

BOLETIM TÉCNICO

DO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

INDA A ESTABILIDADE DOS SISTEMAS ELÁSTICOS
ACENO HISTÓRICO. O ERRO DE EULER

José Carlos de Figueiredo Ferraz
Professor Catedrático
(recebido em 05/04/90)



ESCOLA POLITÉCNICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

BT/PEF-9005

AINDA A ESTABILIDADE DOS SISTEMAS ELÁSTICOS.
ACENO HISTÓRICO. O ERRO DE EULER

José Carlos de Figueiredo Ferraz
Professor Catedrático
(recebido em 05/04/90)

EDITOR CHEFE

L.A.C.Diogo

COMISSÃO EDITORIAL

- | | |
|--|----------------|
| - Dinâmica e Estabilidade das Estruturas | C.E.N.Mazzilli |
| - Engenharia de Solos | W.Hachich |
| - Estruturas de Concreto, Metálicas, de
Madeira | P.B.Fusco |
| - Interação Solo-Estrutura | C.E.M.Maffei |
| - Mecânica Aplicada | P.M.Pimenta |
| - Métodos Numéricos | J.C.André |
| - Pontes e Grandes Estruturas | D.Zagottis |
| - Teoria das Estruturas | V.M.Souza Lima |

1. INTRODUÇÃO

O termo estabilidade⁽¹⁾, envolve ainda grande desconhecimento. Uma observação aliás correta, não apenas quanto ao conceito da estabilidade de movimento no todo, mas também no que tange à estabilidade da forma de equilíbrio dos sistemas elásticos. Neste caso, a estabilidade não se caracteriza clara e totalmente como a capacidade dos sistemas elásticos de manterem determinada forma de equilíbrio, sob a ação de dada carga. A perda de tal capacidade, na dependência das propriedades dos sistemas, pode ser expressa diferentemente. E perda esta a ser entendida como um fenômeno totalmente diferente.

A teoria básica da estabilidade da forma de equilíbrio dos sistemas elásticos foi exposto por Euler há mais dois séculos.

A este respeito reportamo-nos ao importante trabalho de G. Panovko e I. Gubanova⁽¹⁾, donde colhemos o tratamento aqui apresentado.

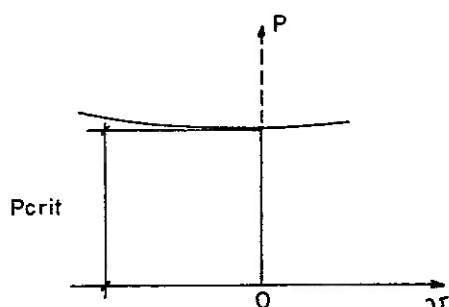
Segundo a concepção de Euler, para reconhecimento da forma instável de equilíbrio vale a idéia da vizinhança (algo tão próximo quanto se queira do estado inicial), ou sejam desvios das formas de equilíbrio, mantida a carga.

Com isto, tacitamente se subentende que a estabilidade se apresenta como esta nova forma de equilíbrio, sendo instável a forma inicial. Tal colocação do problema pressupõe que a perda de estabilidade se expressa pela passagem do sistema à forma deslocada de equilíbrio, considerada esta passagem como qualquer perturbação pequena da forma inicial do equilíbrio.

Sem dúvida, a possibilidade de realizar desvios da forma de equilíbrio depende do valor da carga, como se dá, por exemplo, no caso da solução do problema sobre a flexão longitudinal de uma barra axialmente comprimida.

As curvas da fig. 1 representam os estados de equilíbrio estável e instável para este caso, sendo que a primeira corresponde à linha cheia, e a segunda à com cruces. Em abcissa estão os deslocamentos v e em ordenadas os valores das forças de compressão.

Para forças $P < P_{crit}$ existe um único estado de equilíbrio, correspondente a $v = 0$.



No caso $P = P_{crit}$ há uma bifurcação, e para $P > P_{crit}$ a estabilidade se dá com a forma desviada. Presume-se aqui que a forma do sistema se determina por um único deslocamento característico v , e formas superiores de equilíbrio não se refletem.

FIGURA 1

No conceito euleriano, o desvio resolve alguns importantes problemas sobre a estabilidade dos sistemas de barras, placas e cascas. Entretanto, mais tarde, se constatou que o posicionamento de Euler não é universal, e numa série de casos a estabilidade se expressa não na passagem para a forma de equilíbrio vizinha, mas a outra. É necessário distinguir três classes de tais casos, ilustrados nas figuras 2 e 4.

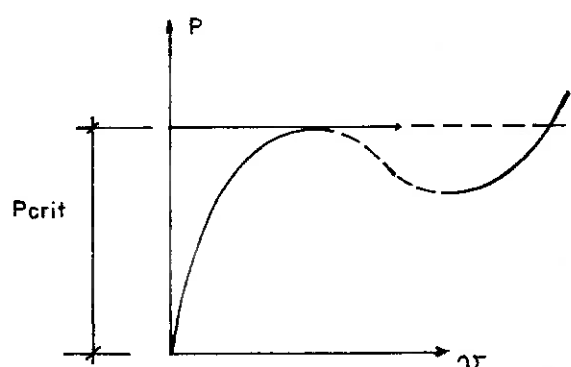


FIG.2

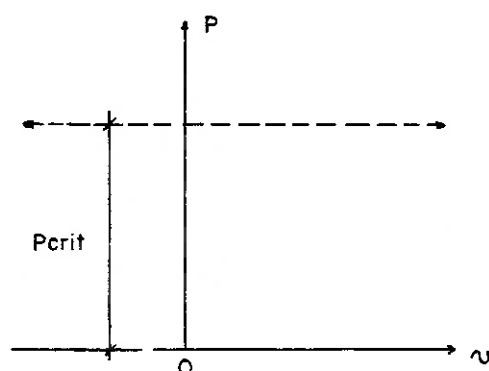


FIG.3

Para alguns sistemas, a vinculação entre P e v tem o aspecto dado na fig. 2. No caso de um crescimento monotônico a carga atingir um valor P , então se dá uma brusca mudança para outro ramo da curva (v, P) . Em tais sistemas a perda de estabilidade consiste na repentina passagem para uma forma nova (não vizinha) de equilíbrio.

Existem sistemas mecânicos para os quais a forma não perturbada se apresenta como a única forma de equilíbrio. Entretanto eles são estáveis apenas até determinado nível de carga $P = P_{crit}$, como mostra a fig. 3; e por isto no caso $P \geq P_{crit}$ é praticamente inevitável a saída dos sistemas do repouso para o movimento, como mostrado em tracejado. A estabilidade de tais sistemas não pode ser controlada através de pesquisas estáticas. E a conclusão sobre a estabilidade advem, nestes casos, apenas dos métodos mecânicos.

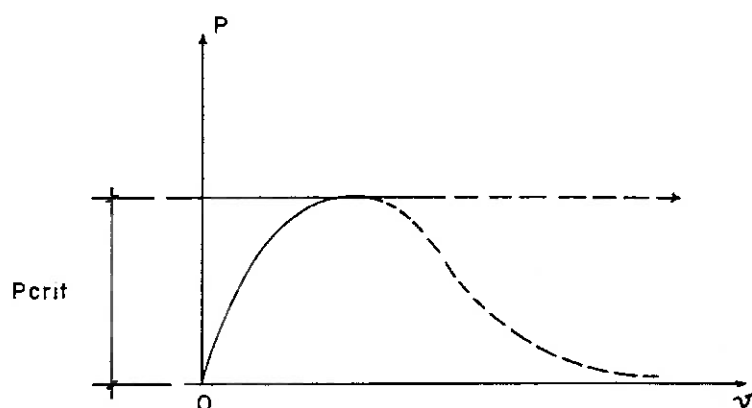


FIGURA 4

Na fig. 4 se apresenta um diagrama típico $P - v$ para sistemas que, em geral, não possuem formas de equilíbrio para cargas ultrapassando certo nível, dependente das propriedades dos sistemas. Na suposição de um carregamento monotônico, o ramo esquerdo do gráfico corresponde ao estado estável de equilíbrio; e o ramo da direita, ao estado de equilíbrio instável. Se a carga atinge o valor P_{crit} , então se

dá um crescimento ilimitado do deslocamento, como mostrado em traçado.

Pode-se assim dividir o estudo de estabilidade dos sistemas elásticos, abordando os temas ligados à manifestação de casos apresentados nas fig. 1 a 4.

2. PERDA DE ESTABILIDADE NO CASO DE APARIÇÃO DE FORMAS VIZINHAS DO EQUILÍBRIO

Importa assim entrar neste campo, acenando para o caso de perda de estabilidade no sentido de Euler. A imperfeição aqui apontada não tem apenas uma curiosidade histórica mas dá pretexto para um aprofundamento do problema. Cumpre depois considerar o desprezo (não computo) da influência da compressão até o valor crítico no valor da carga crítica. A seguir seria curioso a particularidade da ampla utilização do método energético. Importa também a perda de estabilidade no caso de carga que se modifica quando da variação da configuração dos sistemas elásticos.

- o Erro de Euler

Leonardo Euler (1707 - 1783) distinguiu-se por conquistas inquecíveis no campo da mecânica e da matemática. Ele é tido como o precursor da teoria da estabilidade das formas de equilíbrio dos sistemas elásticos. Dedicou-se a este tema mais de uma vez, começando em 1744. O último dos trabalhos, dedicado ao problema da flexão longitudinal das barras, ele o escreveu em 1778, já tendo transposto os 70 anos de idade.

Abordemos aqui os erros cometidos num dos seus primeiros trabalhos, no que toca à flexão longitudinal, mais tarde notados e corrigidos por ele mesmo.

No trabalho do ano 1744, Euler, partindo da equação diferencial exata do eixo fletido, estabeleceu o valor da carga crítica para barras comprimidas articuladas nos apoios.

Na publicação seguinte (1757) ele obtém o mesmo resultado utilizando a equação diferencial linear. A parte final desta publicação é dedicada ao problema sobre a estabilidade de formas retilíneas de barras em equilíbrio, carregadas não apenas por força de compressão nas extremidades, mas também por cargas uniformemente distribuídas longitudinalmente Fig. 5. Segundo o próprio Euler, tem-se:

q - é a intensidade da carga distribuída

P - a força da

z - a coordenação da seção da barra, cujo afastamento no caso de flexão é igual a $v(z)$

ζ - abscissa da seção que se altera nos limites $[0, z]$

FIG. 5

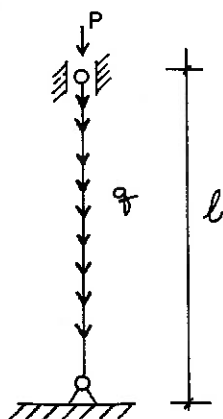
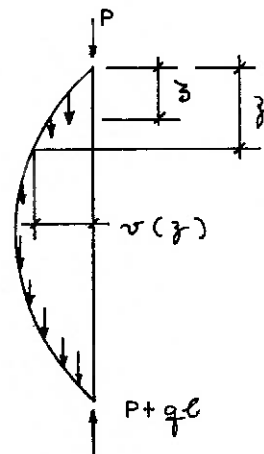


FIG. 6



A carga elementar $q \, d\zeta$ provoca na seção de abcissa z o momento fletor $- q \, d\zeta [v(z) - v(\zeta)]$. O momento fletor total nesta seção é igual à mesma dos momentos de todas as forças distribuídas entre as extremidades de barra na seção considerada fig. 6.

$$M(z) = - \int_0^z q [v(z) - v(\zeta)] \, d\zeta - Pv(z) \quad (1)$$

Por outro lado

$$M(z) = EJ \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (2)$$

e a equação íntegro-diferencial do eixo fletido da barra assume o aspecto:

$$EJ \frac{d^2 v}{dz^2} + q \int_0^z [v(z) - v(\zeta)] \, d\zeta + Pv(z) = 0 \quad (3)$$

Executando a integral vem:

$$\begin{aligned} \int_0^z [v(z) - v(\zeta)] \, d\zeta &= v(z) \, z - \int_0^z v(\zeta) \, d\zeta = \\ &= z \, v(z) - [\zeta \, v(\zeta)]_0^z + \int_0^z \zeta \frac{dv}{d\zeta} \, d\zeta = \\ &= z \, v(z) - z \, v(z) + \int_0^z \zeta \frac{dv}{d\zeta} \, d\zeta = \\ &= \int_0^z \zeta \frac{dv}{d\zeta} \, d\zeta \end{aligned} \quad (4)$$

Então de (3) resulta

$$EJ \frac{d^2 v}{dz^2} + q \int_0^z \zeta \frac{dv}{d\zeta} \, d\zeta + Pv(z) = 0 \quad (5)$$

ou derivando:

$$EJ \frac{d^3 v}{dz^3} + q z \frac{dv}{dz} + P \frac{dv}{dz} = 0 \quad (6)$$

É de se notar que esta equação segue imediatamente da expressão para força constante Q .

Entretanto ao tempo de Euler esta expressão não era conhecida. A dependência diferencial entre o momento fletor M e a força constante Q foi estabelecida apenas nos meados do século XIX.

A equação (6) é de terceira ordem e, portanto, sua solução exige três constantes. Já se verifica o paradoxo incluso em (6) porque a solução deve satisfazer a quatro condições de contorno:

$$v = 0 \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \quad (7)$$

para $z = 0$ e $z = 1$

É evidente ser impossível satisfazer todas as quatro condições, porque temos à disposição apenas três constantes. Tal discrepância no número de condições de contorno do problema evidencia a incorreção da equação fundamental (6).

Em cada caso Euler, de início, não prestou atenção sobre a discrepância mencionada e prosseguiu na solução e, sem mais, abandonou a última das condições de contorno (7).

