seno.

O modelo matemático correspondente é mostrado na Fig.2 onde se identificam as coordenadas generalizadas adotadas. Como é usual em edificações desta natureza, desprezam-se as deformações axiais das peças. Dessa forma, tem-se 8 graus de liberdade.

As restrições deste problema de dimensionamento são sobre os deslocamentos, tensões, frequência fundamental (a mais baixa frequência natural) e as variáveis de projeto, conforme as definições, válidas para todo o tempo, que se seguem:

$$|z_4(t)| \leq 7.5cm \quad (19)$$

$$|z_8(t)| \leq 7.5cm \quad (20)$$

$$|\sigma_i(t)| \leq 206MPa \quad (21)$$

$$f_1 \geq 4.775Hz \quad (22)$$

$$1.2 \times 10^{-4} \leq b_i \leq 8.5 \times 10^{-3}m^4 \quad (23)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, 10$ .

O material adotado, o aço, tem módulo de elasticidade  $E = 206GPa$  e densidade  $\rho = 7740kg/m^3$ . Propriedades geométricas das seções necessárias ao dimensionamento, como o módulo resistente a flexão (em  $m^3$ ) e a área da seção transversal (em  $m^2$ ), são usualmente disponíveis em tabelas das usinas siderúrgicas. No entanto, para formulação do problema, faz-se necessário ajustar expressões aproximadas que as forneçam, em forma fechada, em função das variáveis de projeto, os momentos de inércia. No tempo  $t = 0$  a estrutura parte do repouso e suas fundações são forçadas a um movimento transiente do solo na forma:

$$z_{qR1}(t) = \begin{cases} 2.5 \sin 30t & cm, \quad 0 \leq t \leq \pi/30 \\ 0 & \pi/30 < t \end{cases} \quad (24)$$

Apresenta-se, na Tabela 1, os momentos de inércia adotados no dimensionamento inicial e os dos perfis de todas as barras otimizados numericamente, conforme [10]. Na análise dinâmica por superposição modal, refeita a cada passo, foram utilizados os três primeiros modos naturais da estrutura. Seus valores finais foram 9.96, 23.55 e 31.33 Hz.

Tabela 1

Barra	Variáveis de Projeto	Inicial ( $m^4$ )	Final ( $m^4$ )
1	$x_1$	$1.25 \times 10^{-3}$	$5.365 \times 10^{-4}$
2	$x_2$	$1.25 \times 10^{-3}$	$5.836 \times 10^{-4}$
3	$x_3$	$1.25 \times 10^{-3}$	$1.200 \times 10^{-4}$
4	$x_4$	$1.25 \times 10^{-3}$	$1.584 \times 10^{-3}$
5	$x_5$	$1.25 \times 10^{-3}$	$7.721 \times 10^{-4}$
6	$x_6$	$1.25 \times 10^{-3}$	$2.462 \times 10^{-3}$
7	$x_7$	$1.25 \times 10^{-3}$	$5.714 \times 10^{-4}$
8	$x_8$	$1.25 \times 10^{-3}$	$1.200 \times 10^{-4}$
9	$x_9$	$1.25 \times 10^{-3}$	$9.182 \times 10^{-4}$
10	$x_{10}$	$1.25 \times 10^{-3}$	$1.200 \times 10^{-4}$
Massa ( $kg$ )		6784	4481

### 3.3 PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL

Para apresentar o algoritmo definiremos um parâmetro  $K_b$  por:

$$K_b = \max\left\{\max_{1 \leq i \leq l} |g_i(\mathbf{x}, t_f)|; \max_{l+1 \leq i \leq m} |g_i(\mathbf{x}, t_f) - \theta_i|; \right. \\ \left. \max_{m+1 \leq i \leq m'} (\max_t |g_i(\mathbf{x}^k, t)|); \max_{l'+1 \leq i \leq m'} (\max_t | \max g_i(\mathbf{x}^k, t) - \theta_i^k(t) |)\right\}$$

PASSO 1. Coloque  $k = 0$ ,  $K = \infty$ ; estime os vetores  $\mathbf{x}^0$ ,  $\theta^0$ ,  $\mathbf{r}$  e os escalares  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 1$  e  $\epsilon > 0$  ( $\epsilon$  é um número pequeno utilizado no critério de parada).

PASSO 2. Coloque  $k = k + 1$ .

PASSO 3. Minimize  $\Phi(\mathbf{x}, \theta^k, \mathbf{r})$  com relação a  $\mathbf{x}$ . Seja  $\mathbf{x}^k$  o ponto de ótimo obtido neste passo.

PASSO 4. Calcule  $g_i(\mathbf{x}^k, t_f)$ ;  $i=1, \dots, m$  e  $g_i(\mathbf{x}^k, t)$ ;  $i = m+1, \dots, m'$  e  $t \in [t_0, t_f]$ .

Calcule  $K_b$  e verifique o critério de parada, isto é, se  $K_b < \epsilon$ , pare. Caso contrário, estabeleça o seguinte conjunto de igualdades e desigualdades:

$$I_E = \{i : |g_i(\mathbf{x}^k, t_f)| \geq K/\alpha; \quad i = 1, \dots, l\}$$

$$I_I = \{i : |g_i(\mathbf{x}^k, t_f) - \theta_i| \geq K/\alpha; \quad i = l+1, \dots, m\}$$

$$I_{E'} = \{i : \max_t |g_i(\mathbf{x}^k, t)| \geq K/\alpha; \quad i = m + 1, \dots, l'\}$$

$$I_{I'} = \{i : \max_t |\max g_i(\mathbf{x}^k, t) - \theta_i^k| \geq K/\alpha; \quad i = l' + 1, m'\}$$

PASSO 5: Atualização dos parâmetros de penalidade e multiplicadores

(a) Se  $K_b \geq K$ , coloque  $r_i = \beta_i r_i$  e  $\theta_i^{k+1} = \theta_i^k/\beta$  para todos  $i \in I_E \cup I_I$  ;  
coloque  $r_i = \beta_i r_i$  e  $\theta_i^{k+1}(t) = \theta_i^k(t)/\beta$  para todos  $i \in I_{E'} \cup I_{I'}$  e  $t \in [t_0, t_f]$   
isto é incremente os parâmetros de penalidades sem mudar os multiplicadores.  
Vá ao passo 2.

(b) Se  $K_b \leq K$ , atualize  $\theta_i^k$  colocando

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + g_i(\mathbf{x}^k, t_f); \quad i = 1, \dots, l$$

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \max\{g_i(\mathbf{x}^k, t_f), -\theta_i^k\}; \quad i = l + 1, \dots, m$$

$$\theta_i^{k+1}(t) = \theta_i^k(t) + g_i(\mathbf{x}^k, t); \quad i = m + 1, \dots, l', \quad t \in [t_0, t_f]$$

$$\theta_i^{k+1}(t) = \theta_i^k(t) + \max\{g_i(\mathbf{x}^k, t), -\theta_i^k(t)\}; \quad i = l' + 1, \dots, m', \quad t \in [t_0, t_f]$$

e vá ao passo 2.

(c) Se  $K_b \leq K/\alpha$ , coloque  $K=K_b$  e vá ao passo 2.

Caso contrário, coloque  $r_i = \beta_i r_i$  e  $\theta_i^{k+1} = \theta_i^k/\beta$  para todos  $i \in I_E \cup I_I$  ;  
coloque  $r_i = \beta_i r_i$  e  $\theta_i^{k+1}(t) = \theta_i^k(t)/\beta$  para todos  $i \in I_{E'} \cup I_{I'}$  e  $t \in [t_0, t_f]$ .  
Coloque  $k=K_b$  e vá ao passo 2.

Nos problemas de Engenharia, é necessário impor limites nas variáveis de projeto, para que elas não se tornem absurdamente grandes. Uma vez que a solução foi encontrada, os parâmetros  $\theta$  e  $\theta(t)$  e  $\mathbf{r}$  são atualizados e o processo continua. A escolha dos parâmetros iniciais é muito importante. Usualmente o parâmetro  $\theta_i$  é considerado nulo. Em pesquisas recentes (Chahande[6] efetuando simulações exaustivas verificou que é conveniente considerarmos  $\alpha$  entre 2 e 3, e  $\beta$  entre 6 e 10.

## 4 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos, em linhas gerais, o método do Lagrangeano aumentado aplicado a problemas de otimização estrutural. Uma análise cuidadosa do algoritmo apresentado nos leva a diversos problemas computacionais que serão discutidos em trabalhos futuros.

## 5 BIBLIOGRAFIA

- 1) M.R.Hestenes, Multiplier and gradient methods. *J.Optimiz. Theory Applic.* 4, 303-320,1969
- 2) M.J.D. Powell, A method for nonlinear constraints in minimization problems. In *Optimization* (Edited by Fletcher). Academic Press, New York, 1969.
- 3) Fletcher, R. *Practical methods of optimization*, 2 volumes, John Wiley - Sons 1980
- 4) Rockafeller R.T. Augmented Lagrange multiplier functions and duality in non-convex programming. *SIAM J. Control* 12,268-285, 1974
- 5) Simo J. C. and Laursen T. A. An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Computers and Structures* vol.42, vol 1, 97-116,1992.
- 6) Chahande A. I. and Arora J. S. Optimization of large structures subjected to dynamic loads with the multiplier method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 37, 413-430. 1994.
- 7) Medrano M. S. Aplicações da Programação Matemática em Análise Elasto-Plástica. Dissertação de Mestrado apresentada na EPUSP em 1994.
- 8) Medrano M. S.,Pimenta P., Goldenberg P. Aplicações da Programação Matemática em Análise Elasto-Plástica de sólidos e estruturas. XIV Congresso Ibero-Americano de Métodos Numéricos em Engenharia.CILANCE, São Paulo ,dezembro 1993.
- 9) Luenberger D.G. *Linear and nonlinear programming*, 2.ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1984
- 10) Haug E. J. and Arora J.S. *Applied Optimal Design*, Wiley-Interscience, New York. 1979
- 11) Morris A.J. *Fundation of structural optimization : a unified approach* John Wiley - Sons 1982

- 12) Arora J. S. and Haug E.J. Methods of design sensitivity analysis in structural optimization, AIAA,17,970-973, 1979.
- 13) Arora J. S. and Belegundu A.D. Potential of transformation methods in optimal design, AIAA,19,1372-1374, 1981
- 14) Polak E. Computational methods in optimization : a unified approach, New-York Academic Press, 1971
- 15) Zangwill W.I. Non-linear programming : a unified approach, Prentice-Hall, 1969
- 16) Arora J. S. and Belegundu A.D. A studyof mathematical programming methods for structural optimization. Part I : Theory, Part II Numerical aspects, Int. j. numer. methods eng.,21, 1583-1624(1985)
- 17) Arora J. S., Chahande A. I. Paeng J. K. Multiplier methods for engineering optimization. int. j. numer. methods eng. 32,1485-1525, 1991

BOLETINS PUBLICADOS

- 8501 - "Métodos Variacionais Aplicados à Estabilidade dos Taludes e Fundações" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8502 - "O Processo de Cross Derivado do Método dos Deslocamentos" - JOÃO CYRO ANDRÉ
- 8503 - "Fundações por Bloco" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8504 - "Investigação Experimental sobre o Valor Limite Wu das Tensões de Cisalhamento no Concreto Estrutural" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8505 - "Investigação Experimental sobre o Cisalhamento em Lajes de Concreto Armado" - PERICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8506 - "Cálculo das Alterações de Tensão, ao Longo do Tempo, nas Peças de Concreto Protendido: Procedimentos Diretos, Simples, Alternativos ao do CIB" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8507 - "Elementos de Cálculo Variacional e suas Aplicações nas Estruturas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8508 - "Spline Cúbico e suas Aplicações" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8509 - "Correlação Paramétrica Deformatória Flexão Composta, Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8510 - "Lugares Geométricos Notáveis na Flexão Composta - Concreto Armado - PIETRO CANDREA
- 8511 - "Regiões Deformatórias Notáveis Flexão Composta - Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8512 - "Diagramas Momentos - Curvaturas Flexão Composta Normal - Seções Retangulares Armadura Qualquer nas Barras" - PIETRO CANDREVA
- 8601 - "Alterações, ao Longo do Tempo, dos Estados de Tensão nas Seções de Concreto, Armadas para Diferentes Etapas de Carregamento" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8602 - "Peças de Concreto Armadas com Barras Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8603 - "A Relaxação do Concreto e a Redistribuição das Tensões nas Peças Armadas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8604 - "Análise Não Linear de Trelças Especiais" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8605 - "Variação, no Tempo, do Estado de Tensão nas Seções de Concreto Armado" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8606 - "Evolução ao Longo do Tempo, das Tensões de Cisalhamento nas Vigas de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8607 - "Cômputo de Fluência por Problemas de Estabilidade" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8608 - "Erros Usuais Cometidos nas Determinações das Tensões de Cisalhamento nas Peças de Altura Variável" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8609 - "Contribuição da Fluência do Aço, da Fluência e Retração do Concreto nos Deslocamentos Devidos à Flexão, nas Peças de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8610 - "Sistema VX-IQB para Processamento de Textos Científicos" - IVAN DE QUEIROZ BARROS

