Funcionais lineares contínuos em espaços de Birnbaum-Orlicz

Uma função $A:[0,\infty[\to[0,\infty]$ é chamada função de Young se $A(0)=0$ e A for convexa. Neste trabalho excluimos os casos das funções triviais $A_1(u)=0$ para todo $u\geq 0$, e $A_2(u)=\infty$ para $u>0$. Definimos a função $\bar{A}(u)$, conjudada da função $A(u)$ por

$$\bar{A}(u)=\sup\{uv-A(v):v\geq 0\}.$$

Observemos que $\bar{A}(u)$ também é uma função de Young.

Dizemos que uma função $A(u)$ satisfaz a condição Δ_2 para $u\geq u_o$, se existirem $K>0$ e $u_o\geq 0$ tais que

$$A(2u)\leq K\ A(u)\ ,\quad \text{para}\quad u\geq u_o.$$

Notemos que se $A(u)$ satisfizer a condição Δ_2 para $u\geq 0$, teremos $A(u)>0$ para $u>0$.

No que segue, $(X,\mathcal{M},\mu)$ denotará um espaço de medida completa.

Definimos o espaço de Birnbaum-Orlicz $L_A=L_A(X,\mathcal{M},\mu)$ como o conjunto das classes de equivalência das funções μ-mensuráveis $f:X\to\mathbb{C}$ tais que $\int_X A(\alpha|f|)d\mu<\infty$ para algum $\alpha>0$, onde a relação de equivalência é dada por

$$f\sim g \iff \mu(\{x\in X : f(x)\neq g(x)\})=0.$$

Munido da norma

$$P_A(f) = \inf\left\{k>0 : \int_X A\left(\frac{|f|}{k}\right) d\mu \leq 1\right\},$$

o espaço L_A é um espaço de Banach.

Além disto, temos também que se $(X,\mathcal{M},\mu)$ é um espaço de medida que não contém átomos de medida infinita, ou se a função $A(u)$ é tal que $A(u)>0$ para $u>0$, então

$$N_A(f) = \sup \{ \int_X |fg| \, d\mu : g \in L_{\bar{A}} \text{ e } p_{\bar{A}}(g) \le 1 \}$$

é uma norma em L_A , e vale a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{2} p_A(f) \le N_A(f) \le 4 \, p_A(f).$$

Nosso objetivo é estabelecer condições para que o espaço dual de $L_A(X, M, \mu)$ seja isometricamente isomorfo a

$$L_{\bar{A}}(X, M, \mu).$$

Proposição 1. Seja g uma função de $L_{\bar{A}}$. A igualdade

$$\text{(i)} \quad F_g(f) = \int_X fg \, d\mu \quad , \quad \forall f \in L$$

define um funcional linear contínuo em L_A , e vale:

$$\text{(ii)} \quad \|F_g\| = N_{\bar{A}}(g)$$

Teorema 3.
~~Proposição 2~~. Seja (X, M, μ) um espaço de medida ~~σ-finita~~, seja $A(u)$ uma função de Young que satisfaça a condição Δ_2 para $u \ge 0$, e tal que $\bar{A}(u) > 0$ para $u > 0$. Se ψ é um funcional linear contínuo definido em L_A, então existe g em $L_{\bar{A}}$ tal que

$$\psi(f) = \int_X fg \, d\mu \quad , \quad \forall f \in L_A.$$

Demonstração. Se $\psi = 0$, tomamos $g = 0$. Suponhamos, portanto, $\|\psi\| > 0$. Existe uma sequência $(f_n)_{n \in N}$ de funções de L_A com $p_A(f_n) \le 1$, tal que $|\psi(f_n)| > \|\psi\| \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, para $n = 1, 2, \ldots$

Seja $E_m^n = \{x \in X : |f_n(x)| > \frac{1}{m}\}$, para $m, n \ge 1$.

Para cada $n \ge 1$, existe $\alpha_n > 0$ tal que

$$\int_X A(\alpha_n |f_n|) \, d\mu < \infty,$$

pois f_n está em L_A. Verificamos então que

$$\mu(E_m^n) \leq \frac{1}{A\left(\frac{\alpha n}{m}\right)} \int_X A(\alpha_n\,|f_n|)\,d\mu < \infty.$$

Seja $E = \bigcup_{m,n} E_m^n$. O espaço $(E, \mathcal{M}_E, \mu_E)$ é um espaço de medida σ-finita, e todas as funções f_n se anulam fora de E. Provaremos que se f está em L_A e se anula em E, então $\psi(f)=0$, reduzindo o problema ao caso de espaço de medida σ-finita.

