Relatório Técnico

RT-MAC-8910

MÉTODO DE DESIGNAÇÃO DE FLUXOS E CAPACIDADES: VERSÃO FINITA

Carlos Humes Jr.

Dezembro 1989

MÉTODO DE DESIGNAÇÃO DE FLUXOS E CAPACIDADES: VERSÃO FINITA

Carlos Humes Jr.

Depto de Ciência de Computação

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo

1. Introdução.

A formulação tradicional do problema de projeto de redes de computadores considera que é dado o conjunto N de localizações dos nós comutadores de mensagens, a demanda média de transmissão de mensagens e suas características para cada par (origem, destino). De posse destes dados, busca-se determinar tanto o roteamento das mensagens (qual o caminho que seguem ou, equivalentemente, quais os fluxos de mensagens nos vários canais), quanto a capacidade de transmissão (velocidade) de cada um dos canais a serem instalados. Nesta formulação, pode-se considerar que o conjunto de possíveis interconexões é variável de projeto (projeto topológico) ou que é dado (o que é a tônica desta apresentação, ou seja, o problema de designação de fluxos e capacidades).

Para avaliar o projeto temos que definir critérios, critérios estes que caracterizam os pontos focais da abordagem. Evitando maiores discussões que podem ser encontradas em Gerla [1] e Humes [2], consideremos o implícito problema bicritério onde as funções objetivo são custo e tempo médio de encaminhamento de mensagem entre origem e destino. Estes critérios serão modelados por funções

$D(c) =$ custo dos m canais instalados com capacidades c_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, e

$T(f, c) =$ retardo com roteamento associado a um fluxo de mensagens $f = (f_1, \ldots, f_m)^t$ e capacidades instaladas $(c_1, c_2, \ldots, c_m)^t$.

A notação acima pressupõe que existam m canais possíveis de interconexão, correspondendo a um projeto topológico dado. O projeto topológico corresponde a definirmos o esquema de interconexão entre os nós comutadores de mensagens. Esta definição é naturalmente modelada através de um grafo $G \equiv (N, \hat{A})$, onde $\hat{A}$, conjunto dos arcos do grafo G, representa a existência de canais de comunicação entre os nós (comutadores).

Como $\hat{A}$ é finito, não há perda de generalidade em utilizarmos $\hat{A} = \{1, 2, \ldots, m\}$ caracterizando os extremos das arestas por

$\hat{a} : \hat{A} \mapsto \{\{i,j\} \subset 2^N \mid i > j\} \equiv Q$

Note-se que a definição acima (Q), implica em não considerarmos canais cuja origem e destino coincidam (hipótese esta bastante natural). Na mesma linha, suporemos $\hat{a}(\cdot)$ injetora (canais em paralelo são tratados como canal de maior capacidade).

Na medida em que considerarmos os canais "full-duplex" e formos estudar fluxos, é conveniente considerar o digrafo associado à interconexão. Digrafo este cujas arestas orientadas são dadas por:

$a : \hat{A} \mapsto \{(i,j) \in N \times N\}$

caracterizadas por

$a(i) = \{(k,l), (l,k)\} \Leftrightarrow \hat{a}(i) = \{k, l\}$

O conjunto de arestas do digrafo será indicado por A, onde

$A = \cup_{i \in \hat{A}} a(i) = a(\hat{A})$.

Considerando como dados:

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ = conjunto de localizações de nós comutadores de mensagens, isto é, pontos onde um ou mais dos canais de comunicação tem extremos,

$q : N \times N \mapsto R_+$ = demanda média de transmissão entre os nós comutadores de mensagem. Tipicamente esta demanda é medida em kilobits/seg,*1

$\hat{q} : N \times N \mapsto R_+$ = demanda média de envio de mensagens entre os nós comutadores. Tipicamente, esta demanda é medida em milhares de mensagens/seg,*1

$\hat{l} : N \times N \mapsto R_{++}$ = comprimento médio das mensagens entre os nós comutadores.*1

Podemos então definir o problema de projeto de redes de computadores como:

"Dados N e $q : N \times N \mapsto R_+$, encontre, se existir, a região de pontos eficientes (ou um subconjunto desta região) em relação ao critério $(T(f,c), D(c))^t$, obedecendo às restrições

(R1) $f^{rs} \in F^{rs} = \{\overline{f} \in R_+^{2m} \mid \sum_{l:(k,l)\in A} \overline{f}_{kl} - \sum_{l:(l,k)\in A} \overline{f}_{lk} = (\delta_{kr} - \delta_{ks}) q_{rs}\}$ para $(r,s) \in N \times N$ (com $q_{rs} > 0$),*2

(R2) $f_{ij} = \sum_{(r,s)\in N\times N} f_{ij}^{rs}$, para $(i,j) \in A$;

(R3) $f_i = f_{kl} + f_{lk}$, para $\hat{a}(i) = \{k,l\}$;

(R4) $\forall i \in \hat{A}, (f_i, c_i) \in Y_i = \{(0,0\} \cup \{(x,y) \in R \times C_i \mid 0 \le x < y\}$, onde C_i é dado;

(R5) $\hat{A}$ é um conjunto de arcos com extremos em N, gozando, conforme a formulação, de uma propriedade P."

As restrições (R1) e (R2) correspondem a modelar um fluxo multicomodidade ("multicommodity flow") onde cada tipo de comodidade (unidade de transmissão) é caracterizada por sua origem e destino.

A restrição (R3) corresponde a uma modelagem clássica para canais "full-duplex", onde o sentido em que a unidade de transmissão percorre o canal não é determinante de seu efeito no fluxo.

Em alguns pontos, será conveniente notar que estamos trabalhando com vetores $\hat{f} \in R_+^{2m}$, tais que $\hat{f} \in \sum_{(r,s)\in N\times N} F^{rs}$ e com vetores $f \in R^m$, onde $f_i = \hat{f}_{kl} + \hat{f}_{lk}$ para $a(i) = \{k,l\}$. Porém, nos reservamos o direito de, a menos de necessidade para a clareza do texto, usar a expressão "$f = (f_1 f_2 \dots f_m)^t$ é a soma de fluxos multicomodidade".

*1 Por simplicidade de notação usaremos: $q_{ij} = q((i,j))$, $q = \sum_{i\in N} \sum_{j\in N} q_{ij}$, $\hat{q}_{ij} = \hat{q}((i,j))$, $\hat{q} = \sum_{i\in N} \sum_{j\in N} \hat{q}_{ij}$, $\hat{l}_{ij} = \hat{l}((i,j))$. Mais ainda, faremos as seguintes hipóteses simplificadoras: $\hat{l}_{i,j} = \frac{1}{\mu}$ (homogeneidade no tamanho de mensagens); $q_{ij} = \frac{1}{\mu}\hat{q}_{ij}$ (independência de processos); $q_{jj} = 0$, $\hat{q}_{jj} = 0$, para $j \in$ N.

*2 Caso contrário, $f_{ij}^{rs} = 0$, para todos os arcos $(i,j) \in A$.

Note-se que nas condições acima não há perda de generalidade em assumir que:

$$\{r \leq s \Rightarrow q_{rs} = 0\} \Leftrightarrow F^{rs} = \{0 \in R^{2m}\}$$

Mais ainda, deve ser claro que em qualquer solução eficiente

$$\forall (k,l) \in A, \quad \forall (r,s) \in N \times N, \quad f_{kl}^{rs} \cdot f_{lk}^{rs} = 0$$

A restrição (R4) indica que o canal inativo $(f_i = 0)$ pode não existir fisicamente $(c_i = 0)$ e que, exceto neste caso, o grau de congestionamento (f_i/c_i) é bem definido e pertence ao intervalo $[0,1)$.

A questão de canais inativos poderem não existir fisicamente é complexa ao considerarmos que na restrição (R5) poderíamos impor condições tais como biconexidade sobre o grafo $(N, \hat{A})$. Uma possível solução para tal questão seria impor restrições do tipo $f_i \geq \overline{f}_i$ ou $c_i \geq \overline{c}_i$ para $i \in \hat{A}$. O segundo tipo de restrições pode fazer sentido no caso $C_i = \{0, c_{1i}, c_{2i}, \ldots, c_{pi}\}$.

Para evitar maiores problemas, consideremos $\hat{A}$ como dado e seguindo a abordagem usual para problemas bicritério (ver, p.ex., Lin [3] e [4]), consideremos os problemas abaixo:

$$PD(T_{MAX}) \begin{cases} \text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^{m} d_i(c_i) \\ \sum_{i=1}^{m} t_i(f_i, c_i) \leq \hat{q} T_{MAX} \\ (f_i, c_i) \in Y_i \\ f \in F \end{cases} .$$

$$PT(D_{MAX}) \begin{cases} \text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^{m} t_i(f_i, c_i) \\ \sum_{i=1}^{m} d_i(c_i) \leq D_{MAX} \\ (f_i, c_i) \in Y_i \\ f \in F \end{cases} .$$

onde F é o poliedro das somas de fluxos multicomodidades descritas pelas restrições (R1) a (R3) acima e estamos considerando $\hat{A} = \{1, 2, \ldots, m\}$ dado. Claramente, supomos $F \not\equiv \emptyset$. Estes problemas são denominados *problemas de designação de fluxo e capacidade* (CFA - Capacity and Flow Assignment).

Neste trabalho, nos concentraremos no caso $C_i = [0, +\infty)$, chamado de *relaxação contínua* ou *caso contínuo*.

Por simplicidade, nós consideramos acima que o custo da rede é somente o custo dos canais. Utilizando a notação $D(\cdot)$ para o custo total e $d_i(\cdot)$ para o custo dos canais individuais, é claro que

$$D(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} d_i(\cdot).$$

Os custos individuais dos canais são definidos nos valores possíveis de capacidades $d_i : C_i \mapsto R_+$, mas, não há perda de generalidade em supor:

$$\forall i \in \hat{A}, \; d_i : R_+ \mapsto R_+.$$

Em termos simplistas, a hipótese acima conflita com, por exemplo, $\#C_i = p \in N$. Neste caso, existiria uma infinidade de funções custo $d_i : R_+ \mapsto R_+$ que retratariam a estrutura de custos restrita ás capacidades disponíveis.

Mas, é natural supor que as funções $d_i(\cdot)$ procurem representar fenômenos econômicos e que desta forma sejam gerados seus valores. Assim sendo, suporemos ao longo deste trabalho:

(H1) $d_i(0) = 0$ (capacidade nula $\Leftrightarrow$ canal não instalado $\Leftrightarrow$ custo nulo);

(H2) $\lim_{x \to \infty} d_i(x) = +\infty$ (não há limite superior para os custos a menos que as capacidades sejam limitadas);

(H3) $x > y \geq 0 \Rightarrow d_i(x) > d_i(y) \geq 0$ (custos monotonicamente crescentes);

(H4) $d_i(\cdot)$ é C^∞ em $(0, +\infty)$ (com continuidade simples na fronteira);

Além destas hipóteses usaremos freqüentemente:

(H5) $d_i(\cdot)$ é côncava ou (H5A) $d_i(\cdot)$ é estritamente côncava;

(H6) $d_i(\cdot)$ é côncava na origem ou (H6A) $d_i(\cdot)$ é estritamente côncava na origem.

A não obrigatoriedade das hipóteses de concavidade está associada ao nosso interesse em obter resultados teóricos sem estas hipóteses. A hipótese que corresponde a uma tecnicalidade é a hipótese (H4). Defendemos fortemente a validade desta hipótese, no caso geral, pois acreditamos que os modelos de geração de preços pelos serviços de comunicação utilizem funções para as quais (H4) vale.

No caso brasileiro, temos

$d_i(c) = l_i c^\alpha$, onde

(i) $\alpha \in (0,1)$, i.e., $\alpha \approx 0.56$

(ii) l_i depende da distância em quilômetros entre os extremos do canal de comunicação.

É interessante notar que este resultado foi obtido inicialmente por análise de tabelas da EMBRATEL e confirmada posteriormente em contatos com profissionais desta organização.

Em relação ao retardo, consideramos válida a hipótese de existência de uma forma produto para as probabilidades de mensagens nos "buffers" dos nós chaveadores de mensagens, ou seja, (p.ex., ver Kleinrock [5]):

$$T(f,c) = \frac{1}{\bar{q}} \sum_{i=1}^{m} t_i(f_i, c_i) = T$$

No caso particular de retardo médio em redes de filas $M/M/1$ teremos

$$T = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\bar{q}} T_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\bar{q}} \frac{\lambda_i}{\mu} \frac{1}{c_i - f_i} = \frac{1}{\bar{q}} \sum_{i=1}^{m} \frac{f_i}{c_i - f_i}$$

Isto é, para retardo médio em redes de filas $M/M/1$, teremos

$$t_i(f_i, c_i) = \frac{f_i}{c_i - f_i}$$

As funções $t_i(\cdot,\cdot)$ não apresentam um caráter qualquer por representarem parcelas do fenômeno físico de retardo. Assim sendo, ao longo do trabalho suporemos que algumas hipóteses são a elas aplicáveis. Estas hipóteses, para $i = 1, 2, \ldots, m$, são:

(H7) *3 $t_i : Y \mapsto R_+$, onde $Y = \{(0,0)\} \cup Y_0$ e $Y_0 = \{(f,c) \mid 0 \leq f < c\}$, $t_i(0,\cdot) = 0$.

(H8) $t_i : Y_0 \mapsto R_+$ é C^∞ (com os devidos cuidados na fronteira);

(H9) $\forall M > 0$, $t_i(f,c) = t_i(Mf, Mc)$;

(H10) $\forall \bar{c} > 0$, $t_i(\cdot,\bar{c}) : Y \cap \{(a,\bar{c}) \mid a \in R\} \mapsto R_+$ é

(a) estritamente convexa,

(b) monotonicamente crescente (no sentido estrito),

(c) $lim_{f \to \bar{c}_-} t_i(f,\bar{c}) = +\infty$;

(H11) $\forall \bar{f} > 0$, $t_i(\bar{f},\cdot) : Y \cap \{(\bar{f},a) \mid a \in R\} \mapsto R_{++}$ é

(a) estritamente convexa,

(b) monotonicamente decrescente (no sentido estrito),

(c) $lim_{c \mapsto \bar{f}_+} t_i(\bar{f},c) = +\infty$.

A hipótese (H7) especifica que o grau de congestionamento deve ser menor do que a unidade e que canais não ativos $(f_i = 0)$ não contribuem para nossa medida de retardo (mais ainda, neste caso, a melhor opção é a não instalação do canal, isto é, $c_i = 0$).

A hipótese (H8) é meramente técnica e refletida nos modelos de filas usuais. A hipótese (H9) de homogeneidade de grau zero está intrinsecamente ligada à idéia de que os $t_i(\cdot,\cdot)$ são adimensionais retratando a parcela do canal i na composição de $\hat{q}T$ e, portanto, não podem ser influenciados por "mudanças de escala" na aferição de c_i e f_i.

As hipóteses (H10) e (H11) representam o comportamento natural de sistemas com congestão.

Uma observação relevante é que deve ser notado que a homogeneidade de grau zero implica em descontinuidade em (0,0). Existem imprecisões na literatura devido à ausência deste cuidado.

---

*3 As hipóteses H1 a H6 dizem respeito à estrutura de custos.

II. Resultados preliminares.

Para os problemas acima definidos, valem os seguintes resultados, para a relaxação contínua:

Fato II.1. $PD(T_{MAX})$ é viável qualquer que seja $T_{MAX} > 0$ e $PT(D_{MAX})$ é viável qualquer que seja $D > D^0$ onde $D^0 = \inf\{\sum_{i=1}^{m} d_i(f_i) \mid f \in F\} > 0$.

Demonstração: trivial a partir das hipóteses (H1) a (H4) e (H7), (H8), (H10) e (H11), notando que $D^0 = \min\{\sum_{i=1}^{m} d_i(f_i) \mid f \in F\}$.

O mínimo acima indicado é bem definido, pois F é um poliedro na forma canônica $F \equiv \{[V(F)] + C_F\}$ e como $d(\cdot)$ é monotônica estritamente crescente,

$$\begin{aligned} D^0 &= \inf\{\sum_{i=1}^{m} d_i(f_i) \mid f \in F\} = \\ &= \inf\{\sum_{i=1}^{m} d_i(f_i) \mid f \in [V(F)]\} = \\ &= \min\{\sum_{i=1}^{m} d_i(f_i) \mid f \in [V(F)]\}. \end{aligned}$$ ■

Para o caso contínuo podemos ainda afirmar:

Fato II.2. Para todo $T_{MAX} > 0$ e $D_{MAX} > D_0$, os problemas $PT(D_{MAX})$ e $PD(T_{MAX})$ têm solução ótima.

Demonstração: Apresentaremos a prova em duas partes distintas:

(i) $T_{MAX} > 0 \Rightarrow PD(T_{MAX})$ tem solução ótima.

Antes de mais nada, notemos que a restrição $0 < f_i < c_i$ pode ser substituída por $f_i \leq \overline{\rho}_i c_i$ onde $\overline{\rho}_i$ é definido por $t_i(\overline{\rho}_i, 1) = T_{MAX}$. Claramente, $\overline{\rho}_i \in [0, 1)$.

Tal fato é possível pois para $c_i > 0$, por (H9)

$$t_i(f_i, c_i) = t_i(f_i/c_i, 1).$$

Mais ainda, usando (H7), (H8) e (H10), $t_i(\cdot,1)$ é estritamente crescente contínua e com $\lim_{\rho_i\to 1} t_i(\rho_i,1) = +\infty$.

Portanto, a restrição $(f_i,c_i) \in Y_i$ pode ser substituída por

$$(f_i,c_i) \in \{(a,b) \in R_+^2 \mid a \leq \overline{\rho}_i\ b\}.$$

Mais ainda, se $(\overline{f},\overline{c})$ é um ponto viável de $PD(T_{MAX})$ podemos, sem perda de generalidade, impor a hipótese adicional $c_i \leq c_i^+$ onde c_i^+ é definido por $d_i(c_i^+) = \sum_{j=1}^m d_j(\overline{c}_j)$.

A existência de c_i^+ é garantida por (H1) a (H4).

Assim sendo, $PD(T_{MAX})$ pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \text{minimizar} \quad \displaystyle\sum_{i=1}^m d_i(c_i) \\ (f_i,c_i) \in K_i = \{(a,b)\} \mid 0 \leq a \leq b\overline{\rho}_i \leq c_i^+\} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^m t_i(f_i,c_i) \leq \hat{q}\ T_{MAX} \\ f \in F \end{cases}$$

Claramente K_i é compacto e portanto o conjunto de pontos viáveis está contido no compacto $K \equiv K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_m$.

Mais ainda, por (H8) $t_i(\cdot,\cdot)$ é contínua em todos os pontos de K_i, exceto (0,0). Mas, neste ponto, qualquer que seja a seqüência $\{(f_i^k,c_i^k)\}_{k\in N}$, $(f_i^k,c_i^k) \in K_i$, convergindo para (0,0), temos

$$t_i(f_i^k,c_i^k) \geq 0 = t_i(0,0),$$

portanto, $t_i(\cdot,\cdot)$ é semicontínua inferior em K_i.

Podemos então, afirmar que $\sum_{i=1}^m t_i(\cdot,\cdot)$ é semicontínua inferior em K e, portanto, $\{(f,c) \in K \mid \sum_{i=1}^m t_i(f_i,c_i) \leq \hat{q}\ T_{MAX}\}$ é fechado em K e, portanto é compacto.

Como F é fechado e $\sum_{i=1}^m d_i(\cdot)$ é contínua (H4), segue que estamos minimizando uma função contínua em um compacto não vazio (o ponto $(\overline{f},\overline{c})$ viável, utilizado via axioma da escolha pertence ao compacto construído). Portanto, existe solução ótima do problema. ■

(ii) $D_{MAX} > D_0 \Rightarrow PT(D_{MAX})$ tem solução ótima.

A argumentação é similar à apresentada acima, sendo que a restrição de custo impõe o limite superior nas capacidades, um ponto viável gera um retardo utilizado para definir os $\overline{\rho}_i$, $i = 1, \ldots, m$, e a compacidade dos pontos viáveis segue da continuidade das restrições de custo e de fluxo (lineares).

Como o retardo é limitado inferiormente $(t_i(\cdot,\cdot) \geq 0)$ e semicontínuo inferior, com a compacidade obtida segue a existência de mínimo. ■

A importância deste resultado fica clara ao enunciarmos o seguinte fato, para o caso contínuo:

Fato II.3. Para todo $T > 0$, o ponto $(T, D^*(T))$, onde

$$D^*(T) = \text{valor ótimo de } PD(T)$$

é um projeto eficiente.

Antes de demonstrar este fato, provemos o seguinte lema válido para o caso contínuo:

Lema II.4. Para todo $T > 0$, se (f^*, c^*) é solução ótima de $PD(T)$, então $T(f^*, c^*) = T$.

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que $T(f^*, c^*) < T$. Então podemos diminuir c_1^* $(c_1^* > 0$, sem perda de generalidade) para $\overline{c}_1 = c_1^* - \Delta_1$, de modo que

$$t_1(\overline{c}_1, f_1^*) = t_1(c_1^*, f_1^*) + T - T(f^*, c^*), \quad (f_1^* > 0),$$

Isto é possível por (H11) e (H8).

Então por (H3) obtemos um ponto viável com custo inferior ao da solução ótima. O que é uma contradição. ■

Com este lema em mente, segue a demonstração de (II.3):

Demonstração de II.3: Suponhamos, por contradição, que $(T, D^*(T))$ não é eficiente, isto é, é possível encontrar um vetor $(\overline{f}, \overline{c})$ tal que $(T(\overline{f}, \overline{c}),\ D(\overline{c})) \leq (T, D^*(T))$.

Se $T(\overline{f}, \overline{c}) < T$ então $(\overline{f}, \overline{c})$ é viável em $PD(T)$ e $D(\overline{c}) = D^*(T)$. Portanto $(\overline{f}, \overline{c})$ solve $PD(T)$ e por (II.3.10) $T(\overline{f}, \overline{c}) = T$, o que é uma contradição.

Se $T(\overline{f}, \overline{c}) = T$, então $D(\overline{c}) < D^*(T)$, o que negaria a definição de $D^*(T)$. ■

Analogamente, podemos enunciar:

Fato II.5. Para todo $D > D_0$, o ponto $(T^*(D), D)$, onde

$$T^*(D) = \text{valor ótimo de } PT(D)$$

é um projeto eficiente.

Lema II.6. Para todo $D > D_0$, se (f^*, c^*) é solução ótima de $PT(D)$, então $D(c^*) = \sum_{i=1}^{m} d_i(c_i^*) = D$.

As demonstrações são omitidas por serem variações simples das provas anteriores.

Estes resultados iniciais correspondem a um aproveitamento parcial da peculiar estrutura matemática do problema em estudo. Sob o ponto de vista de Programação Matemática de Grande Porte, devemos ainda destacar as estruturas de separabilidade, monotonicidade e convexidade parciais.

As funções custo e retardo são somas de parcelas atribuíveis a cada canal específico. As funções custo por canal são monotonicamente crescentes e, usualmente, côncavas. Os retardos por canal são funções que com um argumento fixo são estritamente convexas e estritamente monotônicas. Mais ainda, se pudéssemos desprezar a restrição de retardo, teríamos dois grupos de variáveis com completa independência. Neste caso, a aproximação contínua teria valor ótimo obviamente igual a $(\sum_{i=1}^{m} d_i(f_i))$, caso o problema fosse viável. Em relação ao retardo, existe a estrutura adicional de que $t_i(\cdot,\cdot)$ é função homogênea de grau zero.

Este conjunto de considerações despertaram o nosso interesse e, em particular, induziram-nos a aceitar a abordagem usual da literatura: *projeção*. Note-se que a projeção natural corresponde a trabalhar alternadamente nos subespaços de fluxos e de capacidades, resolvendo alternadamente problemas projetados que são denominados problema de designação de capacidades (CA) (fluxo fixo) e problema de designação de fluxo (FA) (capacidades fixas). Mais precisamente:

O problema de designação de capacidades (CA) é aquele obtido através da particularização do problema de designação de fluxos e capacidades ao prefixarmos um fluxo multicomodidade. Isto é, (CA) é obtido a partir de $PD(T_{MAX})$ ou $PT(D_{MAX})$, impondo $F \equiv \{\overline{f}\}$.

Nestas condições, obtemos os problemas $CD(T_{MAX})$ e $CT(D_{MAX})$ definidos por

$$CD(T_{MAX}) = \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} d_i(c_i) \\ \sum_{i=1}^{m} t_i(\overline{f}_i, c_i) \leq \hat{q}\; T_{MAX} \\ c_i \in C_i \text{ e } c_i > \overline{f}_i \;\; i = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

$$CT(D_{MAX}) = \begin{cases} \min \sum_{i=1}^{m} t_i(\overline{f}_i, c_i) \\ \sum_{i=1}^{m} d_i(c_i) \leq D_{MAX} \\ c_i \in C_i \text{ e } c_i > \overline{f}_i \;\; i = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

Note-se que estamos assumindo, sem perda de generalidade, $\overline{f} > 0$.

O problema de designação de fluxos (FA) é aquele obtido através da particularização do problema de designação de fluxos e capacidades ao prefixarmos as capacidades instaladas. Isto é, (FA) é obtido a partir de $PT(D)$ impondo $C_i = \{\overline{c}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ e $D(c) = \sum_{i=1}^{m} d_i(\overline{c}_i)$.

Assim sendo, o problema (FA), para $c = \overline{c}$, é definido por

$$
(FA) \begin{cases} \min \sum\limits_{i=1}^{m} t_i(f_i, \overline{c}_i) \\ f \in F \\ \overline{c}_i > f_i, \text{ para } i \in I(\overline{c}) = \{i / \overline{c}_i > 0\} \\ f_i = 0, \text{ para } \overline{c}_i = 0 \end{cases}
$$

onde F é o poliedro de fluxos multicomodidade descrito pelas restrições (R1) a (R3) do problema de projeto de redes.

Recordando o já exposto:

(R1) $f^{rs} \in F^{rs} = \{\overline{f} \in R_+^{2m} \mid \sum_{l:(k,l)\in A} \overline{f}_{kl} - \sum_{l:(l,k)\in A} \overline{f}_{lk} = (\delta_{kr} - \delta_{ks}) q_{rs}\}$,

(R2) $f_{ij} = \sum_{(r,s)\in N\times N} f_{ij}^{rs}$, para $(i,j) \in A$,

(R3) $f_i = f_{kl} + f_{lk}$, para $\hat{a}(i) = \{k, l\}$.

Note-se que não há perda de generalidade em assumir $I(\overline{c}) = \{1, 2, \ldots, m\}$.

O problema de designação de fluxos é um problema não linear convexo de fluxos multicomodidade. Apesar de dificuldades naturais associadas a porte, este problema é bem comportado no sentido de que para ele teoremas fortes de dualidade (tanto minimax como Wolfe) são válidos. Mais ainda, todo mínimo local é global.

O problema de designação de capacidades tem duas versões: contínua e discreta. No caso discreto, é um problema de mochila não linear. No caso contínuo, o (CA) aparenta ter a dificuldade de apresentar mínimos locais que não são globais (devido à concavidade de $d_i(\cdot)$), exceto no caso simples de custos lineares. Tais dificuldades são aparentes e em Humes [2] elas são eliminadas com a introdução de uma **hipótese adicional (HA)**.

Definição II.7. Dizemos que vale a hipótese adicional para a estrutura de custos e retardos. **(HA)** para o problema de projeto, se

$$\forall i = 1, 2, \ldots, m, \quad \forall \overline{f}_i > 0, \quad \forall \overline{c}_i > \overline{f}_i,$$

$$\left[\left(\frac{d^2}{dc_i^2} d_i(c_i)\right)\left(\frac{d}{dc_i} t_i(\overline{f}_i, c_i)\right) - \left(\frac{d^2}{dc_i^2} t_i(\overline{f}_i, c_i)\right)\left(\frac{d}{dc_i} d_i(c_i)\right)\right]\Big|_{c_i = \overline{c}_i} < 0$$

ou, mais sumariamente,

$$d''(\overline{c}_i) t_i'(\overline{c}_i) - t_i''(\overline{c}_i) d_i'(\overline{c}_i) < 0. \qquad \blacksquare$$

Note-se que se o custo for linear, a convexidade estrita do retardo e a monotonicidade crescente do custo implicam na validade da hipótese adicional.

É interessante notar que para o caso mais estudado na literatura, que é o de filas $M/M/1$ com custo dado por "power law", a hipótese adicional (HA) é válida.

Mas, um ponto que devemos ter em mente é que um ponto (f^*, c^*) tal que f^* resolve o (FA) com $C_i = \{c_i^*\}$ e c^* resolve o (CA) com $F = \{f^*\}$ não é necessariamente sequer um mínimo local, como é afirmado erroneamente na literatura.

III. Designação de fluxos e capacidades usando projeção.

No seu clássico artigo de 1970, Geoffrion [6] introduziu as idéias de *manipulação* e *estratégias*, para o tratamento de problemas de grande porte em programação matemática. Uma das manipulações destacadas é a chamada *projeção* (ver, p.ex., Humes [2]).

Tipicamente, dado o problema (PTP)

$$(PTP)\begin{cases} \min f(x, y) \\ \text{sujeito a } g(x, y) \le 0 \\ x \in X, \ y \in Y \end{cases}$$

a manipulação de projeção deste problema, sobre o espaço das variáveis y, como:

$$(PAP_y) = \begin{cases} \min \nu(y); \\ \text{sujeito a } y \in V, \end{cases}$$

onde:

$V = \{y \in Y \mid \exists x \in X : g(x,y) \leq 0\}$,

$\nu : V \mapsto R \cup \{-\infty\}$ é definida por

$\nu(\overline{y}) = \inf\{f(x,\overline{y}) \mid x \in X \;\text{ e }\; g(x,\overline{y}) \leq 0\}$.

A técnica de projeção é naturalmente aplicável ao problema de designação de fluxos e capacidades, desde que seja tomado o cuidado técnico do tratamento da restrição $c > f$.

Basicamente a idéia é que para $c = \overline{c}$ (ou $f = \overline{f}$) para o qual o problema seja viável, isto é, $\overline{c} \in V$ ($\overline{f} \in V$), existe um limitante superior do retardo e pode-se substituir $c > f$ por $\overline{c} \geq kf$ (ou $c \geq k\overline{f}$).

Os principais resultados necessários a uma fácil aplicação do método de projeção estão associados aos seguintes fatos:

Fato III.1. Os problemas $PD(T)$ e $PT(D)$, se viáveis, têm solução ótima tanto no caso $C_i = [0, +\infty)$ como no caso $C_i = \{0, c_{i1}, \ldots, c_{ip}\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Demonstração: No caso contínuo (III.1) é repetição de (II.2). No caso discreto, é óbvio pela finitude de capacidades disponíveis. ∎

Fato III.2. Se o ponto (f^*, c^*) é solução ótima de $PD(T)$ ($PT(D)$), então

(a) c^* é solução ótima de $CD(T)$ ($CT(D)$), com $f = f^*$;

(b) f^* é solução ótima de (FA), com $c = c^*$.

Demonstração: Óbvia. ∎

Os fatos acima indicam a existência de solução ótima para $PD(T)$ e $PT(D)$ e que, caso usemos projeção sobre as capacidades ou sobre os fluxos, o ínfimo presente na definição de $\nu(\cdot)$ é um mínimo.

A abordagem tradicional para a solução (ou tentativa de solução) do problema de designação de capacidades e fluxos é o método (CFA) que a partir de um fluxo viável f^0 gera a seqüência $\{(c^i, f^i)\}_{i \in N}$, definida por

c^i = solução ótima do (CA), com $f = f^{i-1}$;

f^i = solução ótima do (FA), com $c = c^i$.

Este método pode ser visto como um de *dupla projeção* e é o encontrado na literatura, como p.ex., Kleinrock [5] e Gerla [1].

A consideração pragmática de que o custo da solução do (CA) é de ordem de grandeza inferior ao da solução do (FA), nos leva a sugerir que utilizemos um método acoplando a estratégia de direções viáveis com a manipulação de projeções sobre o espaço das variáveis fluxo. Em termos imprecisos, a partir de um fluxo viável f^0, geraríamos uma seqüência $\{(c^i, f^i)\}_{i \in N}$, tal que

c^i = solução ótima do (CA), com $f = f^{i-1} \in F$

$f^i = (f^{i-1} + \lambda_i h^i) \in F$,

com a propriedade de melhora do critério para cada par (f^i, c^i). Isto é, para $PD(T)$, $D(c^{i+1}) < D(c^i)$ e para $PT(D)$, $T(f^{i+1}, c^{i+1}) < T(f^i, c^i)$.

Proporemos a seguir um método desta família e analisaremos seu comportamento para o caso contínuo. Por facilidade de expressão usaremos a expressão projeção para significar projeção sobre o espaço das variáveis fluxo.

Para podermos estudar esta abordagem, temos que analisar a existência de soluções ótimas e o comportamento do valor ótimo do problema de designação de capacidades, para vários valores de fluxo multicomodidade f.

