

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP
Deptº de Engenharia de Estruturas e Fundações

ISSN 0103-9822

BT/PEF/9907

**Distribuição das Tensões Tangenciais
em Seções Transversais Delgadas:
Resolução pelo Processo dos
Deslocamentos**

Edgard Sant'Anna de Almeida Neto
Mathias Juan Perazzo

26 OUT 1999



Escola Politécnica - EPBC



31200053779

São Paulo - 1999

1057330

Distribuição das Tensões Tangenciais em Seções Transversais Delgadas: Resolução pelo Processo dos Deslocamentos

Edgard Sant'Anna de Almeida Neto
Laboratório de Mecânica Computacional,
Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações,
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo,
Caixa Postal 61 548, CEP 05424-970, São Paulo, SP, Brasil,
e-mail: almeidae@usp.br

Mathias Juan Perazzo
Aluno de Engenharia Mecatrônica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo,
e-mail: mathias@integrisnet.net

Neste trabalho, procura-se sistematizar o cálculo e a visualização das tensões tangenciais em seções transversais delgadas que estão livres para sofrer empenamento. As incógnitas do problema são os deslocamentos longitudinais relativos, a partir dos quais são obtidos os diagramas de tensão tangencial e o centro de cisalhamento de seções que admitem paredes curvas, paredes de espessura variável e materiais distintos desde que isótropos.

As equações que regem o problema foram deduzidas a partir de conceitos da Resistência dos Materiais objetivando facilitar o acesso a leitores sem familiaridade com a Teoria da Elasticidade. A maior parte do texto é dedicada à resolução do problema pelo Método dos Elementos Finitos e a aspectos de sua implementação computacional. Exemplos abrangendo diversos tipos de seção transversal são apresentados no final.

Índice

1	Introdução	2
2	Equações que Regem o Problema	3
2.1	Cinemática	3
2.2	Equação Constitutiva	4
2.3	Equações de Equilíbrio	4
3	Método dos Resíduos Ponderados	6
4	Discretização em Elementos Finitos	7
5	Estratégia de Resolução	10
5.1	Distribuição do Fluxo devido à Força Cortante	11
5.2	Centro de Cisalhamento C_v	12
5.3	Distribuição do Fluxo devido ao Momento de Torção	12
5.4	Momento de Inércia à Torção da Parte Fechada da Seção Transversal	13
6	Tensões Tangenciais nos Trechos Abertos	13
7	Seções Transversais Mistas	14

2. as barras são prismáticas;
3. a força normal é constante em cada barra;
4. as deformações, as rotações e os deslocamentos são pequenos ($\epsilon, \gamma \ll 1$, com deslocamentos muito menores que as dimensões da ST);
5. as deformações no plano da ST são nulas ($\epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_{23} = 0$, com x_2 e x_3 contidos no plano da ST);
6. a ST está livre de qualquer restrição ao empenamento. Na ausência de força cortante, as hipóteses até aqui consideradas correspondem às da *torção uniforme*;
7. admite-se a validade da hipótese de Navier para o cálculo das tensões normais, mesmo a ST sofrendo empenamento;
8. As seções transversais são delgadas, ou seja, elas interceptam paredes de pequena espessura que podem ser confundidas com a própria superfície média. Em decorrência, as tensões tangenciais originadas pela força cortante são admitidas uniformes ao longo da espessura, o mesmo ocorrendo com as tensões originadas pelo momento de torção nos trechos fechados da ST.

2 Equações que Regem o Problema

A dedução da equação constitutiva que relaciona o fluxo de cisalhamento com a deformação nas paredes da ST requer um exame cuidadoso dos campos de deslocamento e de deformação que intervêm no problema [8].

2.1 Cinemática

Deslocamentos Quando as deformações no plano da ST são nulas, as componentes de deslocamento neste plano podem ser escritas em função da rotação $\theta(x_1)$ em torno do eixo longitudinal instantâneo de rotação (Fig. 1), resultando para o vetor deslocamento \mathbf{u} de um ponto

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ r\theta \sin \phi \\ r\theta \cos \phi \end{Bmatrix},$$

onde $u_1(s)$ é a componente longitudinal, η é tangente à linha média da parede e ζ é normal a ela; as direções dos respectivos eixos formando um triedro positivo. A distância s é medida segundo a linha média da parede.

Deformações A distorção γ_{1s} no plano médio de uma parede pode ser expressa em função das componentes dos deslocamentos,

$$\begin{aligned} \gamma_{1s} &= u_{1,s} + \eta_{,1} \\ &= u_{1,s} + \theta_{,1} r \sin \phi, \end{aligned} \quad (1)$$

onde uma vírgula no subscrito denota derivada parcial em relação à variável à direita. Quando a derivada é em relação à coordenada x_i , apenas o índice 'i' é indicado, $\theta_{,1} = d\theta/dx_1$.

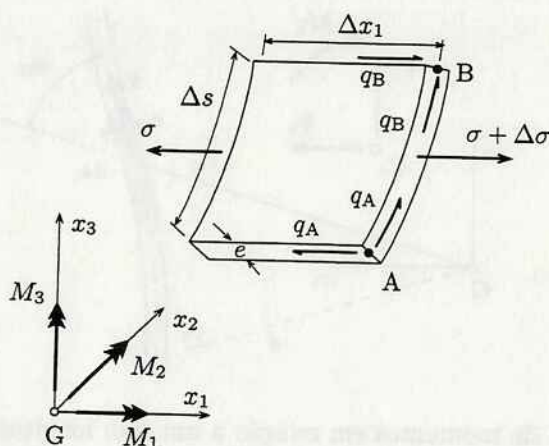


Fig. 3: Equilíbrio de um trecho de parede.

Para $\Delta s \rightarrow 0$ e $\Delta x_1 \rightarrow 0$, resulta

$$q_{,s} = -e\sigma_{,1}. \quad (6)$$

Em decorrência da hipótese de Navier, a distribuição das tensões normais é linear na ST,

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_3}{I_3}x_2 + \frac{M_2}{I_2}x_3.$$

onde as componentes do momento fletor e da força cortante são consideradas positivas quando concordam com os sentidos dos eixos centrais-principais x_2 e x_3 (Fig. 3). Para uma barra prismática, a derivada de σ em relação a x_1 é

$$\begin{aligned} \sigma_{,1} &= -M_{3,1} \frac{x_2}{I_3} + M_{2,1} \frac{x_3}{I_2} \\ &= V_2 \frac{x_2}{I_3} + V_3 \frac{x_3}{I_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

A substituição da Eq. (7) na (6) fornece

$$q_{,s} = -e \left(V_2 \frac{x_2}{I_3} + V_3 \frac{x_3}{I_2} \right), \quad (8)$$

equação que corresponde à fórmula de Zhuravski da Resistência dos Materiais [5].