Seja $S \subset X-E$, com $0<\mu(S)<\infty$. Para cada $n \geq 1$, definimos $g_n = f_n \operatorname{sgn} \overline{\psi(f_n)}$. Temos $\psi(g_n) = |\psi(f_n)|$, $p_A(g_n)=p_A(f_n)\leq 1$, e $\int_X A(|g_n|)\,d\mu \leq 1$.

Por outro lado, demonstra-se que

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{A(u)}{u} = \sup\{u : \bar{A}(u)=0\},$$

que por hipótese, é zero. Logo, dado $\varepsilon>0$, existe $u_o>0$ tal que se $0<u<u_o$ então $\frac{A(u)}{u} < \frac{\varepsilon}{\mu(S)}$. Seja $0<u<u_o$ fixado, e consideremos a função $h(x)=\operatorname{sgn}\overline{\psi(u\xi_S)}\, u\xi_S(x)$.

Temos $\psi(h)=|\psi(u\xi_S)|$. Portanto, $\psi(g_n+h)=|\psi(f_n)|+|\psi(h)|\geq 0$, e verifica-se que $p_A(g_n+h)\leq 1+u\varepsilon$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}|\psi(u\xi_S)| &= \psi(h)=\psi(g_n+h)-\psi(g_n)\\ &= |\psi(g_n+h)|-|\psi(f_n)|\\ &\leq \|\psi\| \quad p_A(g_n+h)-\|\psi\| \quad (1-\tfrac{1}{n})\\ &\leq \|\psi\| \quad (u\varepsilon+\tfrac{1}{n}).\end{aligned}$$

Como podemos fazer isto para todo $n \geq 1$ devemos, ter $|\psi(u\xi_S)| \leq \|\psi\| u\varepsilon$, e, dividindo por u, temos:

$$|\psi(\xi_S)| \leq \|\psi\| \varepsilon$$

Logo, $\psi(\xi_S)=0$ para $S \subset X-E$. É claro que se s é uma função simples, nula em E, também vale $\psi(s)=0$.

Para uma função f em L_A qualquer, que se anula em E, sabemos, por (5.15) em [1] que existe uma sequência $(s_n)_{n \in N}$ de funções simples de L_A, que se anulam em E tais que

$$\lim_{n \to \infty} p_A(f-s_n)=0 ,$$

e portanto, $\psi(f) = \lim_{n \to \infty} \psi(s_m)=0$.

<u>Corolário 4</u>. Sejam (X, M, μ) e $A(u)$ como no teorema 3. Para cada g em $L_{\overline{A}}$ considere o funcional F_g definido na proposição 1. A aplicação T dada por

$$T(g) = F_g$$

é uma transformação linear de $L_{\overline{A}}$ sobre L_A^* que preseva a norma.

<u>Corolário 5</u>. Se (X, M, μ) é um espaço de medida arbitrário, $A(u)$ e $\overline{A}(u)$ são funções de Young que satisfazem a condição Δ_2 para $u \geq 0$, então L_A é reflexivo.

Demonstra-se também o seguinte resultado.

<u>Teorema 6</u>. Seja (X, M, μ) um espaço de medida não puramente atômico e seja $A(u)$ uma função de Young tal que $A(u)<\infty$ para todo u. Se $\mu(x)=\infty$, suponhamos também que $A(u)>0$ e $\overline{A}(u)>0$ para $u>0$. Então, se L_A é reflexivo, as funções A e $\overline{A}$ satisfazem a condição Δ_2 para $u \geq u_0$, onde $u_0=0$ se $\mu(x)=\infty$.

REFERÊNCIAS

[1] BUND, I.M. *Birnbaum - Orlicz spaces*. São Paulo, IME-USP, 1978. (Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Série Matemática, 4)

[2] FERNANDEZ, P.J. *Medida e Integração*. Rio de Janeiro, IMPA, 1976. (Projeto Euclides)

[3] KRASNOSEL'SKII, M.A. & RUTICKII , Y.B. - *Convex function and Orlicz spaces*. - Groningen, P. Noordhoff, 1961.

Martha Salerno Monteiro

Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo