

## VIII CONGRESSO LATINO-AMERICANO E IBÉRICO

sobre métodos computacionais para engenharia

RIO DE JANEIRO, 3 a 5 de NOVEMBRO de 1987

PUC / RJ

TRABALHO Nº

PP:

### DETERMINAÇÃO DA CARGA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS

FRANCISCO ANASTÁCIO CANTISANI DE CARVALHO

- Faculdade de Tecnologia - FUA

EDDIE MANCINI

- Escola de Engenharia de São Carlos - USP

#### S U M Á R I O

Apresenta-se, neste trabalho, um processo para determinação da carga crítica de flambagem em edifícios com paredes de seção aberta, contraventadas por lintéis. Estuda-se também a instabilidade de painéis planos constituídos por paredes unidas por lintéis. Em todos os casos, o carregamento é constituído por cargas verticais, uniformemente distribuídas ao longo dos eixos que passam pelos centros de gravidades das seções transversais de cada parede. O modelo estrutural conduz a uma equação diferencial ou a um sistema de três equações diferenciais, homogêneas, de terceira ordem com coeficientes variáveis. A solução escolhida é por série de Potências e o uso do computador é essencial para a sua solução.

#### S U M M A R Y

A method for determining the critical buckling load in building with structures composed of restrained thin walled cantilevers of open cross section is presented. Also the instability of beam connected walls is studied. In all cases load is uniformly distributed along vertical axes passing through the centroids of walls sections. The structural model leads to differential equation or a system of three homogeneous differential equations with variable coefficients. The chosen solution is the one through power series and the use of computer is essential for solving it.

SYSNO	0790314
PROD	001518
ACERVO EESC	

## 1 - INTRODUÇÃO

O aparecimento de edifícios cada vez mais altos, têm exigido do engenheiro estrutural, um estudo mais cuidadoso da segurança dos mesmos. A instabilidade da estrutura de edifícios altos, torna-se objeto de constante preocupação para o engenheiro estrutural, notadamente em edifícios com paredes de seção aberta, internamente às quais localizam-se os poços de elevadores, escadas e outras áreas comunitárias.

Este trabalho é baseado no artigo de GLUCK e GELLERT [1] e trata da instabilidade da estrutura de edifícios formados por paredes de seção aberta contraventadas ou não por lintéis ou pela combinação de painéis planos.

Para seu desenvolvimento utiliza-se a técnica do Meio Contínuo, que consiste em substituir-se o sistema discreto de conexões horizontais ao nível dos andares, formado pelas lajes e lintéis, por um meio contínuo de rigidez equivalente uniformemente distribuída ao longo da estrutura do edifício.

As lajes serão assimiladas a diafragmas horizontais, com rigidez infinita no seu plano e nula transversalmente. Os lintéis serão considerados como vigas engastadas em ambas as extremidades, resistentes ao momento fletor e à força cortante.

Para os edifícios formados pela combinação de painéis planos, considera-se que as paredes que formam os painéis, são deformáveis por momento fletor e a contribuição do meio contínuo de restrição (lintéis) é suposta proporcional à derivada dos deslocamentos das paredes.

Nos edifícios formados por paredes de seção aberta, considera-se que as mesmas têm o mesmo comportamento que as barras de seção delgada.

Em todos os casos despreza-se a deformação axial da parede.

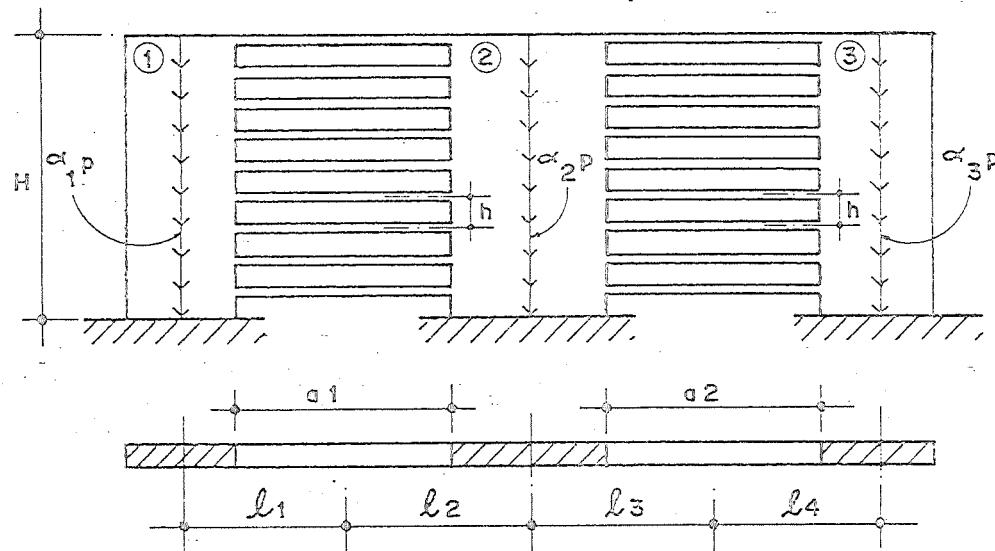
O modelo estrutural fica expresso através de uma equação diferencial ou a um sistema de três equações diferenciais homogêneas de terceira ordem com coeficientes variáveis. Para a sua solução utiliza-se Série de Potências.

## 2 - PAINÉIS PLANOS

A fig. (1) representa três paredes, de momento de inércia  $J_1$ ,

$J_2$  e  $J_3$ , respectivamente, ligadas entre si por lintéis igualmente espaçados de  $h$ . Os lintéis do primeiro e segundo conjunto têm, respectivamente, momentos de inércia  $J_{L1}$  e  $J_{L2}$ .

O carregamento nas paredes é proveniente das ações das lajes sobre as mesmas, sendo  $\alpha_i p$  a carga que cada parede recebe.

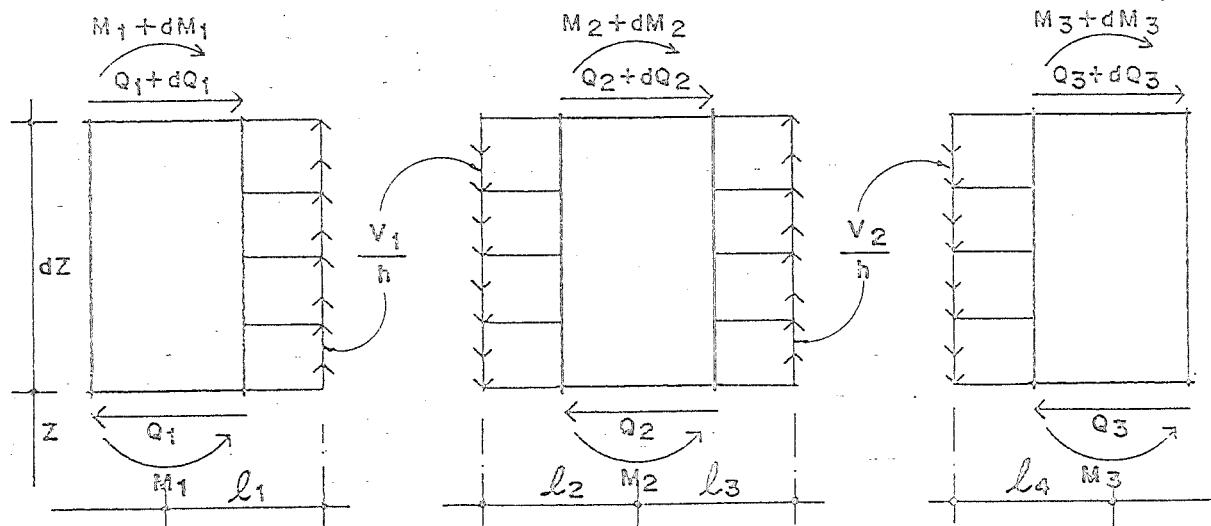


FIG(1) - ASSOCIAÇÃO DE PAREDES COM LINTEIS

A figura (2) representa os elementos das paredes com seus respectivos esforços.

No ponto médio dos vãos dos lintéis, aparecem forças cortantes incógnitas  $V_i$ . Considerando-se a hipótese da técnica do Meio Contínuo, estas forças cortantes serão consideradas uniformemente distribuídas ao longo do espaçamento  $h$  dos lintéis.

Fazendo-se o equilíbrio do elemento genérico das paredes, com os esforços mostrados na figura (2), obtém-se



FIG(2) - CONVENÇÃO PARA ESFORÇOS POSITIVOS

$$Q_1 = -EJ_1 \frac{u'''}{h} + V_1 \ell_1 \quad (1)$$

$$Q_2 = -EJ_2 \frac{u'''}{h} + V_1 \ell_2 + V_2 \ell_3 \quad (2)$$

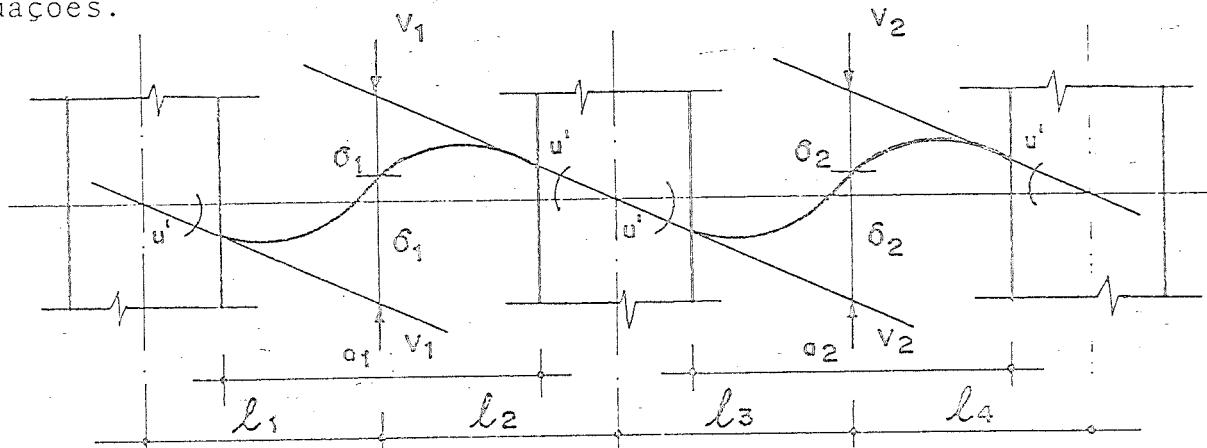
$$Q_3 = -EJ_3 \frac{u'''}{h} + V_2 \ell_4 \quad (3)$$

Somando-se as equações (1), (2) e (3) encontra-se a equação da força cortante no painel em função das incógnitas  $V_1$  e  $V_2$ .

$$Q = -(EJ_1 + EJ_2 + EJ_3) \frac{u'''}{h} + V_1 (\ell_1 + \ell_2) + V_2 (\ell_3 + \ell_4) \quad (4)$$

As forças cortantes incógnitas  $V_1$  e  $V_2$ , são aplicadas nos pontos de momento nulo dos lintéis, supostos nos meios dos seus vão. Estes pontos, considerados pertencentes a uma ou a outra parede vizinha, deslocam-se por efeito de flexão da parede a que se consideram pertencentes e da deformação do lintel por flexão e força cortante. Desprezam-se as deformações axiais das paredes.

De acordo com a figura (3) e convencionando positivo os deslocamentos para cima, compatibilizam-se tais deslocamentos com as equações.



FIG(3) - DESLOCAMENTOS DOS PONTOS MÉDIOS DOS VÃOS DOS LINTÉIS

$$-u' \ell_1 + \delta_1 = u' \ell_2 - \delta_1 \quad (5)$$

$$-u' \ell_3 + \delta_2 = u' \ell_4 - \delta_2$$

onde,  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são, respectivamente, os deslocamentos dos lintéis

devido às deformações dos mesmos por momento fletor e força cortante. Portanto têm-se

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{V_1 a_1^3}{24EJ_{L_1}} + \frac{V_1 a_1}{2G A_1} \\ \delta_2 &= \frac{V_2 a_2^3}{24EJ_{L_2}} + \frac{V_2 a_2}{2G A_2}\end{aligned}\quad (6)$$

onde  $J_{L_1}$  e  $J_{L_2}$  são, respectivamente, os momentos de inércia dos lintéis dos conjuntos 1 e 2, E é o módulo de Elasticidade longitudinal; G é o módulo de Elasticidade Transversal,  $A_1$  e  $A_2$  são, respectivamente, as áreas das seções transversais dos lintéis dos conjuntos 1 e 2 e  $a_1$  e  $a_2$  são os vãos dos lintéis.

Substituindo-se as equações (6) nas equações (5), resultam os valores das forças incógnitas  $V_1$  e  $V_2$  em função de derivada dos deslocamentos  $u$  das paredes.

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{1}{f_1} (\ell_1 + \ell_2) u' \\ V_2 &= \frac{1}{f_2} (\ell_3 + \ell_4) u'\end{aligned}\quad (7)$$

onde

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{a_1^3}{12EJ_{L_1}} + \frac{a_1}{GA_1} \\ f_2 &= \frac{a_2^3}{12EJ_{L_2}} + \frac{a_2}{GA_2}\end{aligned}\quad (8)$$

Substituindo-se as equações (7) na equação (4), obtém-se a equação final da força cortante no painel

$$Q = - (EJ_1 + EJ_2 + EJ_3) u'' + [\frac{1}{hf_1} (\ell_1 + \ell_2)^2 + \frac{1}{hf_2} (\ell_3 + \ell_4)^2] u'\quad (9)$$

Da equação acima obtém-se os parâmetros de rigidez do painel.

$$K = EJ_1 + EJ_2 + EJ_3 \quad (10)$$

$$k = \frac{1}{hf_1} (\ell_1 + \ell_2)^2 + \frac{1}{hf_2} (\ell_3 + \ell_4) \quad (11)$$

Estes valores, representam, respectivamente, a rigidez das paredes e dos conjuntos de lintéis.

As equações (9), (10) e (11), permitem concluir que a expressão da força cortante, a uma altura  $z$  de um painel contituído de  $n$  paredes e  $m$  conjunto de lintéis, é dado por

$$Q = -Ku'' + ku' \quad (12)$$

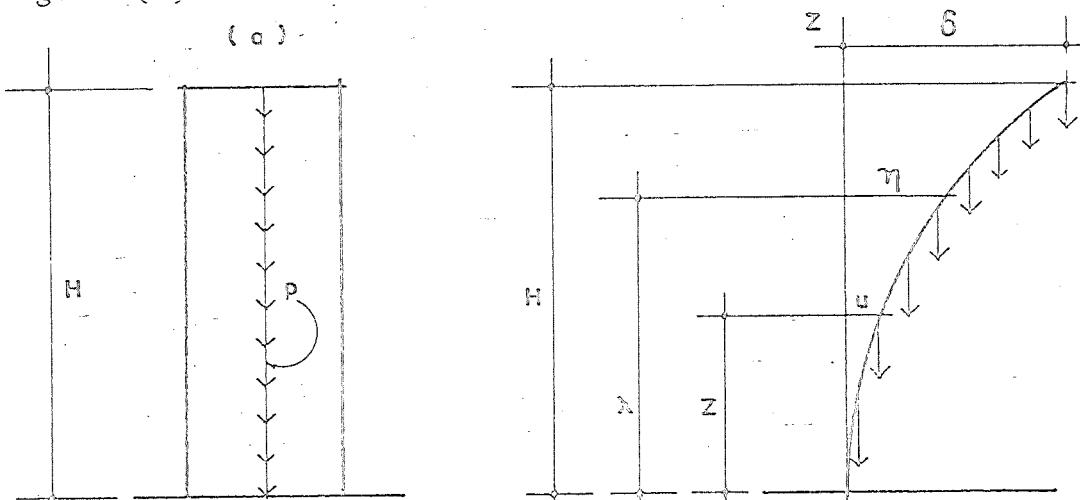
onde

$$K = \sum_{i=1}^n EJ_i$$

e

$$k = \frac{1}{h} \sum_{j=1}^m \left[ \frac{1}{f_j} (\ell_{(2j-1)} + \ell_{2j})^2 \right] \quad (13)$$

Para a obtenção dos esforços externos, a análise é feita com a parede na posição deslocada de equilíbrio. A parede, submetida a um carregamento de compressão uniformemente distribuído ao longo do eixo vertical, capaz de causar a sua instabilidade, é considerada em sua nova posição. Esta posição, fica caracterizada pelos deslocamentos  $u$  da figura (4).



FIG(4) - PAREDE NA POSIÇÃO DESLOCADA

Adotando-se a mesma convenção de esforços positivos da figura (2), tem-se

$$\frac{dM}{dz} = -p\eta(z) + pu - p(H-z) u' \quad (14)$$

ou seja

$$Q = p(H-z) u' \quad (15)$$

A força cortante em cada parede será, portanto.

$$\begin{aligned} Q_{ext,1} &= \alpha_1 p(H-z) u' \\ Q_{ext,2} &= \alpha_2 p(H-z) u' \\ Q_{ext,3} &= \alpha_3 p(H-z) u' \end{aligned} \quad (16)$$

Para um painel formado por n paredes carregadas a expressão que fornece a força cortante externa é

$$Q_{ext} = \alpha p(H-z) u' \quad (17)$$

onde

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad (18)$$

A força cortante externa em qualquer nível, é equilibrada pela força cortante interna no painel. Portanto, utilizando as equações (12) e (17) obtém-se a equação diferencial de equilíbrio.

$$Ku''' - \kappa u' + \alpha p(H-z) u' = 0 \quad (19)$$

ou

$$K\delta'''(\xi) - H^2 K\delta(\xi) + \alpha pH^3 (1-\xi) \delta(\xi) = 0$$

onde

$$\xi = \frac{z}{H} \quad (20)$$

e

$$\delta(\xi) = u' \quad (21)$$

Considerando-se que na estrutura da figura (1) não existem momentos aplicados no topo e sua base é perfeitamente engastada, conclui-se que as condições de contorno, são

$$\delta(0) = 0 \quad (22)$$

$$\delta'(1) = 0 \quad (23)$$

onde  $\xi = 0$  corresponde à base do painel e  $\xi = 1$  ao topo do mesmo.

### 3 - PAREDES DE SEÇÃO ABERTA CONTRAVENTADAS POR LINTEIS

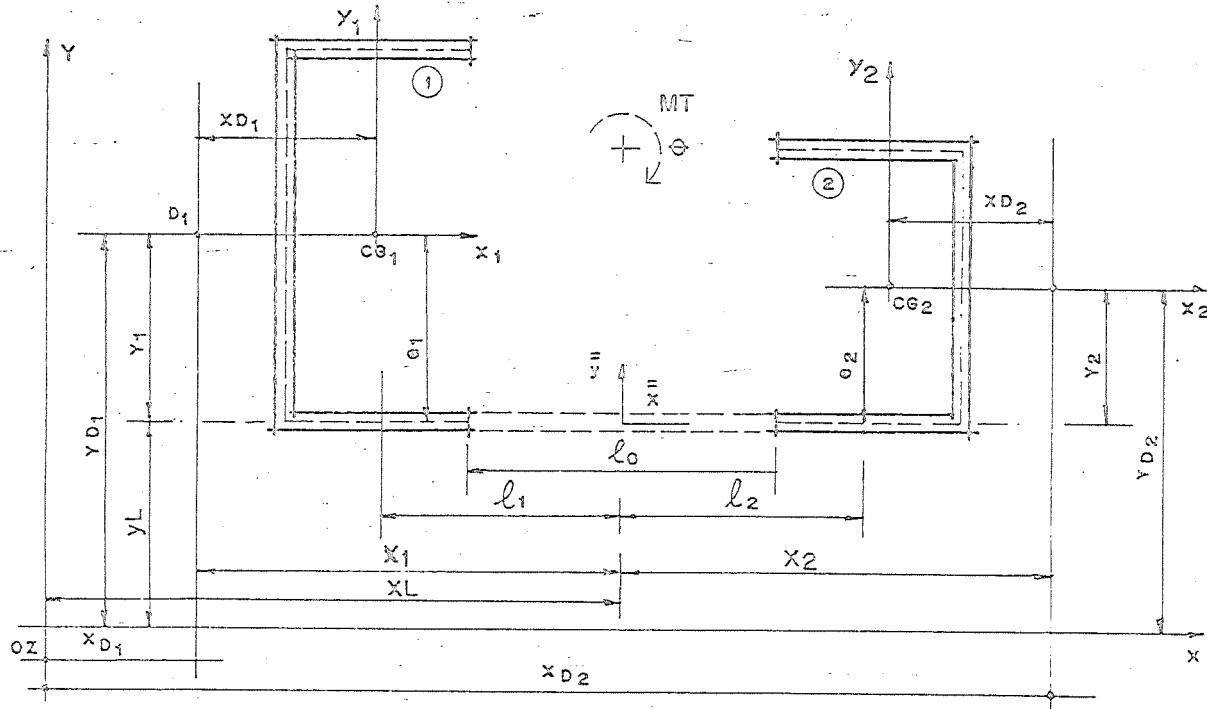
O comportamento das paredes de seção aberta à flexão simples, é análogo ao das paredes planas. Considera-se que as mesmas são deformáveis por momento fletor e extremamente rígida à força cortante.

Devido à sua geometria poligonal, elas apresentam rigidez nas duas direções ortogonais. Para representar os deslocamentos nas direções principais de sua seção transversal x e y, usam-se respectivamente, as notações u e v.

Para a presente análise, leva-se em conta a hipótese básica da teoria de Flexão Simples, admitindo que as seções planas permanecem planas quando fletidas.

Em virtude de pequena espessura das paredes de seção aberta, considera-se ainda, que as mesmas têm o mesmo comportamento à torção que as vigas de seção delgada. Devido ao engastamento na base do edifício, as paredes de seção aberta quando solicitadas à torção, têm seus empenamentos impedidos, introduzindo assim, o efeito do bimomento.

A figura (5) representa um edifício formado por duas paredes de seção aberta contraventada entre si, por lintéis ao nível dos andares.



FIG(5) - PAREDES DE SEÇÃO ABERTA CONTRAVENTADAS POR LINTÉIS

Para definir geometricamente a estrutura usam-se os sistemas de referências:

a) Sistema de eixos locais, tri-ortogonais, em cada parede, com origens na base do edifício, sendo os eixos  $0_1z_1$  e  $0_2z_2$  verticais e passando pelo centro de gravidade das seções transversais das paredes 1 e 2, respectivamente. Os eixos  $0_1x_1$ ,  $0_1y_1$  e  $0_2x_2$  e  $0_2y_2$  têm, respectivamente, a mesma direção dos eixos principais de inércia das seções transversais das paredes 1 e 2.

b) Sistema de eixo local, com origem na base do edifício, sendo o eixo  $\bar{z}$  vertical passando pelos pontos médios dos vãos dos lintéis. Os eixos  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são horizontais e perpendiculares entre si.

c) Sistema de eixo global  $oxyz$ , tri-ortogonal, com origem na base do edifício, sendo o eixo  $OZ$  vertical.

Os deslocamentos da estrutura à uma cota genérica  $z$  são

a) O centro de torção da parede  $i$ , desloca-se nas direções  $x_i$  e  $y_i$ , respectivamente, de  $u_i$  e  $v_i$  e toda a seção transversal da parede gira em torno do seu centro de torção de  $\theta_i$ .

b) Os deslocamentos das lajes nos pontos médios dos vãos dos lintéis serão representados, segundo  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , por  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$ , respectivamente, e a rotação em torno do eixo  $\bar{z}$  por  $\bar{\theta}$ .

Os esforços internos nas paredes, referenciadas ao sistema global OXYZ, são obtidos por:

$$\{Q\} = -[K]\{D''(Z)\} + [K_T]\{D'(Z)\} \quad (14)$$

onde

$$[K] = [T_1]^T [R_1]^T [K_1] [R_1] [T_1] + [T_2]^T [R_2]^T [K_2] [R_2] [T_2] \quad (15)$$

$$[K_T] = [K_{T_1}] + [K_{T_2}] \quad (16)$$

onde,  $[T_1]^T$  é a transposta da matriz  $[T_1]$  e  $[T_2]^T$  é a transposta da matriz  $[T_2]$ , obtidas, respectivamente, por

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{D1} \\ 0 & 1 & -X_{D1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_{D2} \\ 0 & 1 & -X_{D2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde,  $X_{D1}$ ,  $Y_{D1}$ ,  $X_{D2}$  e  $Y_{D2}$  são, respectivamente, as coordenadas dos centros de torção das paredes 1 e 2, em relação ao sistema global de referência.

$[R_1]^T$  é a transposta da matriz  $[R_1]$  e  $[R_2]^T$  é a transposta da matriz  $[R_2]$ , obtidas, respectivamente, por:

$$[R_1] = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[R_2] = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & \sin \phi_2 & 0 \\ -\sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , são, respectivamente, os ângulos que os eixos  $O_1x_1$  e  $O_2x_2$ , formam com eixo  $OX$ .

$[K_1]$  e  $[K_2]$  são dadas, respectivamente, por:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} EJ_{y1} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x1} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} EJ_{y2} & 0 & 0 \\ 0 & EJ_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & EJ_{\omega_2} \end{bmatrix}$$

e,  $[K_{T1}]$  e  $[K_{T2}]$  são as matrizes

$$[K_{T1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{T1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$[K_{T2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ_{T2} \end{bmatrix}$$

onde  $J_\omega$  e  $J_T$  são respectivamente, o momento setorial de inércia e o momento de inércia à torção livre da seção transversal da parede e  $\{D(Z)\}$  é o vetor dos deslocamentos da estrutura em relação ao sistema global.

$$\{D(Z)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (31)$$

O efeito do lintel de contraventamento referenciado ao sistema global é obtido por:

$$\{q\} = [k]\{D'(Z)\} \quad (32)$$

onde

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} \quad (53)$$

$$[k] = [\bar{T}]^T [\bar{k}] [\bar{R}] [\bar{T}] \quad (54)$$

onde,  $[\bar{T}]^T$  e  $[\bar{R}]^T$  são, respectivamente, a transposta da matriz  $[\bar{T}]$  e  $[\bar{R}]$  dadas por:

$$[\bar{T}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Y_L \\ 0 & 1 & -X_L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$[\bar{R}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $\psi$  é o ângulo formado pelo eixos  $\bar{o}\bar{x}$  e  $OX$ .

$[\bar{k}]$  é a matriz simétrica que fornece a contribuição dos lintéis na rigidez da estrutura, obtida por:

$$[\bar{k}] = \frac{1}{hf} \begin{bmatrix} (\ell_1 + \ell_2)^2 & & & \\ (\epsilon_2 - \epsilon_1) (\ell_1 + \ell_2) & (\bar{\epsilon}_2 - \epsilon_1)^2 & & \\ (\omega_{01} - \omega_{02}) (\ell_1 + \ell_2) & (\omega_{01} - \omega_{02}) (\epsilon_2 - \epsilon_1) & (\omega_{01} - \omega_{02})^2 & \end{bmatrix} \quad (56)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_{01} &= \ell_1 Y_1 - \epsilon_1 X_1 - \omega_1 \\ \omega_{02} &= -\ell_2 Y_2 + \epsilon_2 X_2 - \omega_2 \\ f &= \frac{\ell_0^3}{12EJ_L} + \frac{\ell_0}{AG} \end{aligned} \quad (57)$$

onde,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as áreas setoriais extrapoladas aos pontos 1 e 2

(pontos médios dos vão dos lintéis), respectivamente,  $J_L$  é o momento de inércia da seção transversal do lintel.

Os esforços externos, referenciados ao sistema global de eixos, por:

$$Q_{ext} = (H-Z) [P] \{D'(Z)\} \quad (38)$$

onde

$$[P] = [T_1]^T [R_1]^T [P_1] [R_1] [T_1] + [T_2]^T [R_2]^T [P_2] [R_2] [T_2] \quad (39)$$

$$[P_1] = [t_1]^T [N_1] [t_1] \quad (40)$$

$$[P_2] = [t_2]^T [N_2] [t_2] \quad (41)$$

onde

$$[t_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{D1} \\ 0 & 1 & x_{D1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$[t_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{D2} \\ 0 & 1 & x_{D2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$[N_1] = \alpha_1 p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_{O1}}{S_1} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$[N_2] = \alpha_2 p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_{O2}}{S_2} \end{bmatrix} \quad (45)$$

sendo respectivamente:  $J_{O1}$  e  $J_{O2}$ , os momentos polares de inércia em relação aos centros de gravidades das seções transversais das paredes 1 e 2.  $S_1$  e  $S_2$ , as áreas das seções transversais das paredes 1 e 2.

A equação de equilíbrio da estrutura é obtida igualando-se os esforços internos aos esforços externos. Portanto tem-se

$$\{Q\} + \{q\} = \{Q_{ext}\} \quad (46)$$

ou

$$[K]\{D'''(Z)\} - ([k] + [K_T])\{D'(Z)\} + (H-Z)[P]\{D'(Z)\} = \{0\} \quad (47)$$

ou, ainda

$$[K]\{\delta'''(\xi)\} - H^2([k] + [K_T])\{(\xi)\} + H^3(1-\xi)[P]\{\delta(\xi)\} = \{0\} \quad (48)$$

onde

$$\xi = \frac{Z}{H} \quad (49)$$

$$\delta(\xi) = \{D'(Z)\} \quad (50)$$

as condições de contorno, são as mesmas dadas pelas equações (22) e (23).

A equação (48), juntamente com as condições de contorno dadas pelas equações (22) e (23), permitem determinar a carga crítica p de instabilidade, utilizando-se, por exemplo, a solução por série de Potenciais.

#### 4 - CONCLUSÕES

Exemplos comparativos levados a efeito pelos autores mostraram a excelente aproximação da solução da carga crítica de instabilidade utilizando Série de Potências.

A ação da flexão dos lintéis nos Painéis e a consequente introdução de momentos de flexo-torção nas Paredes, aumenta consideravelmente a rigidez da estrutura.

#### REFERÊNCIAS

1. GLUCK, J. and GELLERT, M. - Buckling of Lateral Restrained Thin

## APÊNDICE

Apresenta-se neste apêndice o método de solução por série de Potências do sistema de equações diferencial

$$[K] \{ \delta''(\xi) \} - H^2 ([k] + [K_T]) \{ \delta(\xi) \} + H^3 (1-\xi) [P] \{ \delta(\xi) \} = \{ 0 \} \quad (1)$$

A solução da equação (1) por Série de Potências será

$$\delta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ A_n \} \xi^n \quad (2)$$

onde  $\{ A_n \}$  é o vetor constante dado por:

$$\{ A_n \} = \begin{Bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Devido ao engastamento perfeito na base da estrutura, sabe-se que

$$\{ \delta(0) \} = \{ 0 \} \quad (4)$$

resultando então, pela equação (2)

$$\{ A_0 \} = \{ 0 \} \quad (5)$$

Para que a equação (2) seja solução da equação diferencial é necessário que a soma dos coeficientes de potências iguais de  $\xi$  sejam todos nulos. Desta forma obtém-se

$$\{ A_2 \} = \{ 0 \} \quad (6)$$

e

$$\{ A_n \} = [\Phi_n] \{ A_1 \} \quad (7)$$

onde

$$[\Phi_n] = \frac{1}{n(n-1)} ([C_2][\Phi_{n-3}] - [C_1][\Phi_{n-2}]) \quad (8)$$

$$[C_1] = H^2 [K]^{-1} (H[P] - [k] - [K_T]) \quad (9)$$

$$[C_2] = H^3 [K]^{-1} [P] \quad (10)$$

$$[\Phi_0] = [\Phi_2] = [0] \quad (11)$$

e

$$[\Phi_1] = [I] \quad (12)$$

onde  $[I]$  é a matriz identidade.

Substituindo-se a equação (7) na equação (1) e tendo em vista a equação (6) vem

$$\{\delta(\xi)\} = (\sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n] \xi^n) \{A_1\} \quad (13)$$

Como no topo da estrutura não existe momentos fletores aplicados, nem bimomentos a segunda condição de contorno é facilmente deduzida como

$$\{\delta'(1)\} = \{0\} \quad (14)$$

Fazendo-se

$$[C_{(p)}] = \sum_{n=1}^{\infty} n[\Phi_n] \quad (15)$$

Das equações (13) e (14) resulta

$$[C_{(p)}] \{A_1\} = \{0\} \quad (16)$$

Tendo em vista que o vetor  $\{A_1\}$  é diferente de zero e a matriz  $[C_{(p)}]$  é função da carga crítica  $p$ , o valor desta é determinado com a anulação do determinante de  $[C_{(p)}]$ , o que garante a existência de

solução diferente da trivial, isto é

$$\det [C_{(p)}] = 0 \quad (17)$$