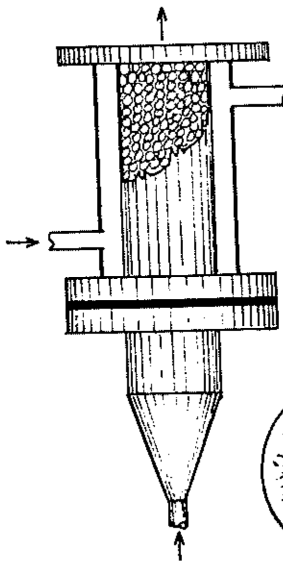
XVII ENCONTRO SOBRE ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS

VOLUME I

ANAIS



DEQ - UFSCar

EDITORES:

Dermeval José Mazzini Sartori - Coord.
Ana Maria da Silveira - Secr. Geral

Apoio: CNPq, FAPESP, FINEP, UFSCar

São Carlos, 24 a 26 de outubro de 1989

Editor
Dermeval José Mazzini Sartori
Ana Maria da Silveira
Departamento de Engenharia Química
Centro de Ciências e Tecnologia
Universidade Federal de São Carlos

E56a Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos
(17: 1989: São Carlos, SP)
Anais. São Carlos, SP: UFSCar, SP, 1989
2v.: il., graf., 21 cm
1. Fenômenos de transporte - Congressos.
2. Sistemas particulados - Congressos. 3.
Sistemas particulados - aspectos tecnológicos. I. Título.

CDD- 660.284.2

VOLUME-I

DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORÍTMO COMPUTACIONAL PARA
O ESTUDO DO ESCOAMENTO BI-DIMENSIONAL
DE ÁGUAS SUBTERRÂNEAS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

por

A.Darezzo Filho[1], D.M.Milani[1] e A.M.Righeto[2]

RESUMO -- Modelos matemáticos envolvendo as equacoes diferenciais a derivadas parciais são comuns nos problemas de Hidrologia. Pretendemos neste trabalho o estudo do escoamento bidimensional de águas subterrâneas em um domínio qualquer, utilizando-se a técnica dos Elementos Finitos.

O trabalho é desenvolvido desde a modelagem do fenômeno físico, passando pela discretizacão do domínio, através de elementos triangulares e finalizando com o desenvolvimento de um algoritmo computacional estruturado e comunicativo com o usuário.

INTRODUÇÃO

Modelos matemáticos, com estabelecimento de algorítmos numéricos computacionais ,para o estudo do escoamento em águas subterrâneas são de grande utilidade para Hidrologistas.

Pretendemos, nesse trabalho, a modelagem de um problema de escoamento em águas subterrâneas, que é iniciado com o desenvolvimento da equação diferencial parcial do escoamento em duas dimensões,passando pelo desenvolvimento do algorítmo computacional e concluido com sua resolução numérica numa região simples, através do método dos elementos finitos.

DESENVOLVIMENTO DO MODELO

Consideremos o domínio R de contorno C, desejamos calcular a carga hidráulica h, isto e´, resolver a equação $L(h) = 0$, quando o domínio D esta sujeito a condicões de contorno.

Destacando um volume de controle no domínio R, temos,usando a lei da Conservação da Massa e a lei de Darcy, a equacão diferencial a derivadas parciais eliptica do escoamento para o estado permanente:

1 Prof. Dep. Matematica -CCT- UFSCar,Cx. Postal 676,13560 - São Carlos-SP.
2 Prof. Dep. Hid. e Saneamento - EESC - USP, Cx. Postal 668,13560 - São Carlos-SP.

$$L(h) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T \frac{\partial h}{\partial y}\right) + N = 0 \qquad (1)$$

com as condições de contorno

$$T \frac{\partial h}{\partial x} = q_b \ (c) \qquad \text{(fluxo na fronteira)} \qquad (2)$$

$$h = h_b \ (c) \qquad \text{(carga na fronteira)} \qquad (3)$$

onde

T - é a transmissividade, parâmetro do aquífero, que será considerada constante em cada elemento

N - é a recarga localizada em nós do domínio

DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

Discretizaremos o domínio R usando elementos triangulares como mostra a figura 1

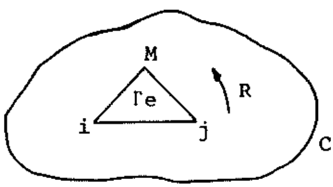


figura 1

Temos então:

$$R = \sum_{k=1}^{K} \Gamma e_k$$

onde

K - é o número de elementos do domínio.

Isto nos leva a procurar uma solução aproximada da forma

$$\bar{h}(x,y) = \sum_{\ell=1}^{L} \bar{h}_l \ I_l \ (x,y) \qquad (4)$$

onde

L - é o número de nós do domínio discretizado

$l_l(x,y)$ são funções de interpolação, linearmente independentes no domínio R e contínuas por partes, que só tem sentido no elemento e são escritos, genericamente, da seguinte forma:

$$l^e_l(x,y) = a_l + b_l x + c_l y \; ; \; x,y \in r^e \quad ; \; l = i,j,m \qquad (5)$$

sendo os a_l, b_l, c_l coeficientes a serem determinados, à partir da solução de um sistema de equações li equações lineares de

Especificamente, para o nó i, temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i \\ b_j \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução e´ dada por:

$$a_i = \frac{1}{2A^e} [\, x_j * y_m - x_m * y_j \,]$$

$$b_i = \frac{1}{2A^e} [\, y_j - y_m \,]$$

$$c_i = \frac{1}{2A^e} [\, x_m - x_j \,]$$

onde A^e é a área do elemento triangular, dada em termos das coordenadas por:

$$A^e = 0.5*(\, (x_i * y_j - x_j * y_i \,) + (x_m * y_i - x_i * y_m \,) + (x_j * y_m - x_m * y_j) \,)$$

Sabemos que o resíduo R_e é dado por:

$$R_e = L(\bar{h}) - L(h) \ .$$

Através da seleção de $\bar{h}$, desejamos que:

$$\int_R L(\bar{h}) \ l_l(x,y) \ dxdy = 0$$

$$l = 1,\ldots L$$

Então, da equação (1), temos

$$\int_R R_e \ l_l \ dc = \int_R \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}\right) + N \right) l_l \ dR = 0$$

Integrando por partes, usando o Teorema de Green e lembrando que

$$h = \sum_{s=1}^{S} \bar{h}_s \ l_s \ (x,y) \qquad , \text{ temos}$$

$$\sum_{s=1}^{S} \int_R \left(T \frac{\partial l_l}{\partial x} * \frac{\partial l_s}{\partial x} + T \frac{\partial l_l}{\partial y} * \frac{\partial l_s}{\partial y} \right) \bar{h} \ dR - \int_R N \ l_l \ dR -$$

$$- \int_C \left(T \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} n_x + T \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} n_y \right) l_l \quad dc = 0 \qquad (6)$$

que é a equação do nó l.

A equação anterior, sugere o sequinte sistema de equações lineares:

$$[\ A\ ]\ (\ \bar{h}\ ) = (\ f\ )$$

onde um elemento genérico $A_{i,j}$ de [A] é dado por

$$A_{i,j} = \int_R \left(T \frac{\partial l_i}{\partial x} * \frac{\partial l_j}{\partial x} + T \frac{\partial l_i}{\partial y} * \frac{\partial l_j}{\partial y} \right) dR$$

e uma componente genérica f_i do vetor (f) é dada por

$$f_i = \int_R N\, l_i\, dR + \int_C \left(T \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} n_x + T \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} n_y \right) l_i\, dc$$

CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL [A]

Para cada elemento Γ_e ,temos a seguinte matriz de rigidez local:

$$A^e_{i,j} = \int_{\Gamma e} \left(T^e \frac{\partial l^e_i}{\partial x} * \frac{\partial l^e_j}{\partial x} + T^e \frac{\partial l^e_i}{\partial y} * \frac{\partial l^e_j}{\partial y}\right) dxdy \quad (7)$$

$$i,j = 1,2,3$$

onde:

$$l^e_i\ (x,y) = \frac{1}{2A^e} \left((x_j * x_m - x_m * y_j) + \right.$$

$$\left. + (y_j - y_m) * x + (x_m - x_j) * y \right)$$

Levando-se em conta a equação (5), a expressão (7),calculando as derivads, pode ser escrita como:

$$A^e_{i,j} = A^e * T^e (b_i * b_j - c_i * c_j) \qquad i,j = 1,2,3$$

A matriz de Rigidez Global é construida à partir da soma das matrizes elementares,isto e´:

$$[A] = \sum_{s=1}^{L} \int_R \left(T \frac{\partial l_l}{\partial x} * \frac{\partial l_s}{\partial x} + T \frac{\partial l_l}{\partial y} * \frac{\partial l_s}{\partial y} \right) dR \qquad l = 1,2,\ldots L$$

CONSTRUÇÃO DO VETOR CARGA (f)

Termo de Recarga

A integral:

$$T_r = \int_R N \, I_l \, dR \,, \qquad (8)$$

representa o termo de recarga, que e' devido à fontes ou sumidouros distribuidos pelo domínio ou localizados em nós específicos, isto e'

$$N(x,y) = - \sum_k Q_k \; \delta\,(x - x_k ,\; y - y_k)$$

onde Q_k e' a alimentação ou extração do aquífero, δ e' a "função" Delta de Dirac e (x_k, y_k) são as coordenadas do domínio onde estão localizados as fontes ou sumidouros.

Assim, a integral (8) torna-se:

$$T_r = \int_R Q_l \; \delta\,(x - x_l ,\; y - y_l)\; I_i \;(x,y)\; dR = Q_l$$

para uma fonte ou sumidouro localizada no nó l.

Termo de Contorno

Da equação (6), temos que o termo de contorno pode ser escrito:

$$Tc = \int_C T \frac{\partial \bar{h}}{\partial n} I_l \; dc$$

Levando-se em conta as condições de contorno dadas pela equação (2) temos:

$$Tc = - q^e{}_c \int_0^L I_l \; dc^e$$

Portanto, para elementos que não tenham aresta no contorno temos que Tc = 0.

Ao longo do contorno, $I^e_l(x,y)$ e´ representada por uma funcão uni-dimensional $I^e_l(c)$, isto e´:

$I^e_i(c) = 1$ para o nó i e varia linearmente para zero ate´ o no´ j. O mesmo ocorre com $I^e_j(c)$, como mostra a figura 2.

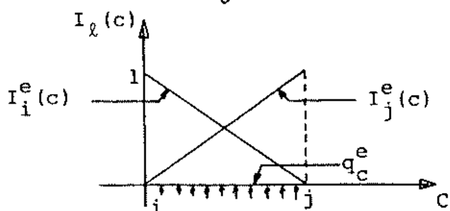


figura 2

Assim o vetor carga e´ escrito da seguinte maneira:

$$\{ f \} = \{ Q \} + \int_C \{ q_c \} \, dc$$

CONSTRUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

Finalmente, podemos construir o sistema de equacões lineares:

$$[A] \{ \bar{h} \} = \{ Q \} + \int_C \{ q \} \, dc$$

cuja solucão foi obtida, utilizando-se o método de Eliminacão de Gauss, e que nos fornece o comportamento aproximado do escoamento no domínio.

ALGORITMO COMPUTACIONAL

O algorítmo computacional foi desenvolvido de modo a facilitar e tornar o programa estruturado e comunicativo com o usuário . Foi implementado em microcomputador do tipo PCxt. É basicamente constituido dos seguites passos principais:

Definição da Geometria do Domínio do Escoamento

- numeração dos nós e dos elementos
- numeração global dos elementos
- coordenadas dos nós

Construção das matrizes locais

- cálculo da área dos elementos
- cálculo das integrais
- construção dos elementos das matrizes locais

Construção da matriz global

- soma das contribuições locais

Construção do Vetor Carga

- entrada das fontes ou sumidouros
- entrada dos elementos de contorno
- entrada do fluxo e da carga no contorno

Construção do Sistema Reduzido

- matriz reduzida
- vetor carga reduzido

Solução do Sistema de Equações Lineares

- método de Eliminação de Gauss

APLICAÇÃO DO MODELO DESENVOLVIDO

Atualmente, o algoritmo foi testado para domínios regulares de dimensões simplificada, onde consideremos para sua discretização elementos triangulares, com um procedimento adequado na numeração dos nós o que permite a otimização do sistema de equações lineares gerado.

Nas simulações desenvolvidas, foram levado em conta a existência de poços de bombeamento localizados, em nós do domínio. Os resultados obtidos para o comportamento do escoamento foram os esperados para uma região particular como a considerada.

Na proxima fase do trabalho, que é a ampliação das dimensões do domínio, para a situação de uma bacia com geometria mais proxima da real, a experiência, se bem sucedida, será de utilidade para o gerenciamento de uma bacia subterrânea.

BIBLIOGRAFIA

[1] Theodore, V.H. , Timoty, J.D. and Johannes,J.D.- Computer Methods in Water Resources - Lighthouse Publications-1985.

[2] Becker, E.B. , Carey, G.F. and Oden, J.T.- Finite Elements- An Introduction - Prentice Hall- 1981.

[3] Davies, A.J. - The Finite Element Method- A Frist Approach - Clarendon Press- 1980.

[4] Carey, G.F. and Oden, J.T. - Finite Elements - Computational Aspects- Prentice Hall- 1984.