- 8611 - "Análise Não Linear de Pórticos Planos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8612 - "Erros a Serem Evitados no Cálculo de Pórticos, em Particular no dos Edifícios" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8613 - "Mínima Correctio Methodi Inveniendi Lineas Curvas Elasticii" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8614 - "Nova Técnica para Codificações de Procedimentos Envolvendo Matrizes - Avaliação de Desempenho" - IVAN DE QUEIROZ BARROS
- 8615 - "Casos Especiais de Flambagem de Pórticos de Edifícios Altos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8616 - "Vigas Protendidas: Alterações das Tensões, das Deformações e dos Deslocamentos ao Longo do Tempo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8701 - "Consideração sobre Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas Planas" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8702 - "Consideração da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Laminares Planas" - Parte I - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8703 - "Consideração da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Laminares Planas" - Parte II - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8704 - "Estado Plano de Tensão (Método dos Resíduos Ponderados e Método dos Elementos Finitos)" - VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 8705 - "Aplicação das Equações de diferenças a um Caso Particular de Estrutura" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8706 - "Verificação da Estabilidade dos Pilares de Pontes" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8707 - "Aplicação do Método Variacional ao Cálculo do Empuxo sobre as Paredes de Arrimo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8708 - "Análise das Chapas em Regime Elasto - Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8709 - "Análise das Placas em Regime Elasto-Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8710 - "A Flambagem de Euler e a "Elástica" Revisitadas: Uma Formulação Unificada para os Cinco Casos Clássicos" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8711 - "Laje Protendida e Perdas de Protensão Resultantes da Retração, Fluência do Concreto e do Aço" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8712 - "O Método dos Elementos Finitos na Solução de Placa, Solicitadas no seu Plano ou Fletidas. Vinculação com o Método de Ritz" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8713 - "Sobre o Conceito de Corpo Material Linearmente Elástico" - PAULO BOULOS
- 8714 - "Rotações Finitas" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8715 - "Efeitos Estruturais de Segunda Ordem nas Treliças" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, YZUMI TAGUTI
- 8716 - "Estudo das Placas: Resíduos Ponderados e Elementos Finitos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA

- 8717 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Uniforme" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8718 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades - Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Triangular" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8719 - "Estacas com Diversos Vínculos de Extremidades - Modelo de Winkler. Coeficiente de Reação Lateral do Solo com Distribuição Trapezoidal" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8720 - "Sobre a Matriz de Rigidez Tangente das Barras de Treliças Planas Sujeitas a Rotações Grandes" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8721 - "Um Método Geral para a Redução da Matriz de Rigidez Tangente de Elementos Finitos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8722 - "A Matriz de Rigidez Tangente do Elemento de Pórtico Plano - Teoria de Timoshenko" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8801 - "Distribuição Transversal de Carga nas Pontes de Vigas Justapostas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8802 - "O Método de Galerkin no Problema das Placas Fletidas - Teoria de Reissner" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 8803 - "Um Algoritmo para o Cálculo do Tensão Rotação e do Tensão das Deformações Logarítmicas em Problemas Incrementais" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8804 - "Um Algoritmo para a Integração das Tensões na Plasticidade Perfeita" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8805 - "Análise das Cascas Cilíndricas em Regime Elasto Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8806 - "Consideração do Efeito de Membrana nas Placas pelo Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8807 - "Alteração do Estado de Tensão nas Estruturas Hiperestáticas Devida à Fluência do Aço, do Concreto e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8808 - "O Método dos Mínimos Quadrados no Exame de alguns Casos de Instabilidade, Computada à Fluência do Material" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8809 - "A Matriz de Rigidez Tangente do Elemento de Pórtico Espacial" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8810 - "Consideração da Fluência do Material da Determinação da Carga Crítica das Barras Mergulhadas em Meio Elástico" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8811 - "Um Programa para Solução do Problema Generalizado de Autovalores e Autovetores para Matrizes Reais Densas" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL, MARCIA CIMERMANN
- 8812 - "Pilar de Pontes: Riscos dos Cálculos Correntes" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8813 - "Sugestes à Norma, em Discussão, sobre Projeto de Estrutura de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8814 - "Esforços Resistentes do Concreto" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8815 - "Tabelas Momento - Curvatura" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8816 - "Análise Não-Linear de Arcos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA

- 8817 - "Estados Limites das Unies Pregadas de Madeira" - PERICLES BRASILIENSE FUSCO, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA
- 8818 - "O Emprego da Técnica de Aceleração da Convergência para a Resolução de Problemas Estruturais Através do Método dos Elementos Finitos por Algoritmo do Tipo Resíduo das Tensões" - FRANCISCO BRASILIENSE FUSCO JR., RUBENS AKEL
- 8819 - "Um Critério para o Estabelecimento dos Estimadores de Erro para os Elementos Finitos Adaptativos na Modalidade P" - FRANCISCO BRASILIENSE FUSCO JR. JARBAS A. GUEDES
- 8820 - "Non-Linear Finite-Element Formulation in Dynamic" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8821 - "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" de Newton: 300 Anos - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8822 - "A Estabilidade das Fundações Arenosas Estratificadas, Segundo V. V. Sokolovisky" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8823 - "Flambagem de Estacas Totalmente Enterradas. Solo com Coeficiente de Reação Variável" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8824 - "As Equações de Vlasov e a Estabilidade Espacial das Barras de Seção Delgada" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8825 - "Um Programa para Solução de Sistemas Lineares de Grande Porte - Aplicação à Engenharia de Estruturas" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL
- 8826 - "Sobre a Aceleração do Centro Instantâneo de Rotação" - NELSON ACHCAR, PAULO BOULOS
- 8827 - "Esforços Resistentes do Concreto" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8828 - "Tabelas Momento-Curvatura" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8901 - "A Estimativa da Coesão para o Cálculo da Estabilidade de Aterros e Fundações sobre Argilas Moles" - CARLOS DE SOUSA PINTO
- 8902 - "Trelças Espaciais de Madeira em Regime Viscoelástico sob Não-Linearidade Geométrica" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, TAKASHI YOJO
- 8903 - "O Método dos Prismas Equivalentes Aplicado ao Cálculo das Variações de Tensão, ao Longo do Tempo, nas Seções de Concreto" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8904 - "Efeitos de Laje Concretada Posteriormente sobre Viga Protendida" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ, JOSÉ LOURENÇO BRAGA DE ALMEIDA CASTANHO
- 8905 - "O Cálculo das Grelhas de Pontes pelo Método de Courbon: Uma Hipótese por Demonstrar" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8906 - "Erosão - Erosão em Área Urbana - Erosão Associada à Construção de Estradas Vicinais" - VERA MARY NINETA COZZOLINO
- 8907 - "Solos Tropicais - Proposta de Classificação Baseada nas Características de Compactação" - VERA MARY NINETA COZZOLINO
- 8908 - "Método Variacional de Cálculo de Construções Estaiadas sob Cargas Dinâmicas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8909 - "Métodos Aproximados de Determinação de Frequência de Vibração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ

- 8910 - "Non-Linear Analysis of Plane Framer I. Quasi-Static Analysis of Plane Framer with Initially Curved Members" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8911 - "Non-Linear Analysis of Plane Framer II. Dynamic Analysis of Plane Framer with Initially Curved Members" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8912 - "Derivation of Tangent Stiffness Matrices of Simple Finite Elements 1. Straight Bar Elements" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8913 - "A Stress Integration Algorithm for the Analysis of Elastic-Plastic Solids by the Finite Element Method I. Small Deformation Analysis" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8914 - "A Stress Integration Algorithm For the Analysis of Elastic-Plastic Solids by the Finite Elements Method II. Large Deformation Analysis" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8915 - "Flambagem de Estacas Parcialmente Enterradas Solo com Coeficiente de Recalque Constante" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8916 - "Caracterização da Deformabilidade na Elasticidade Linear" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8917 - "Um Pacote de Subrotinas Matemáticas para o LMC" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8918 - "Relatório de Subrotinas Matemáticas (I)" - PRISCILA GOLDENBERG, PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8919 - "Relatório de Subrotinas Matemáticas (II)" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8920 - "Viga Contínua Mista Aço-Concreto, Conectada Elasticamente, sob a Aço da Fluência e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8921 - "Relatórios de Subrotinas Matemáticas (III)" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8922 - "O Problema da Flexão Plana na Teoria da Elasticidade dos Corpos Não Homogêneos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8923 - "Alterações das Tensões de Cisalhamento nas Peças de Concreto Protendido, devidas à Fluência e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9001 - "Os Deslocamentos Devidos a Flexão das Vigas Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9002 - "Dinâmica das Estruturas Aporticadas Planas e Comportamento Geometricamente Não Linear" - REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL, CARLOS E. N. MAZZILLI
- 9003 - "Teoria de Segunda Ordem das Placas - Estudo da Rigidez Secante" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9004 - "Influência das Tensões de Cisalhamento na Deformação da Viga sob o Regime Elasto-Plástico" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9005 - "Ainda a Estabilidade dos Sistemas Elásticos. Aceno Histórico. O Erro de Euler" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9006 - "A Origem das Funções de Bessel com algumas Aplicações em Problemas Estruturais" - AUGUSTO CARLOS DE VASCONCELOS
- 9007 - "Considerações sobre o Emprego do Teorema dos Trabalhos Virtuais na Resolução de Estruturas Hiperestáticas" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9008 - "Non-linear Finite-element Formulation in Dynamics II" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI

- 9009 - "Fatores de Forma e Fatores de Carga Generalizados" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9010 - "Corpos Hiperelásticos Homogêneos Transversalmente Isotrópicos No Ortotrópicos" - NELSON ACHCAR
- 9011 - "Análise das Cascas de Revolução em Regime Elasto Plástico pelo Método dos Elementos Finitos" - JOSÉ MARQUES FILHO, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9012 - "O Algoritmo de Mínimo Grau para Reordenação e Solução de Sistemas Lineares Esparsos" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL, SÉRGIO PINHEIRO
- 9101 - "Consideração da Não-Linearidade Física e da Não-Linearidade Geométrica na Análise das Placas pelo Método dos Elementos Finitos - Parte 1" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9102 - "Introdução ao Estudo dos Pórticos Esbeltos - Matriz de Rigidez Secante" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, ALFONSO PAPPALARDO JR.
- 9103 - "Cálculo de Estruturas Sujeitas a Terremotos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, SELMA H. SHIMURA
- 9104 - "Análise Não - Linear de Pórticos Espaciais - Parte I: Teoria e Método dos Elementos Finitos" - PAULO M. PIMENTA, TAKASHI YOJO
- 9105 - "Flambagem de Edifícios Altos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9106 - "Programas de Microcomputador para Análise Dinâmica de Estruturas nos Domínios do Tempo e da Frequência" - REYOLANDO M.L.R. DA F. BRASIL
- 9107 - "Variação nas Peças Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9108 - "Análise das Placas Sujeitas a Grandes Rotações Mediante o Uso do Método dos Elementos Finitos" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9109 - "Consideração Tópica sobre o Código Modelo 1990 do CEB-FIP" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9110 - "Materiais Compatíveis com as Barras Cujas Secções Normais Permanecem Planas" - NELSON ACHCAR
- 9111 - "Dinâmica das Placas: Elementos Finitos via Resíduos Ponderados" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, FLAVIO JOSÉ GARZERI, REYOLANDO M. L. R. FONSECA BRASIL
- 9112 - "Estabilidade do Equilíbrio dos Sistemas no Campo Conservativo de Forças" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9113 - "Sobre a Estabilidade Elástica de Arcos Abatidos" - REYOLANDO M. L. R. FONSECA BRASIL, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9114 - "Considerações Teóricas sobre o Adensamento Secundário" - HELOISA HELENA SILVA GONÇALVES
- 9115 - "Teoria de Vlassov sobre Barras, Placas e Cascas, de Parede Fina, Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9201 - "Consideração da Não-Linearidade Física e da Não-Linearidade Geométrica na Análise das Placas pelo Método dos Elementos Finitos - Parte II" - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9202 - "Sobre a Interpretação de Provas de Carga em Estacas Considerando as Cargas Residuais de Ponta e a Reversão do Atrito Lateral" - FAIÇAL MASSAD
- 9203 - "Um Programa para Análise Limite de Pórticos Planos em Regime Elasto-Plástico" - REYOLANDO M.L.R. DA FONSECA BRASIL