A relação entre o fluxo e o momento de torção é obtida do equilíbrio de momentos em relação ao eixo da barra (Fig. 4),

$$\int_{\Omega} \mathbf{r}_G \times \mathbf{q} \, ds = M_1 \mathbf{i}_1, \quad (9)$$

onde \mathbf{r}_G é o vetor posição medido a partir do centro de gravidade e $M_1 = M_T - V_2 x_{v3} + V_3 x_{v2}$, resultando

$$\int_{\Omega} q r_G \sin \phi_G \, ds = M_T - V_2 x_{v3} + V_3 x_{v2}. \quad (10)$$

O produto vetorial na Eq. (9) também pode ser expresso em termos das coordenadas dos pontos ao longo da linha média da parede. Ou seja, escrevendo as expressões de \mathbf{r}_G e \mathbf{q}

$$\mathbf{r}_G = x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3,$$

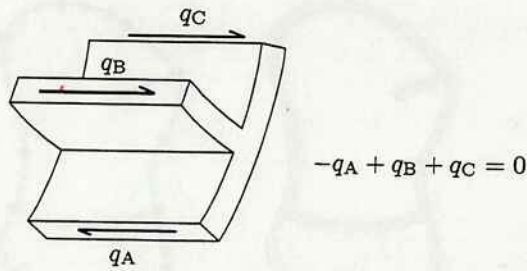


Fig. 5: Equilíbrio de forças longitudinais no encontro de paredes da ST.

4 Discretização em Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) será usado na resolução das Eqs. (10) e (13). Para tal, o domínio da ST será dividido em pequenos trechos de parede de modo que o campo de deslocamentos possa ser interpolado por funções N^a definidas em cada trecho. Esses trechos, ou subdomínios Ω^e , recebem o nome de *elementos finitos* (Fig. 6). O conjunto de elementos em que a ST fica subdividida constitui a *malha* de elementos finitos.

Tanto a Eq. (10) quanto a Eq. (13) podem ter suas integrais decompostas em somas de integrais nos domínios dos elementos,

$$\sum_{e=1}^{nElem} \int_{\Omega^e} q r_G \text{sen } \phi_G ds = M_T - V_2 x_{v3} + V_3 x_{v2}, \quad (14)$$

$$\sum_{e=1}^{nElem} \int_{\Omega^e} eG w_{,s} u_{1,s} ds + \theta_{,1} \sum_{e=1}^{nElem} \int_{\Omega^e} eG w_{,sr} \text{sen } \phi ds = \sum_{e=1}^{nElem} \int_{\Omega^e} e w \left(V_2 \frac{x_2}{I_3} + V_3 \frac{x_3}{I_2} \right) ds, \quad (15)$$

onde $nElem$ é o número total de elementos na malha.

O campo de deslocamentos longitudinais $u_1(s)$, mais especificamente o empenamento da ST, será aproximado em cada elemento por uma combinação linear de funções N^a ,

$$u_1(s) = N^a u_1^a, \quad (16)$$

onde os coeficientes multiplicadores u_1^a são os deslocamentos nodais do elemento. A repetição do índice a , designando o número do nó, indica somatória com a variando de 1 até o número de nós por elemento. As funções N^a não são arbitrárias. Elas devem satisfazer condições de compatibilidade de deslocamentos nos nós e conformidade nas interfaces dos elementos para que a solução numérica convirja para a solução exata com a redução gradual do tamanho dos elementos.

Neste trabalho, são empregados elementos uniaxiais *isoparamétricos*. Isto significa que as mesmas funções N^a são usadas para interpolar as coordenadas $\mathbf{x}(s)$ de um ponto genérico do elemento em função das coordenadas nodais \mathbf{x}^a

$$\mathbf{x}(s) = N^a \mathbf{x}^a. \quad (17)$$

Para o elemento de quatro nós, representado nos sistemas global e natural de coordenadas na Fig. 7, as funções N^a são cúbicas na coordenada natural ξ_1 , assumindo valor unitário em um dos nós e valores nulos nos demais (Fig. 8),

$$N^1 = -\frac{9}{16} \left(\xi_1 + \frac{1}{3} \right) \left(\xi_1 - \frac{1}{3} \right) (\xi_1 - 1),$$

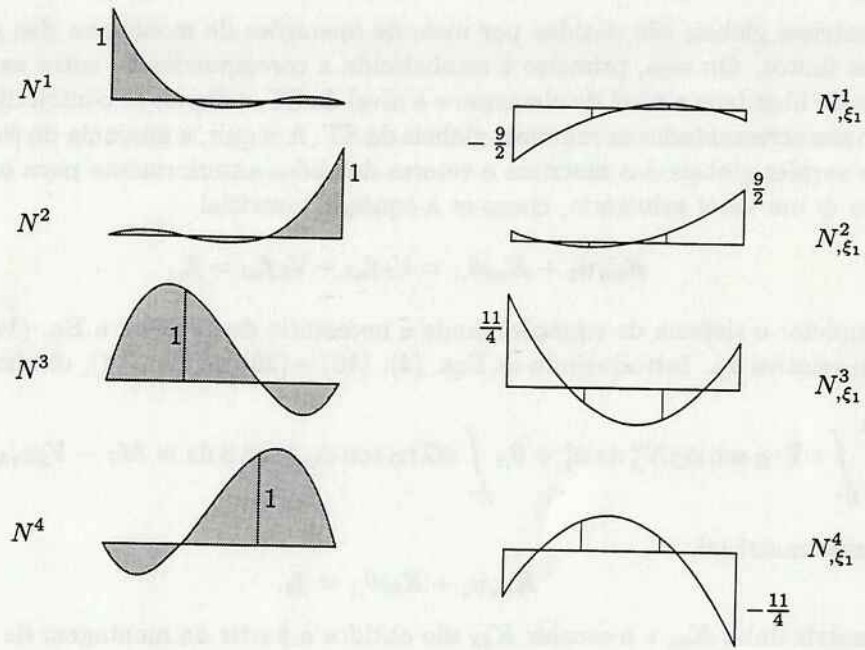


Fig. 8: Funções de interpolação e suas derivadas.

