

Renata Grunberg

Bolsista do CNPq

Orientadora: Ofélia Teresa Alas

I - Introdução

Um espaço topológico X é dito normal se, dados A e B subconjuntos fechados disjuntos de X , existem U_A e U_B subconjuntos abertos disjuntos de X tais que $A \subset U_A$ e $B \subset U_B$. Nesse caso, dizemos que A e B podem ser separados.

Por indução, é fácil provar que qualquer coleção finita de fechados 2 a 2 disjuntos seus elementos podem ser separados, porém a família $\mathcal{F} = \{\{0\}\} \cup \{\{\frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ mostra que no caso enumerável isso não é verdade.

Para evitar esse tipo de dificuldade, temos as seguintes definições:

- 1) Uma família de fechados 2 a 2 disjuntos é discreta se a união de qualquer sub-família é um fechado.
- 2) Um espaço topológico X é Collectionwise Normal se toda família discreta pode ser separada.

Tendo em vista o Teorema que diz que um espaço de Morre, Collectionwise Normal é metrizável, é natural a pergunta:

- Sob que circunstâncias Normal implica Collectionwise Normal?

Inicialmente mostraremos uma equivalência entre afirmações.

Teorema 1.

Seja X espaço topológico Normal e T_1 . São equivalentes:

- i) $\exists Y \subset X$, Y discreto, fechado, não enumerável.

ii) $\exists G$ família discreta de fechados não enumerável.

Dem.: i) $\Rightarrow$ ii)

Se $y = \{y_i : i \in I\}$ $|I| > X_0$.

Seja $G = \{\{y_i\} : i \in I\}$ e G é coleção discreta de fechados, pois $\forall A \subset y$, A é fechado.

$|G| = |y|$, obviamente.

ii) $\Rightarrow$ i)

Se $G = \{F_i : i \in I\}$.

Seja $x_i \in F_i$ e $Y = \{x_i : i \in I\}$.

(a) Seja $i_0 \in I$ $\cup_{i \neq i_0} F_i$ é fechado $\Rightarrow X \setminus \cup_{i \neq i_0} F_i$ é aberto.

Como $(X \setminus \cup_{i \neq i_0} F_i) \cap y = \{x_{i_0}\} \Rightarrow \{x_{i_0}\}$ é aberto em $Y \Rightarrow Y$ é discreto.

(b) $Y \subset \cup_{i \in I} F_i \Rightarrow \bar{Y} \subset \cup_{i \in I} F_i$ portanto $x \in \bar{Y} \Rightarrow \exists i_1 \in I$ tal que $x \in F_{i_1}$.

$\cup_{i \neq i_1} F_i$ e F_{i_1} são fechados disjuntos. Como X é normal, $\exists V_1, V_2$ abertos tal que $\cup_{i \neq i_1} F_i \subset V_1$ e $F_{i_1} \subset V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Portanto, se $x_i \in F_i$ e $i \neq i_1$, então $x_i \notin V_2 \Rightarrow x_i \notin V_2 \cap Y$. Portanto $V_2 \cap Y = \{x_{i_1}\}$.

Como X é T_1 , se $x \neq x_{i_1}$, $\exists V_x$ tal que $x_{i_1} \notin V_x$. Se $V = V_x \cap V_2$, temos $V \cap Y = \emptyset \Rightarrow x \notin \bar{Y}$. Contradição.

Logo, $x \in \bar{x}_{i_1}$, portanto $\bar{Y} \subset Y \Rightarrow Y = \bar{Y}$.

Teorema 2.

Num espaço Normal, coleções discretas enumeráveis são separadas.

Seja $Y = \{y_n\}_{n < \omega}$ coleção discreta de fechados. $\forall n_0 < \omega$ sejam U_{n_0} e U'_{n_0} abertos disjuntos tal que

$$y_{n_0} \subset U_{n_0} \text{ e } \cup_{n \neq n_0} y_n \subset U'_{n_0}.$$

Seja $V_n = U_n \cap \cap_{k < n} U'_k$.