Nós não vamos descartar esta solução da equação (6) porque ela

foi dada por Euler para o caso em que o valor de q é pequeno. Naturalmente, esta solução é incorreta, se bem que conduziu ao primeiro valor da carga crítica P_{crit} no caso limite $q = 0$.

De 1727 até 1741 Euler trabalhou na Academia de Ciência Petsburgo. No final deste período surgiram na Rússia pesadas condições para os membros da Academia, e muitos dos seus elementos estrangeiros gradativamente deixaram Petsburgo. Euler se valeu da oferta do rei da Prússia, Frederico II, e deslocou-se para trabalhar na Academia Berlinense de Ciência. Ali passou 25 anos, mas cerca de metade dos seus escritos, neste tempo de trabalho, foi publicada em Petsburgo, entre eles a pesquisa sobre flexão longitudinal, já mencionada acima.

Em 1766 Euler aceitou o convite de Catarina II e voltou a Petsburgo onde permaneceu até sua morte. Ali, já no declínio dos anos, em 1778, voltou-se de novo ao problema acima considerado, admitindo que na seção superior não existia força de compressão P , e pesquisou a solução da equação diferencial:

$$EJ \frac{d^3 v}{dz^3} + q z \frac{dv}{dz} = 0 \quad (8)$$

Desta vez, no postulado na composição da equação, o erro se mostrou bem sensível, a saber, resultando que para nenhum valor de q não existia forma de equilíbrio além da retilínea. Daí Euler concluiu que tal barra em geral não pode perder a estabilidade.

Esta contradição causou dúvidas ao próprio Euler que, depois de alguns meses, criticou o seu trabalho. A conclusão sobre a ilimitada

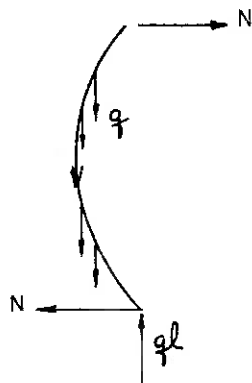


FIG.7

estabilidade da barra, carregada pelo peso próprio, Euler reconheceu "não apenas paradoxal, mas também duvidosa" e afirma que a solução analítica dada por ele, evidentemente, está errada. Entretanto em que consistia o erro, Euler ainda não percebera.

Apenas nas últimas publicações, referindo-se a isto em 1778, Euler esclareceu o assunto. Ele notou que, no compor a expressão (1), faltou o momento devido à reação horizontal N. Se $q = 0$ então esta reação não existe. Entretanto para $q \neq 0$ o surgimento da força N é necessário para o equilíbrio da barra, fig. 3. Considerando a força N a equação diferencial correta é:

$$EJ \frac{d^3 v}{dz^3} + q z \frac{dv}{dz} = N \quad (9)$$

Já que o valor de N é desconhecido, podemos considerá-lo como a quarta constante, que faltava para satisfazer todas as quatro condições de contorno do problema. A solução seguinte, Euler a construiu sob forma de série de potência; e. se bem que nela houvesse erro de cálculo, o resultado rejeita a conclusão sobre a estabilidade ilimitada da barra considerada.

A solução correta

$$\frac{q_{crit} l^3}{EJ} = 18,6 \quad (10)$$

foi dada mais tarde, quase cento e cinquenta anos depois, por A.N. Dinnik.

E.L. Nicolai apresentou em 1938 um trabalho detalhado sobre a teoria da flexão longitudinal. De 1917 até sua morte foi professor do Instituto Politécnico de Leningrado. A ele pertence uma série de importantes resultados sobre a teoria de elasticidade e vibrações de sistemas elásticos.

Naquele trabalho Nicolai expôs detalhadamente também a história acima mencionada com os seguintes dizeres: "Paradoxo, com tão brilhantes esclarecimentos de Euler, doutrinou e merece atenção. A solução deste paradoxo consiste, como vimos, na observação simples de que, se o deslocamento livre da extremidade da barra na direção transversal é impedido pela condição de vínculo, então, nas extremidades deve ser aplicada uma correspondente reação transversal. O erro, inicialmente admitido por Euler na memória de 1757, também por ele esclarecido em 1778, nós encontramos de novo na história da teoria de estabilidade dos sistemas elásticos". (2)

Para maior extensão do tema é importante que nos reportemos ao trabalho de Panivko e Gubanova^(1) donde extraímos a exposição e comentários acima.

NOTAS:

1. PANOVKO, Ia, G; GUBANOVA I,I: "Estabilidade e vibração dos sistemas elásticos". Moscou, 1967.
2. TIMOSHENKO, S: "Teoria da estabilidade elástica". Universidade de Stanford. U.S.A. 1947.