Introduzindo as Eqs. (16) e (20) em (15), obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{nElem} w^a \left[\int_{\Omega^e} eG N_{,s}^a N_{,s}^b ds u_1^b + \theta_{,1} \int_{\Omega^e} eG N_{,s}^a r \text{sen } \phi ds \right] \\ = \sum_{e=1}^{nElem} w^a \left[\int_{\Omega^e} eN^a \left(V_2 \frac{x_2}{I_3} + V_3 \frac{x_3}{I_2} \right) ds \right], \end{aligned}$$

onde a repetição dos índices a e b em um monômio denota somatória, com os índices variando de 1 ao número de nós por elemento. Agrupando os valores nodais w^a e u_1^a em vetores nodais dos elementos, w^e e u_1^e respectivamente, chega-se à forma matricial

$$\sum_{e=1}^{nElem} w^{eT} (K_{uu}^e u_1^e + K_{u\theta}^e \theta_{,1}) = \sum_{e=1}^{nElem} w^{eT} (V_2 f_{u_2}^e + V_3 f_{u_3}^e). \quad (21)$$

Os elementos das matrizes K_{uu}^e e $K_{u\theta}^e$ são dados por

$$[K_{uu}^e]^{ab} = \int_{\Omega^e} eG N_{,s}^a N_{,s}^b ds, \quad (22)$$

$$\{K_{u\theta}^e\}^a = \int_{\Omega^e} eG N_{,s}^a r \text{sen } \phi ds, \quad (23)$$

e os elementos dos vetores $f_{u_2}^e$ e $f_{u_3}^e$ por

$$\{f_{u_2}^e\}^a = \frac{1}{I_3} \int_{\Omega^e} eN^a x_2 ds, \quad (24)$$

$$\{f_{u_3}^e\}^a = \frac{1}{I_2} \int_{\Omega^e} eN^a x_3 ds. \quad (25)$$

5.1 Distribuição do Fluxo devido à Força Cortante

Considerando inicialmente V_2 unitário, com V_3 e M_T nulos, a Eq. (31) se reduz à

$$K_{uu} u_{1v_2} = f_{u_2}, \quad (32)$$

onde as correspondentes matrizes dos elementos são dadas pelas Eqs. (22) e (24).

A resolução do sistema de equações (32) requer a eliminação do movimento de corpo rígido de translação longitudinal da ST. Isto pode ser feito anulando-se um dos deslocamentos nodais, e trabalhando-se com deslocamentos longitudinais relativos na ST.

O modo mais simples de se calcular as integrais nas Eqs. (22) e (24) é por meio de integração numérica [6]. Mais especificamente, as integrais são aproximadas por uma soma ponderada de valores do integrando calculados em pontos preestabelecidos $\bar{\xi}_1$ no interior do elemento, denominados pontos de Gauss ou simplesmente pontos de integração,

$$\begin{aligned} [K_{uu}^e]^{ab} &= G \int_{\Omega^e} e(N_{,\xi_1}^a \xi_{1,s})(N_{,\xi_1}^b \xi_{1,s}) s_{,\xi_1} d\xi_1 \\ &= G \sum_{\bar{\xi}_1} e N_{,\xi_1}^a N_{,\xi_1}^b \xi_{1,s} W_{\bar{\xi}_1}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} [f_{u_2}^e]^a &= \frac{1}{I_3} \int_{\Omega^e} e N^a (N^b x_2^b) s_{,\xi_1} d\xi_1 \\ &= \frac{1}{I_3} \sum_{\bar{\xi}_1} e N^a (N^b x_2^b) s_{,\xi_1} W_{\bar{\xi}_1}. \end{aligned} \quad (34)$$

No caso de trechos retos de espessura constante e com nó intermediário centrado, a integração numérica é exata para polinômios de até terceiro grau quando são usados dois pontos de integração, e para polinômios de até quinto grau quando são usados três pontos de integração. Assim, o erro numérico introduzido pelas Eqs. (33) e (34) tem um efeito pequeno na solução numérica do problema desde que as condições não se afastem muito das admitidas.

As coordenadas $\bar{\xi}_1$ e os fatores de ponderação $W_{\bar{\xi}_1}$ para dois e três pontos de integração encontram-se na Tabela 1. No programa, foram usados três pontos de integração para o cálculo da matriz de rigidez e para o vetor carregamento.

Tabela 1: Integração Numérica.

Número de Pontos	$\bar{\xi}_1$	$W_{\bar{\xi}_1}$
2	$-1/\sqrt{3}$	1
	$1/\sqrt{3}$	1
3	$-\sqrt{3/5}$	5/9
	0	8/9
	$\sqrt{3/5}$	5/9

O uso da Eq. (5) permite que o fluxo q seja calculado em qualquer ponto do elemento. Contudo, pode-se demonstrar que os erros na primeira derivada de u_1 são menores nos pontos de integração dos elementos, justificando a escolha destes pontos para armazenamento

a presença do termo $r_{C_v} \text{sen } \phi_{C_v}$, não apresenta maiores dificuldades se considerarmos a identidade

$$r_{C_v} \text{sen } \phi_{C_v} = (x_2 - x_{v2})x_{3,s} - (x_3 - x_{v3})x_{2,s},$$

expressão análoga à deduzida adotando-se o centro de gravidade como polo.

Finalmente, o fluxo q_1 é calculado introduzindo-se os resultados u_1 e $\theta_{,1}$ na Eq. (4)

$$q_1(\bar{\xi}_1) = eG \left[\sum_a N_{,s}^a u_1^a + r_{C_v} \text{sen } \phi_{C_v} \theta_{,1} \right]. \quad (44)$$

A tensão tangencial em qualquer trecho fechado da ST pode agora ser calculada a partir dos três fluxos de cisalhamento, ou seja

$$\tau_q(\bar{\xi}_1) = \frac{1}{e} (M_T^f q_1 + V_2 q_2 + V_3 q_3). \quad (45)$$

onde V_2 e V_3 são as componentes da força cortante nas direções centrais-principais e M_T^f é a parcela do momento de torção que solicita a parte fechada da ST.

5.4 Momento de Inércia à Torção da Parte Fechada da Seção Transversal

O momento de inércia I_T^f à torção é calculado por meio da expressão genérica da rotação relativa da ST,

$$I_T^f = \frac{M_T^f}{G\theta_{,1}}. \quad (46)$$

Admitindo um momento M_T^f unitário, a rotação $\theta_{,1}$ é obtida a partir do sistema de equações (41).

É interessante ressaltar que a parte aberta da ST não colabora para o momento de inércia I_T^f . Conclusão que pode ser inferida da Eq. (8). Na ausência de força cortante, o fluxo em qualquer trecho aberto deve ser zero para que se verifique a condição de fluxo nulo nas extremidades livres.

6 Tensões Tangenciais nos Trechos Abertos

Nos trechos abertos da ST, as tensões tangenciais originadas pela torção têm uma distribuição linear ao longo da espessura (Fig. 9). Os valores extremos da tensão ocorrem junto à superfície [2], valendo

$$[\tau_{1s}^a]_{\max} = \frac{M_T^a}{\int e^3 ds} e, \quad (47)$$

onde M_T^a é a parcela do momento que solicita a parte aberta da ST. Repare que o denominador coincide com o momento de inércia da parte aberta da ST,

$$I_T^a = \frac{\int e^3 ds}{3}, \quad (48)$$

com o domínio da integral abrangendo todos os trechos abertos.

Tendo em vista a Eq. (47), o valor máximo da tensão τ_{1s}^a ocorrerá no trecho de maior espessura. Para paredes de espessura constante, a Eq. (48) fornece a expressão do momento de inércia à torção de um retângulo com altura e muito menor que a largura.

A igualdade dos valores extremos em lados opostos (Fig. 9) só se verifica para trechos retos. Para os curvos, a manutenção da hipótese de distribuição linear exigiria tensões um pouco maiores no lado côncavo para satisfazer o equilíbrio de momentos. Essa idéia é

8 Programa AutoSC

As equações deduzidas nesse trabalho foram implementadas em um programa denominado **AutoSC** que emprega os recursos de programação orientada a objetos da linguagem C++. A hierarquia de classes se baseia em uma descrição reticulada das paredes da ST delgada. Em linhas gerais, a ST (representada pela classe `cCrossSection`) é formada por elementos de parede (`cWall`) ligando nós (`cNode`) cujos deslocamentos longitudinais são as incógnitas do problema (Fig. 6).

As propriedades geométricas da ST — área, momentos estáticos e de inércia, encontram-se reunidos na classe `cGeomProp`, que se encarrega da soma das propriedades dos diversos elementos. As classes `cPoint` e `cLine` têm a finalidade de abstrair as operações envolvendo as coordenadas dos nós e dos pontos de referência dos diversos sistemas de coordenadas.

As classes da biblioteca MFC (Microsoft Foundation Classes C++ Library) foram usadas na elaboração da interface com o usuário. Elas se encarregam das janelas que possibilitam a visualização da geometria e dos diagramas das tensões tangenciais, bem como a alteração dos dados de entrada.

9 Exemplos

Exemplos cobrindo três tipos de seções transversais delgadas são apresentados, a saber: seções abertas, fechadas e mistas. Os dois primeiros exemplos são suficientemente simples para que os resultados apresentados auxiliem na implementação do programa por outros pesquisadores e alunos que estejam aprendendo o Método dos Elementos Finitos. O terceiro exemplo reproduz uma seção mista e multicelular cuja geometria foi extraída de um catálogo de perfis de alumínio.

9.1 Seção Aberta

O primeiro exemplo ilustra a análise de uma seção em 'L' inclinada a 45° em relação ao eixo horizontal (Fig. 10). Este é um exemplo de verificação e diferentes inclinações foram usadas para assegurar que os diagramas de tensão não dependem do sistema de coordenadas adotado. A posição do centro de cisalhamento (SC) é facilmente verificada pois ele se encontra no canto do 'L,' como requer o equilíbrio de momentos das resultantes das tensões tangenciais.

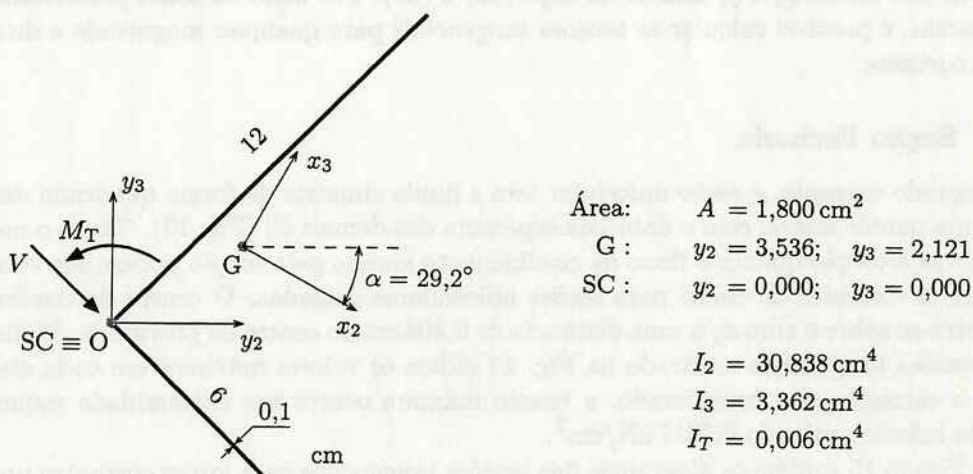
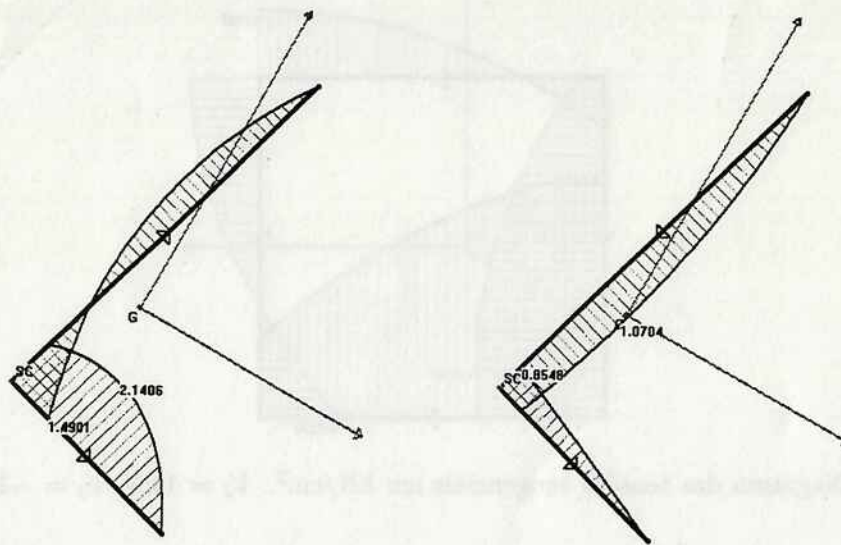


Fig. 10: Seção delgada em 'L.'



(a) $V_2 = 1 \text{ kN}$.

(b) $V_3 = -1 \text{ kN}$.

Fig. 12: Diagramas das tensões tangenciais em kN/cm^2 para forças cortantes unitárias nas direções dos eixos centrais-principais de inércia.

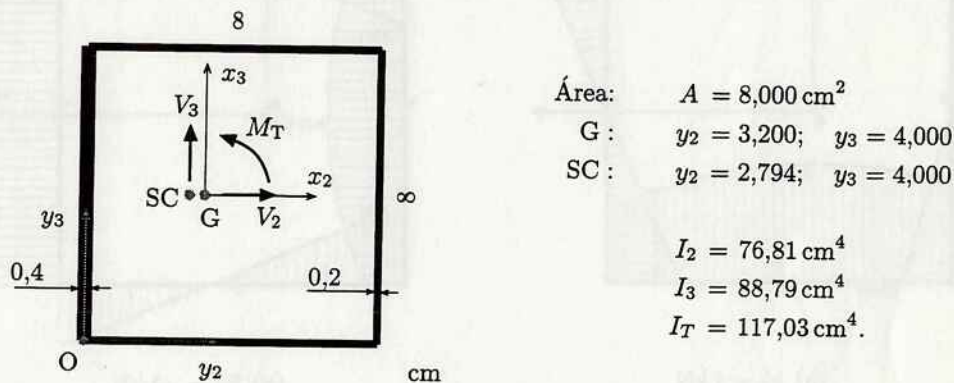
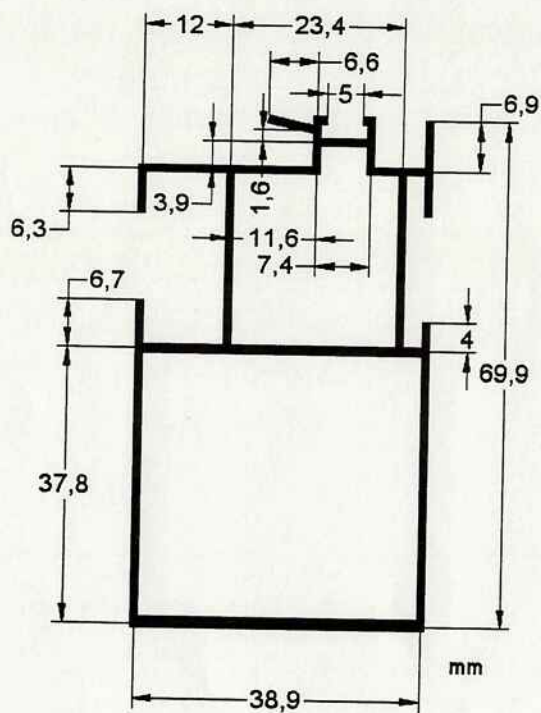


Fig. 13: Seção unicelular delgada.

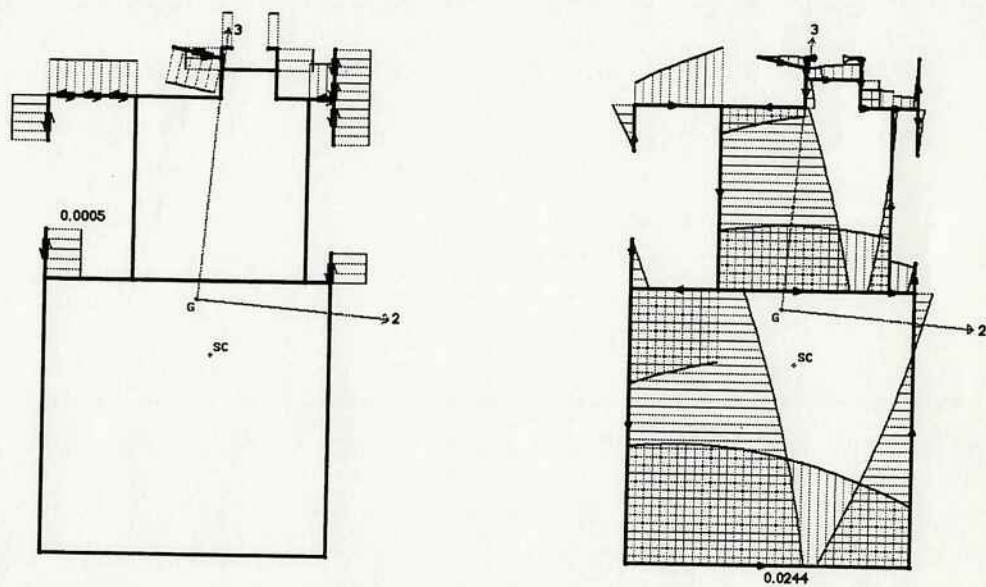
a orientação da parede seja, respectivamente, paralela ou perpendicular à componente da força cortante considerada. Embora o programa obtenha o diagrama da Fig. 14 a partir de diagramas básicos, é importante notar que uma nova pesquisa de valores máximos é necessária após cada composição dos diagramas.

Este exemplo confirma a principal vantagem do processo dos esforços sobre o processo dos deslocamentos: o número reduzido de incógnitas. Enquanto o primeiro requer apenas um fluxo de cisalhamento incógnito, o segundo necessita de onze deslocamentos incógnitos para descrever o comportamento da ST. Entretanto, a escolha de uma ST estaticamente determinada fundamental, a qual é imediata para seções unicelulares, é difícil de se programar no caso geral.



Área: $A = 315,297 \text{ mm}^2$
 G : $y_2 = 20,810$; $y_3 = 35,262$
 SC : $y_2 = 22,750$; $y_3 = 27,607$
 $\alpha_2 = -5,36^\circ$
 $I_2 = 187\,870 \text{ mm}^4$
 $I_3 = 64\,599 \text{ mm}^4$
 $I_T^a = 20,3 \text{ mm}^4$
 $I_T^f = 91\,089 \text{ mm}^4$
 $I_T^{\text{tot}} = 91\,109 \text{ mm}^4$

Fig. 16: Seção delgada mista.



(a) Distribuição linear na espessura,
 $M_T^a = 0,010 \text{ kN mm}$.

(b) Distribuição uniforme na espessura,
 $V_2 = 1,089 \text{ kN}$, $V_3 = -0,902 \text{ kN}$,
 $M_T^f = 44,346 \text{ kN mm}$.

Fig. 17: Diagramas das tensões tangenciais (kN/mm^2).

10 Observações Finais

A aplicação do processo dos deslocamentos permitiu que se estabelecesse um procedimento de cálculo das tensões tangenciais que é válido para qualquer tipo de ST delgada. Ressalta-se porém que a torção de seções mistas requer a identificação dos trechos abertos pois os mesmos apresentam um comportamento à torção diferente dos demais.

Os diagramas de tensão obtidos concordam com os resultados analíticos nos dois primeiros exemplos. A qualidade dos resultados numéricos pode ser constatada pelo fato dos fluxos de cisalhamento se anularem nas extremidades livres e se equilibrarem nos encontros das paredes. O grau do polinômio aproximado e a ordem de integração numérica já permitiam prever que os resultados praticamente coincidiriam com as soluções analíticas para seções formadas por paredes retas e de espessura constante.

A apresentação em dois diagramas de tensão tangencial, isolando a distribuição uniforme na espessura da distribuição linear, mostrou-se bastante eficaz. Ela possibilita a identificação de comportamentos distintos à torção e, ao mesmo tempo, evita o congestionamento de informações que seria inevitável em um diagrama único.

O fato dos fluxos de cisalhamento poderem ser calculados antecipadamente e combinados de acordo com os valores das forças cortantes e do momento de torção na ST decorre da validade das hipóteses enunciadas no início deste trabalho. O pós-processamento de pórticos tridimensionais pode ser beneficiado por esse procedimento já que o trabalho envolvido no cálculo das tensões em barras prismáticas submetidas a múltiplos carregamentos seria consideravelmente reduzido.

Agradecimentos Os autores agradecem à FAPESP – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo por ter concedido uma bolsa de Iniciação Científica ao segundo autor e ao LMC – Laboratório de Mecânica Computacional da EPUSP por ter cedido suas instalações e programas para o desenvolvimento dessa pesquisa. Os comentários dos Professores Henrique de Britto Costa e Luis Antônio Cortese Diogo foram bastante apreciados assim como a participação do aluno Thiago de Castro Martins na fase inicial do trabalho.

Referências

- [1] Boresi, A. P., Schmidt, R. J. e Sidebottom, O. M. *Advanced Mechanics of Materials*. 5th ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [2] Chen, W. F. and Atsuta, T. *Theory of Beam Columns*. Vol. 2, McGraw-Hill, New York, 1977.
- [3] Costa, H. B., *Notas de aula de PEF 212: Resistência dos Materiais II*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1993.
- [4] Diogo, A. C., Comunicação pessoal, 1997.
- [5] Feodosiev, V. I. *Resistencia de Materiales*. Segunda edição em espanhol, MIR, Moscow, 1980.
- [6] Hughes, T. J. R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [7] Kollbrunner, C. F. and Basler, K. *Torsion in Structures*. Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [8] Oden, J. T. e Ripperger, E. A. *Mechanics of Elastic Structures*. Segunda edição, Hemisphere, McGraw-Hill, Washington, 1981.

BOLETINS PUBLICADOS

- 8501 - "Métodos Variacionais Aplicados à Estabilidade dos Taludes e Fundações" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8502 - "O Processo de Cross Derivado do Método dos Deslocamentos" - JOÃO CYRO ANDRÉ
- 8503 - "Fundações por Bloco" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8504 - "Investigação Experimental sobre o Valor Limite Wu das Tensões de Cisalhamento no Concreto Estrutural" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8505 - "Investigação Experimental sobre o Cisalhamento em Lajes de Concreto Armado" - PERICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8506 - "Cálculo das Alterações de Tensão, ao Longo do Tempo, nas Peças de Concreto Protendido: Procedimentos Diretos, Simples, Alternativos ao do CIB" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8507 - "Elementos de Cálculo Variacional e suas Aplicações nas Estruturas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8508 - "Spline Cúbico e suas Aplicações" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8509 - "Correlação Paramétrica Deformatória Flexão Composta, Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8510 - "Lugares Geométricos Notáveis na Flexão Composta - Concreto Armado" - PIETRO CANDREA
- 8511 - "Regiões Deformatórias Notáveis Flexão Composta - Concreto Armado" - PIETRO CANDREVA
- 8512 - "Diagramas Momentos - Curvaturas Flexão Composta Normal - Seções Retangulares Armadura Qualquer nas Barras" - PIETRO CANDREVA
- 8601 - "Alterações, ao Longo do Tempo, dos Estados de Tensão nas Seções de Concreto, Armadas para Diferentes Etapas de Carregamento" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8602 - "Peças de Concreto Armadas com Barras Protendidas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8603 - "A Relaxação do Concreto e a Redistribuição das Tensões nas Peças Armadas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8604 - "Análise Não Linear de Treliças Especiais" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8605 - "Variação, no Tempo, do Estado de Tensão nas Seções de Concreto Armado" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8606 - "Evolução ao Longo do Tempo, das Tensões de Cisalhamento nas Vigas de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8607 - "Cômputo de Fluência por Problemas de Estabilidade" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8608 - "Erros Usuais Cometidos nas Determinações das Tensões de Cisalhamento nas Peças de Altura Variável" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8609 - "Contribuição da Fluência do Aço, da Fluência e Retração do Concreto nos Deslocamentos Devidos à Flexão, nas Peças de Concreto Protendido" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8610 - "Sistema VX-IQB para Processamento de Textos Científicos" - IVAN DE QUEIROZ BARROS
- 8611 - "Análise Não Linear de Pórticos Planos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8612 - "Erros a Serem Evitados no Cálculo de Pórticos, em Particular no dos Edifícios" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8613 - "Mínima Correctio Methodi Inveniendi Lineas Curvas Elastici" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8614 - "Nova Técnica para Codificações de Procedimentos Envolvendo Matrizes - Avaliação de Desempenho" - IVAN DE QUEIROZ BARROS
- 8615 - "Casos Especiais de Flambagem de Pórticos de Edifícios Altos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8616 - "Vigas Protendidas: Alterações das Tensões, das Deformações e dos Deslocamentos ao Longo do Tempo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8701 - "Consideração sobre Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas Planas" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8702 - "Consideração da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Laminas Planas" - Parte I - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8703 - "Consideração da Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Laminas Planas" - Parte II - LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 8704 - "Estado Plano de Tensão (Método dos Resíduos Ponderados e Método dos Elementos Finitos)" - VICTOR M. DE SOUZA LIMA