Obviamente $Y_n \subset V_n$ e se $m, n < \omega$ $n < m$. $x \in V_m \Rightarrow x \in \bigcap_{k < m} U'_k \Rightarrow x \notin \bigcup_n V_n \forall n < m \Rightarrow x \notin U_n$.

Portanto, $V_m \cap V_n = \emptyset$.

II - O Caso Separável

Teorema 3.

$2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1} \Rightarrow$ Se X é normal separável, então não possui coleção discreta de fechados não enumerável.

Dem.: Suponha que exista.

Seja $G = \{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ a coleção.

Se $M \subset G$.

Pelo lema de Urysohn $\exists f_M : X \rightarrow [0, 1]$ contínua, tal que $f_M(UM) = \{0\}$.

$f_M(U(G \setminus M)) = \{1\}$.

$M \not\subset N \Rightarrow \exists F \in M$ e $F \not\subset N$ (ou vice-versa) e $x \in F \Rightarrow f_N(x) = 1$. Mas $f_M(x) = 0$. Logo $f_M \neq f_N$.

Como $|P(G)| = 2^{\aleph_1}$ e só temos $2^{\aleph_0}$ funções contínuas X em $[0, 1]$ (X é separável), temos a contradição.

Logo a pergunta está respondida se $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ e se X é normal separável.

E se $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$?

III - Exemplo

Assuma $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$. Então existe um espaço separável, T_1 , normal com subespaço fechado discreto não enumerável que não é Collectionwise Normal.

Dem.:

Seja L um conjunto tal que $|L| = w_1$ e $L \cap w = \emptyset$.

Seja $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha < c} \cup \{w \setminus F_\alpha\}_{\alpha < c}$ família independente de subconjuntos de w (i.e., qualquer intersecção finita de elementos de $\mathcal{F}$ com índices distintos é não vazia).

Como $2^{w_1} = 2^{w_1}$, construa uma função que preserva complemento $f : P(L) \rightarrow \{A_\alpha\}_{\alpha < c} \cup \{w \setminus A_\alpha\}_{\alpha < c}$.

Seja $X = L \cup w$ com sub-base T definida por:

(a) Se $M \subseteq L$ então $M \cup f(M) \in T$

(b) Se $n \in w$ então $\{n\} \in T$

(c) $p \in X \Rightarrow X \setminus \{p\} \in T$.

Temos que:

(c) garante T_1

(b) torna L fechado

(a) torna L discreto.

Facilmente podemos ver que $\bar{w} = X \Rightarrow X$ é separável.

X é Normal:

se Y, Z são subconjuntos fechados disjuntos de X .

$$U_Y = (Y \cup f(Y \cap L)) \cap X \setminus Z$$

e

$$U_Z = ((Z \setminus L) \cup ((L \setminus Y \cup f(L \setminus Y)) \cap (X \setminus Y)))$$

são abertos procurados.

X não é Collectionwise Normal:

se fosse $G = \{\{y\} : y \in L\}$ seria separada

i.e., $\forall y \in L \exists V_y = (M_1^y \cap \dots \cap M_{y_n}^y) \cup (f(M_1^y) \cap \dots \cap f(M_n^y)) \setminus \{p_1, \dots, p_K\}$

t.q. $y_1 \neq y_2 \in Y \Rightarrow V_{y_1} \cap V_{y_2} = \emptyset$ (onde $M_i^y \subset L$)

e portanto se $A_y = (f(M_1^y) \cap \dots \cap f(M_n^y)) \setminus \{p_1, \dots, p_K\}$.

Temos que $A_{y_1} \subset w$ e $y_1 \neq y_2 \Rightarrow A_{y_1} \cap A_{y_2} = \emptyset$.

Teríamos então

(*) $\bigcup_{y \in Y} A_y \subset w$ e como são 2 a 2 disjuntos

$$|\bigcup_{y \in Y} A_y| = \sum_{y \in Y} |A_y| = w \cdot w_1 = w_1$$

e portanto

$$|\bigcup_{y \in Y} A_i| > w \rightarrow \text{contradição por (*)}.$$

Bibliografia

- [1] F.D. Tall, *Normality versus Collectionwise Normality*, Handbook of Set-Theoretic Topology.
- [2] R. Engelking, *General Topology*, 1977.