ORIGAMI E GEOMETRIA

José de Oliveira Siqueira

Orientadora: Célia Contin Góes

Todos nós sabemos dividir um segmento em três partes congruentes usando régua e compasso. Mas suponha que você não disponha dos instrumentos clássicos (régua e compasso) para esta construção. Porém você possui um quadrado de papel cujo lado tem a medida ℓ do segmento a ser dividido. Seria possível, então, resolver o problema? A resposta é afirmativa e o método que usamos é proveniente da técnica japonesa do Origami.

Observe os 3 problemas a seguir:

Problema 1: Dividir um quadrado de papel em 3 retângulos congruentes usando dobras de papel.

Solução: Pegue uma folha quadrada e siga as instruções:

a) dobre o papel fazendo A coincidir com D e B coincidir com C. Desta forma, ficam determinados E e F, pontos médios de AD e BC;

b) abra o papel e agora faça D coincidir com F. Assim construímos um triângulo retângulo com um cateto CF e a soma do outro cateto com a hipotenusa igual ao comprimento do lado do quadrado;

c) chame de G o ponto de AB que coincide com um ponto de AD na nova posição.

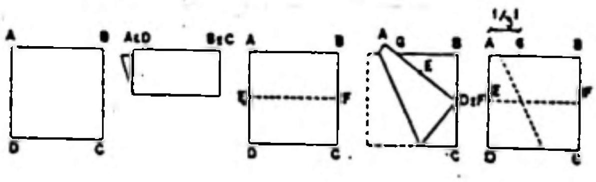


Figura 1: $med(AG) = \frac{1}{3}\ell$

Fazendo o mesmo para o segmento DC podemos obter o ponto H.

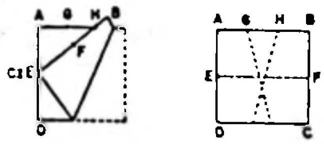
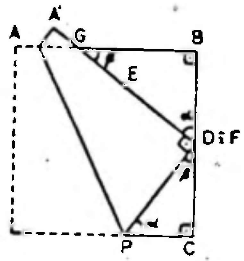


Figura 2: med$(HB) = \frac{1}{3}\ell$

Os pontos G e H assim obtidos dividem o lado AB em três segmentos congruentes.

Demonstração:



O $\Delta\ DGB$ é semelhante ao $\Delta\ PDC$.

Portanto, $\frac{\text{med}(BD)}{\text{med}(PC)} = \frac{\text{med}(GB)}{\text{med}(DC)}$.

Como med(DC) = med$(BD) = \frac{\ell}{2}$, então: med(GB).med$(PC) = \frac{\ell^2}{4}$.

Por Pitágoras ($\Delta\ PDC$), temos: $(\text{med}(PD))^2 = (\text{med}(PC))^2 + (\text{med}(DC))^2$.

Como med(PC)+ med$(PD))^2 = (\frac{\ell}{2})^2$.

Portanto, temos que: med$(PC) = \frac{3\ell}{8}$, med$(GB) = \frac{2\ell}{3}$ e med$(AG) = \frac{1}{3}\ell$.

c.q.d.

Problema 2: Dividir um quadrado de papel em 5 retângulos congruentes usando dobras de papel.

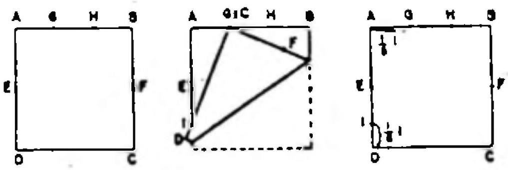
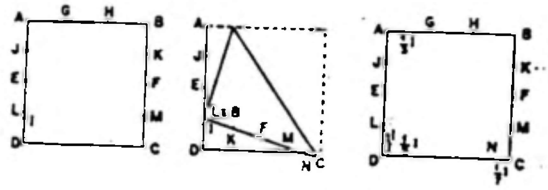


Figura 3: med$(ID) = \frac{1}{5}\ell$

Deixamos a prova deste resultado por conta do leitor.

Problema 3: Dividir um quadrado de papel em 7 retângulos congruentes usando dobras de papel.



J é o ponto médio de AE

L é o ponto médio de ED

K é o ponto médio de BF

M é o ponto médio de FC

Figura 4: $med(NC) = \frac{1}{7}\ell$

Pedimos ao leitor, novamente, que demonstre este resultado.

Problema 4: Dividir um quadrado de papel em 9 retângulos congruentes usando dobras de papel.

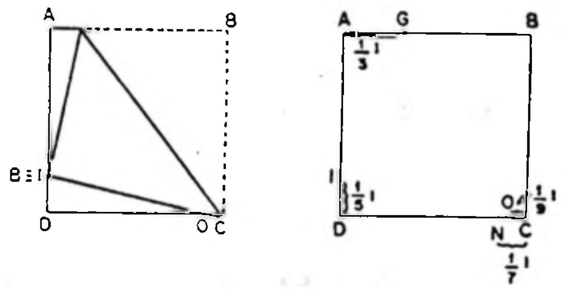


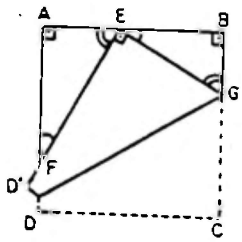
Figura 5: $med(OC) = \frac{1}{9}\ell$

Caro leitor, desta vez é o último que pedimos para você provar.

Demonstraremos o teorema geral que possibilita fazer as divisões acima:

Teorema: Sejam $ABCD$ um quadrado de lado ℓ e $E \in AB$ tal que $\text{med}(AE) = (\frac{m}{m+n})\ell$ e $\text{med}(EB) = (\frac{n}{m+n})\ell$, onde n e $m \in \mathbb{N}^*$.

Se dobrarmos o quadrado de modo que os pontos E e C coincidam, como mostra a figura abaixo, então $\text{med}(FD) = (\frac{m}{2n+m}).\ell$, onde $\{F\} = AD \cap ED'$, sendo D' a nova posição de D.



Demonstração: Os triângulos EBG e FAE são semelhantes, pois $F\hat{A}E$ é congruente a $E\hat{B}G$ e $A\hat{E}F$ é congruente a $E\hat{G}B$, pois $\text{med}(E\hat{G}B) = 90^o - \text{med}(B\hat{E}G) = \text{med}(A\hat{E}F)$. Portanto, $\frac{\text{med}(BG)}{\text{med}(AE)} = \frac{\text{med}(BE)}{\text{med}(AF)}$. Como $\text{med}(AF) = \ell - \text{med}(FD)$, então $\frac{\ell - \text{med}(FD)}{\text{med}(EB)} = \frac{\text{med}(AE)}{\text{med}(BG)}$. Por Pitágoras ($\Delta\ EBG$) e considerando que $\text{med}(GE) + \text{med}(BG) = \ell$, temos que $\text{med}(BG) = \frac{\ell}{2}\frac{m(2n+m)}{(n+m)^2}$.

Logo, $\text{med}(FD) = (\frac{m}{2n+m})\ell$.

c.q.d.

Corolário 1. Se $m = 1$ e $n = 1$ então $\text{med}(FD) = \frac{1}{3}\ell$. (Problema 1) (Teorema de Haga).

Corolário 2. Se $m = 1$ e $n = 2$, então $\text{med}(FD) = \frac{1}{5}\ell$. (Problema 2).

Corolário 3. Se $m = 1$ e $n = 3$ então $\text{med}(FD) = \frac{1}{7}\ell$. (Problema 3).

Corolário 4. Se $m = 1$ e $n = 4$ então $\text{med}(FD) = \frac{1}{9}\ell$. (Problema 4).

Corolário 5. Se $m = 1$ e $n = 5$ então $\text{med}(F) = \frac{1}{11}\ell$.

Exercício: Resolva este último problema (Corolário 5) dobrando o papel.

Corolário 6. Se $m+n=2^d$, onde d é o número de dobras paralelas ao lado AD, então

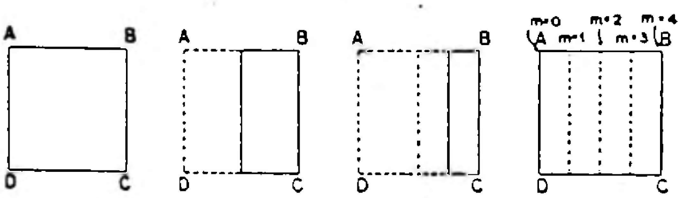
(i) $\text{med}(AE)=\frac{m}{2^d}\ell,\ 1\le m\le 2^d$;

(ii) $\text{med}(EB)=(1-\frac{m}{2^d})\ell$;

(iii) $\text{med}(FD)=(\frac{m}{2^{d+1}-m})\ell,\ 2^{(d+1)}>m$.

Observar que 2^d é o número de retângulos congruentes resultantes dos vincos no papel e m significa considerar E como o m–ésimo ponto da divisão depois de A.

Exemplo: Duas dobras $(d=2)$ paralelas ao lado AD.



1a. *dobra* 2a. *dobra*

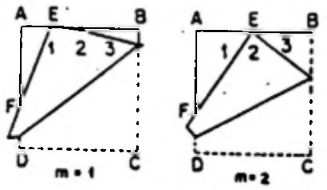


Figura 5

$\text{med}(FD)=\frac{\ell}{7}$ $\text{med}(FD)=\frac{\ell}{3}$

É interessante notar as relações de dependência entre as divisões.

Exemplos:

(1) Para se determinar $\text{med}(FD)=\frac{1}{16}\ell$, observamos que $16=2^4$ e, portanto, F pode ser obtido como o primeiro ponto depois de A determinado por $d=4$ dobras paralelas ao lado AB (notação do teorema).

(2) Para se determinar $\text{med}(FD)=\frac{1}{15}\ell$ observamos que $15=2^4-1$. Então, usando o corolário 6 com $d=3$, começamos determinando o segmento AE

com med$(AE) = \frac{1}{8}\ell = \frac{1}{2^3}\ell$, fazendo 3 dobras paralelas ao lado AD.

(3) Para se determinar med$(FD) = \frac{1}{17}\ell$, usamos diretamente o teorema fazendo $\frac{m}{2n+m} = \frac{1}{17}$ com $m = 1$ e $n = 8$. Precisamos, então, começar com um segmento medindo $\frac{m}{m+n}\ell = \frac{1}{9}\ell$.

Fazendo $\frac{m}{2n+m} = \frac{1}{9}$ com $m = 1$ e $n = 4$, concluímos que precisamos de um segmento medindo $\frac{m}{m+n}\ell = \frac{1}{5}\ell$.

Fazemos, então, $\frac{m}{2n+m} = \frac{1}{5}$ com $m = 1$ e $n = 2$ concluímos que precisamos de um segmento com medida $\frac{m}{m+n}\ell = \frac{1}{3}\ell$ e este já sabemos determinar (veja problema 1), onde $3 = 2^2 - 1$ (basta uma dobra paralela ao lado AD).

(4) Para determinar med$(FD) = \frac{1}{18}\ell$, observamos inicialmente que $\frac{1}{18} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\ell$ e que um segmento medindo $\frac{1}{9}\ell$ pode ser obtido como no exemplo 3.

Podemos resumir as relações de dependência entre as divisões através do esquema abaixo:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{11} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{13} \quad \frac{1}{14} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{17} \quad \frac{1}{18} \quad \cdots$$

Esquema para $\ell = 1$

Observamos que as construções acima utilizam uma régua e um compasso não canônicos representados por coincidências de pontos e dobraduras de papel.

Um problema mais complicado seria a generalização usando um retângulo de lados a e b $(a \neq b)$.

Sugerimos ainda ao leitor construir uma tabela de med$(FD) = (\frac{m}{2n+m})$.

Apresentamos abaixo a tabela para que o leitor a complete:

$$
\begin{array}{cc|cccccc}
 & & & & m & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{7} & \frac{4}{9} & \frac{5}{11} & \\
 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & & & & \\
n & 3 & & & \frac{1}{3} & & & \\
 & 4 & & & & \frac{1}{3} & & \\
 & 5 & & & & & \frac{1}{3} & \\
 & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Referência

[1] Kasahara, Kunihiko e Toshie, Takahama. *Origami for the Connoisseur*. Japan Publications, Inc. Tokyo and New York. 1987.