- 9204 - "Equação Constitutiva das Barras Hiperelásticas Transversalmente Isotrópicas" - NELSON ACHCAR
- 9205 - "Análise Não-Linear de Pórticos Espaciais de Madeira" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, TAKASHI YOJO
- 9206 - "Perda de Estabilidade à Tração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9207 - "Teoria de Segunda Ordem das Placas - Estudo da Rigidez Tangente" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9208 - "Vibrações Não-Lineares de Placas" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL, PAULO SHIGUEME IDE
- 9209 - "Variedades Vinculadas Reduzidas" - PAULO BOULOS, NELSON ACHCAR,
- 9210 - "Estudo da Perda de Estabilidade Segundo Critérios Dinâmicos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9211 - "Programas de Microcomputador para Análise Dinâmica de Estruturas - Parte II - Vários Graus de Liberdade" - REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL
- 9212 - "Otimização da Deposição de Rejeitos" - LUIZ GUILHERME F. S. DE MELLO
- 9213 - "Andros - a Finite Element Program From Nonlinear Dynamics" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI, REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL
- 9214 - "Considerações sobre o Cálculo Dinâmico de Estruturas Usando Transformadas de Fourier" - ALFREDO PINTO DA CONCEIÇÃO NETO, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9215 - "Placas Delgadas" - ALFONSO PAPPALARDO JUNIOR, HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 9216 - "Excitação Paramétrica em Sistemas com um Grau de Liberdade" - MARIO EDUARDO SENATORE SOARES, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9301 - "PEFMAT - Relatórios de Subrotinas Matemáticas - Parte IV" - PRISCILA GOLDENBERG, PAULO DE MATTOS PIMENTA, MARCIA CIMERMAN
- 9302 - "Vibrações de Pórticos com Vigas de Rigidez Infinita" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9303 - "Direct Along - Wind Dynamic Analysis of Tall Structures" - MARIO FRANCO
- 9304 - "Comportamento Pós-Crítico de Barra Delgada Protendida" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9305 - "Os Polinômios Trigonométricos na Solução de Problemas de Vibração Mecânica" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9306 - "Linhas de Influência Dinâmicas para Deslocamentos, Momentos Fletores e Forças Cortantes nas Vigas Simples" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9307 - "O Modelo Clam-Clay Revisto" - JOSÉ JORGE NADER
- 9308 - "Patologia da Concepção Estrutural: Danos por Efeitos de Segunda Ordem em Edifícios Altos, um Exemplo" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9309 - "Vibração de Sistemas Não Lineares: Método de Aproximações Sucessivas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9310 - "Normalização dos Símbolos Gráficos para Projetos de Estruturas de Madeira" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9311 - "Ensaio de Adensamento" - HELOISA HELENA SILVA GONÇALVES

- 9312 - "Comentários sobre a Normalização das Ações e Segurança nas Estruturas" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9313 - "Introdução à Análise Dinâmica de Estruturas por Meio de Elementos Finitos - Parte I - Galerkin e Elementos Finitos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, SELMA HISSAE SHIMURA
- 9314 - "Vibrações Aleatórias na Dinâmica de Estruturas" - REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL
- 9315 - "Determinação da Equação para Cálculo do Momento Crítico à Flambagem Lateral" - VALDIR PIGNATTA E SILVA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9316 - "Efeito dos Sismos nas Estruturas Aporticadas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9317 - "As Estruturas Aporticadas com Vigas de Rigidez Infinita, Submetidas ao Sismo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9318 - "Uma Proposta de Normalização das Resistências da Madeira Estrutural" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9319 - "Resistência dos Materiais Anisotrópicos" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9401 - "Soluções Analíticas para a Deformação do Material Elasto - Plástico Cam - Clay úteis na Interpretação de Ensaio Triaxiais com Diferentes Trajetórias de Tensão" - JOSÉ JORGE NADER
- 9402 - "Introdução à Fotoelasticidade por Reflexão" - PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA, FRANCISCO ROURE FERNANDEZ, FREDERIC MARINON CARVAJAL
- 9403 - "Numerical Conditioning in Structural Solutions: a Proposal for a new Condition Number" - HENRIQUE LINDENBERG NETO
- 9404 - "A Esbeltez Estrutural e sua Influência nas Frequências de Vibrações" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9405 - "Determinação do Momento Crítico à Flambagem Lateral de Viabilizadas de Aço" - VALDIR PIGNATTA E SILVA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9406 - "Uma Análise dos Parâmetros de Ensaio Utilizados para Cálculo de Recalques por Adensamento" - HELOISA HELENA SILVA GONÇALVES
- 9407 - "Programação Matemática Aplicada à Análise Limite de Estruturas" I - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG, ERNESTO COUTINHO COLLA
- 9408 - "Programação Matemática Aplicada à Análise Limite de Estruturas II" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG, ERNESTO COUTINHO COLLA
- 9409 - "Formulação de um Elemento Finito de Cabo Incorporando o Efeito do Atrito" - RUY M. PAULETTI, PAULO M. PIMENTA
- 9410 - "A Descrição do Domínio para o Projeto por Elementos Finitos" - JOSÉ ANTONIO LEROSA SIQUEIRA, JOO CYRO ANDRÉ
- 9411 - "O Método dos Elementos Finitos Aplicado a uma Formulação Mista da Teoria das Placas" - MYRIAM RENATA DIAS FERREIRA, HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 9412 - "Problemas Envolvendo Ponto, Reta e Plano, Tratados Vetorialmente" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9413 - "Auto - Sincronização de Motores Não - Ideais Apoiados em Estruturas Elásticas" - PETRUS GORGONIO BULHES DA NBREGA, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9501 - "Global and Local Instability of Concrete Tall Buildings" - M. FRANCO

- 9502 - "Um Elemento Finito Giroscópio" - MARCELO GONZALES BERGWELER, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILI
- 9503 - "Teoria da Segunda Ordem das Placas - Uma Formulação Mista" - SELMA HISSAE SHIMURA, HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 9504 - "Modelagem de Corpos Sólidos: Topologia e Operadores de Euler" - BENEDITO ROQUE DE GUIMARÃES ARANTES JUNIOR, JOÃO CYRO ANDRÉ, JOSÉ ANTONIO LEROSA DE SIQUEIRA
- 9505 - "Investigação Experimental em Laje de Concreto Armado Apoiada em Vigas Flexíveis" - ANTONIO RUBENS PORTUGAL MAZZILLI
- 9506 - "Influência da Flexibilidade das Vigas e das Lajes nos Esforços das Estruturas de Concreto Armado" - ANTONIO RUBENS PORTUGAL MAZZILLI
- 9507 - "A Calibração da Segurança na Nova Norma de Projeto de Estruturas de Madeira" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9508 - "Método de Ensaio de Punção Excêntrica em Placa de Concreto" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVIL, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9509 - "Ensaio de Placas de Concreto Armado - Punção Excêntrica" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVIL, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9510 - "Armadura de Cisalhamento para Punção em Placas de Concreto" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVIL, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9511 - "Aspectos Normativos sobre Punção em Placas de Concreto Armado" - FÁBIO ARMANDO BOTELHO CORDOVIL, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9512 - "Alternativas de Representação da Protensão, no Projeto de Estruturas de Concreto" - KALIL J. SKAF, FERNADO R. STUCCHI