- 8816 - "Análise Não-Linear de Arcos" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8817 - "Estados Limites das Unies Pregadas de Madeira" - PERICLES BRASILIENSE FUSCO, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA
- 8818 - "O Emprego da Técnica de Aceleração da Convergência para a Resolução de Problemas Estruturais Através do Método dos Elementos Finitos por Algoritmo do Tipo Resíduo das Tensões" - FRANCISCO BRASILIENSE FUSCO JR., RUBENS AKEL
- 8819 - "Um Critério para o Estabelecimento dos Estimadores de Erro para os Elementos Finitos Adaptativos na Modalidade P" - FRANCISCO BRASILIENSE FUSCO JR., JARBAS A. GUEDES
- 8820 - "Non-Linear Finite-Element Formulation in Dynamic" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 8821 - "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica de Newton: 300 Anos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8822 - "A Estabilidade das Fundações Arenosas Estratificadas, Segundo V. V. Sokolovisky" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8823 - "Flambagem de Estacas Totalmente Enterradas. Solo com Coeficiente de Reação Variável" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8824 - "As Equações de Vlasov e a Estabilidade Espacial das Barras de Seção Delgada" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8825 - "Um Programa para Solução de Sistemas Lineares de Grande Porte - Aplicação à Engenharia de Estruturas" - PRISCILA GOLDENBERG, REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL
- 8826 - "Sobre a Aceleração do Centro Instantâneo de Rotação" - NELSON ACHCAR, PAULO BOULOS
- 8827 - "Esforços Resistentes do Concreto" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8828 - "Tabelas Momento-Curvatura" - LAURO MODESTO DOS SANTOS
- 8901 - "A Estimativa da Coesão para o Cálculo da Estabilidade de Aterros e Fundações sobre Argilas Moles" - CARLOS DE SOUSA PINTO
- 8902 - "Trelças Espaciais de Madeira em Regime Viscoelástico sob Não-Linearidade Geométrica" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, TAKASHI YOJO
- 8903 - "O Método dos Prismas Equivalentes Aplicado ao Cálculo das Variações de Tensão, ao Longo do Tempo, nas Seções de Concreto" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8904 - "Efeitos de Laje Concretada Posteriormente sobre Viga Protendida" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ, JOSÉ LOURENÇO BRAGA DE ALMEIDA CASTANHO
- 8905 - "O Cálculo das Grelhas de Pontes pelo Método de Courbon: Uma Hipótese por Demonstrar" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8906 - "Erosão - Erosão em Área Urbana - Erosão Associada à Construção de Estradas Vicinais" - VERA MARY NINETA COZZOLINO
- 8907 - "Solos Tropicais - Proposta de Classificação Baseada nas Características de Compactação" - VERA MARY NINETA COZZOLINO
- 8908 - "Método Variacional de Cálculo de Construções Estaiadas sob Cargas Dinâmicas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8909 - "Métodos Aproximados de Determinação de Frequência de Vibração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 8910 - "Non-Linear Analysis of Plane Framer I. Quasi-Static Analysis of Plane Framer with Initially Curved Members" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8911 - "Non-Linear Analysis of Plane Framer II. Dynamic Analysis of Plane Framer with Initially Curved Members" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8912 - "Derivation of Tangent Stiffness Matrices of Simple Finite Elements 1. Straight Bar Elements" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8913 - "A Stress Integration Algorithm for the Analysis of Elastic-Plastic Solids by the Finite Element Method I. Small Deformation Analysis" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8914 - "A Stress Integration Algorithm For the Analysis of Elastic-Plastic Solids by the Finite Elements Method II. Large Deformation Analysis" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8915 - "Flambagem de Estacas Parcialmente Enterradas Solo com Coeficiente de Recalque Constante" - CARLOS ALBERTO SOARES
- 8916 - "Caracterização da Deformabilidade na Elasticidade Linear" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 8917 - "Um Pacote de Subrotinas Matemáticas para o LMC" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8918 - "Relatório de Subrotinas Matemáticas (I)" - PRISCILA GOLDENBERG, PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 8919 - "Relatório de Subrotinas Matemáticas (II)" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, PRISCILA GOLDENBERG
- 8920 - "Viga Continua Mista Aço-Concreto, Conectada Elasticamente, sob a Aço da Fluência e Retração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ

- 9204 - "Equação Constitutiva das Barras Hiperelásticas Transversalmente Isotrópicas" - NELSON ACHCAR
- 9205 - "Análise Não-Linear de Pórticos Espaciais de Madeira" - PAULO DE MATTOS PIMENTA, TAKASHI YOJO
- 9206 - "Perda de Estabilidade à Tração" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9207 - "Teoria de Segunda Ordem das Placas - Estudo da Rigidez Tangente" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9208 - "Vibrações Não-Lineares de Placas" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL, PAULO SHIGUEME IDE
- 9209 - "Variedades Vinculadas Reduzidas" - PAULO BOULOS, NELSON ACHCAR,
- 9210 - "Estudo da Perda de Estabilidade Segundo Critérios Dinâmicos" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9211 - "Programas de Microcomputador para Análise Dinâmica de Estruturas - Parte II - Vários Graus de Liberdade" - REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL
- 9212 - "Otimização da Deposição de Rejeitos" - LUIZ GUILHERME F. S. DE MELLO
- 9213 - "Andros - a Finite Element Program From Nonlinear Dynamics" - CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI, REYOLANDO M. L. R. DA FONSECA BRASIL
- 9214 - "Considerações sobre o Cálculo Dinâmico de Estruturas Usando Transformadas de Fourier" - ALFREDO PINTO DA CONCEIÇÃO NETO, VICTOR M. DE SOUZA LIMA
- 9215 - "Placas Delgadas" - ALFONSO PAPPALARDO JUNIOR, HENRIQUE DE BRITTO COSTA
- 9216 - "Excitação Paramétrica em Sistemas com um Grau de Liberdade" - MARIO EDUARDO SENATORE SOARES, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9301 - "PEFMAT - Relatórios de Subrotinas Matemáticas - Parte IV" - PRISCILA GOLDENBERG, PAULO DE MATTOS PIMENTA, MARCIA CIMERMAN
- 9302 - "Vibrações de Pórticos com Vigas de Rigidez Infinita" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9303 - "Direct Along - Wind Dynamic Analysis of Tall Structures" - MARIO FRANCO
- 9304 - "Comportamento Pós-Crítico de Barra Delgada Protendida" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9305 - "Os Polinômios Trigonômétricos na Solução de Problemas de Vibração Mecânica" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9306 - "Linhas de Influência Dinâmicas para Deslocamentos, Momentos Fletores e Forças Cortantes nas Vigas Simples" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9307 - "O Modelo Clam-Clay Revisto" - JOSÉ JORGE NADER
- 9308 - "Patologia da Concepção Estrutural: Danos por Efeitos de Segunda Ordem em Edifícios Altos, um Exemplo" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9309 - "Vibração de Sistemas Não Lineares: Método de Aproximações Sucessivas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9310 - "Normalização dos Símbolos Gráficos para Projetos de Estruturas de Madeira" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9311 - "Ensaio de Adensamento" - HELOISA HELENA SILVA GONÇALVES
- 9312 - "Comentários sobre a Normalização das Ações e Segurança nas Estruturas" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9313 - "Introdução à Análise Dinâmica de Estruturas por Meio de Elementos Finitos - Parte I - Galerkin e Elementos Finitos" - HENRIQUE DE BRITTO COSTA, SELMA HISSAE SHIMURA
- 9314 - "Vibrações Aleatórias na Dinâmica de Estruturas" - REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL
- 9315 - "Determinação da Equação para Cálculo do Momento Crítico à Flambagem Lateral" - VALDIR PIGNATTA E SILVA, LUIZ ANTONIO CORTESE DIOGO
- 9316 - "Efeito dos Sismos nas Estruturas Aporticadas" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9317 - "As Estruturas Aporticadas com Vigas de Rigidez Infinita, Submetidas ao Sismo" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ
- 9318 - "Uma Proposta de Normalização das Resistências da Madeira Estrutural" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9319 - "Resistência dos Materiais Anisotrópicos" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9401 - "Soluções Analíticas para a Deformação do Material Elasto - Plástico Cam - Clay úteis na Interpretação de Ensaio Triaxiais com Diferentes Trajetórias de Tensão" - JOSÉ JORGE NADER
- 9402 - "Introdução à Fotoelasticidade por Reflexão" - PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA, FRANCISCO ROURE FERNÁNDEZ, FREDERIC MARINON CARVAJAL
- 9403 - "Numerical Conditioning in Structural Solutions: a Proposal for a new Condition Number" - HENRIQUE LINDENBERG NETO
- 9404 - "A Esbelteza Estrutural e sua Influência nas Frequências de Vibrações" - JOSÉ CARLOS DE FIGUEIREDO FERRAZ

- 9601 - "Engineering Design of the Central Core of the TBR-E Small Aspect Ratio Tokamak" - R. M. O. PAULETTI, R. M. O. GALVÃO, G. O. LUDWIG, F. T. DEGASPERI, I. C. NASCIMENTO
- 9602 - "Norma de Projeto de Estruturas de Madeira" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO, CARLITO CALIL JÚNIOR, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA
- 9603 - "Desenho de Estruturas de Madeira" - CARLITO CALIL JÚNIOR, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA
- 9604 - "Determinação das Propriedades das Madeiras para Projeto de Estruturas" - PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA, CARLITO CALIL JÚNIOR, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9605 - "Determinação de Resistências das Ligações Mecânicas das Estruturas de Madeira" - PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO, CARLITO CALIL JÚNIOR
- 9606 - "Recomendações Sobre a Durabilidade das Madeiras" - CARLITO CALIL JÚNIOR, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA
- 9607 - "Valores Médios Usuais de Resistência e Rigidez de Algumas Madeiras Nativas e de Florestamento" - CARLITO CALIL JÚNIOR, ALMIR SALES, PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9608 - "Isotropia e Ortotropia em Lajes de Concreto Armado, Charneiras Plásticas - Apoios Rígidos" - ANTONIO RUBENS PORTUGAL MAZZILLI
- 9609 - "Considerações sobre a Resistência da Madeira Serrada Brasileira" - PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA
- 9610 - "LAOS - Um Pacote Computacional Orientado para Objetos para Manipulação de Matrizes e Vetores" - I. Q. BARROS, T. N. BITTENCOURT, C. WAKAMATSU
- 9611 - "Computer Simulation of Arbitrary, Cohesive Crack Propagation in Concrete" - T. N. BITTENCOURT, A. R. INGRAFFEA, J. LLORCA
- 9612 - "Métodos Numéricos para Análise Dinâmica de Estruturas Duplamente Calçadas" - LAU KWAN FU, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI
- 9613 - "Análise Não-Linear de Treliças Espaciais: Teoria Exata vs. Teoria de Segunda Ordem" - PAULO M. PIMENTA
- 9614 - "Gradientes Conjugados Pré-Condicionados: Aplicação em Problemas Estruturais" - MARCIA CIMERMAN, PRISCILA GOLDENBERG, PAULO M. PIMENTA
- 9615 - "Sugestões para um Curso Intuitivo de Teoria das Estruturas" - MARTIN PAUL SCHWARK
- 9616 - "A Investigação Experimental de Estruturas" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO
- 9617 - "Charneiras Plásticas - Considerações Iniciais Lajes de Concreto Armado Apoios Rígidos - Carga Concentrada" - ANTONIO RUBENS PORTUGAL MAZZILLI
- 9618 - "Análise Não-Linear de Pórticos Planos: Teoria Exata vs. Teoria de Segunda Ordem" - PAULO M. PIMENTA
- 9619 - "Dinâmica dos Sólidos Rígidos: Uma Formulação Lagrangiana" - PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 9620 - "Demonstração do Pacote LAOS na Programação de um Problema de Elementos Finitos" - IVAN DE QUEIROZ BARROS
- 9621 - "O Túnel de Vento de Camada Limite do Laboratório de Estruturas e Materiais Estruturais" - CÉLIO FONTÃO CARRIL JUNIOR
- 9622 - "Dimensionamento de Elementos de Fôrmas de Madeira para o Concreto Armado em Edifícios de Andares Múltiplos" - JOSÉ EDWARD RODRIGUES CRISTIANI, PEDRO AFONSO DE OLIVEIRA ALMEIDA
- 9623 - "Curvas Temperatura-Tempo de um Incêndio" - VALDIR PIGNATTA E SILVA, PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 9624 - "Determinação da Curva Temperatura-Tempo de um Incêndio Natural Compartimentado" - VALDIR PIGNATTA E SILVA, PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 9625 - "Estabilidade Elástica de Treliças Espaciais Simples" - GRACIA MENEZES VIANNA DE ASSIS, CARLOS EDUARDO NIGRO MAZZILLI, ODULPHO BARACHO NETO
- 9626 - "A Estabilidade no Método de Newmark" - GENY PAULA SLUYTMAN RODRIGUEZ, PAULO DE MATTOS PIMENTA
- 9627 - "Configuração Básica de Charneiras em Lajes de Concreto Armado Carga Concentrada Apoios Rígidos Contorno Convexo Simplesmente Apoiado" - ANTONIO RUBENS PORTUGAL MAZZILLI
- 9701 - "Integração Explícita Aplicada à Análise Dinâmica de Treliças Espaciais de Comportamento Elasto-Plástico" - REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL, ALEXANDRE F. BARTOLOMUCCI
- 9702 - "Estudo da Estabilidade de uma Estrutura Simples sob Carregamento Dinâmico de Impacto" - FLÁVIO JOSÉ GARZERI, REYOLANDO M. L. R. F. BRASIL
- 9703 - "Um Elemento Finito Triangular de Casca de Sete Nós Baseado no Conceito de Degeneração e na Interpolação Mista" - DANIEL LEPIKSON C. DE OLIVEIRA, MIGUEL L. BUCALEM
- 9704 - "Alvenaria Estrutural sob Ações de Longa Duração" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO, JEFFERSON SIDNEY CAMACHO
- 9705 - "Alvenaria Estrutural: Aplicação da Técnica de Modelagem Física Reduzida" - PÉRICLES BRASILIENSE FUSCO, JEFFERSON SIDNEY CAMACHO