Para tal indiquemos os seguintes fatos:

Fato III.3. Os problemas $CD(T_{MAX})$ e $CT(D_{MAX})$ **são viáveis para**

$$T_{MAX} > T_0 = \inf\{\sum_{i=1}^{m} t_i(\overline{f}_i, c_i) \mid c_i > \overline{f}_i \text{ e } c_i \in C_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

$$D_{MAX} > D_0 = \inf\{\sum_{i=1}^{m} d_i(c_i) \mid c_i > \overline{f}_i \text{ e } c_i \in C_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\},$$

sendo que para o caso discreto $T_{MAX} = T_0$ e $D_{MAX} = D_0$ também são condições de viabilidade. Para o caso contínuo $(C_i \equiv R_+)$, temos $T_0 = 0$ e $D_0 = \sum_{i=1}^{m} d_i(f_i)$.

Demonstração: Omitida por ser trivial no caso discreto, uma particularização de (II.1) no caso contínuo e uma simples constatação no caso geral. ■

Fato III.4. Se o problema $CD(T_{MAX})(CT(D_{MAX}))$ é viável, então possui solução ótima, tanto no caso discreto como no contínuo.

Demonstração: Omitida por ser trivial no caso discreto e uma simples particularização de (II.2) no caso contínuo. ■

Na realidade, o resultado (III.4) é válido para o caso geral onde C_i é fechado, o que pode ser demonstrado com pequena variação nos argumentos da demonstração de (II.2).

Entre os dois problemas $CD(\cdot)$ e $CT(\cdot)$ há fortes relações no sentido de que ambos são condições necessárias de otimalidade para $PD(\cdot)$ e $PT(\cdot)$, portanto ambos são condições necessárias para Pareto eficiência de projeto e valem os análogos triviais de (II.5) e (II.6).

O caso contínuo nos permite um conjunto de resultados mais potentes. Portanto, ao longo desta seção, faremos a hipótese $C_i \equiv R_+$. Por exemplo, nestas condições

Fato III.5. Para uma solução ótima de $CD(T_{MAX})(CT(D_{MAX}))$ a restrição de retardo (custo) é obedecida com igualdade.

Demonstração: Omitida por ser particularização de (II.4) e (II.6). ■.

Fato III.6. Sob a hipótese adicional (HA), as funções ν_D e ν_T abaixo definidas são convexas, subdiferenciáveis e semicontínuas inferiormente, onde:

$\nu_D : \{T \in R \mid T > 0\} \mapsto R$ é definida por:

$$\nu_D(T) = \inf\{\sum_{i=1}^{m} d_i(c_i) \mid \sum_{i=1}^{m} t_i(\overline{f}_i, c_i) \leq \hat{q}T \text{ e } c_i > \overline{f}_i\},$$

e

$\nu_T : \{D \in R \mid D > D_0\} \mapsto R$ é definida por:

$$\nu_T(D) = \inf\{\sum_{i=1}^{m} t_i(\overline{f}_i, c_i) \mid \sum_{i=1}^{m} d_i(c_i) \leq D \text{ e } c_i > \overline{f}_i\}.$$

Demonstração: Vide Humes [2].

Esta propriedade foi verificada empiricamente no pioneiro trabalho de Gerla [1] para redes de filas $M/M/1$ com custos do tipo $(\sum_{i=1}^{m} l_i c_i^{\alpha})$, onde $\alpha \in (0,1)$.

Esta forte propriedade de convexidade e subdiferenciabilidade levou-nos a esforços grandes (e mal-direcionados, em nossa presente opinião) para obter soluções do problema por esquemas próximos às idéias de decomposição de Benders.

Estas idéias parecem-nos mal direcionadas, pelo menos acopladas à projeção usual, pois Benders está ligado à presença de suportes convexos e, portanto, à subdiferenciabilidade (se impusermos suportes diferenciáveis ou subdiferenciáveis) e, portanto, a convexidade. Convexidade esta, cuja principal característica é a "globalidade" de mínimos locais.

Estes comentários tornar-se-ão mais claros perante o próximo fato e seu uso posterior. Antes, porém, de podermos enunciar o fato significante, há que introduzir a definição imediatamente abaixo:

Definição III.7. As funções custo ótimo $D^*(\cdot,\cdot)$ e retardo ótimo $T^*(\cdot,\cdot)$ em função do fluxo e, respectivamente, do retardo máximo e do orçamento máximo são definidas por:

$$D^*(f,T) = \inf\{\sum_{i\in I(f)} d_i(c_i) \mid \sum_{i\in I(f)} t_i(f_i,c_i) \leq \hat{q}T \text{ e } c_i > f_i \text{ para } i \in I(f)\},$$

$$T^*(f,T) = \inf\{\sum_{i\in I(f)} t_i(f_i,c_i) \mid \sum_{i\in I(f)} d_i(c_i) \leq D \text{ e } c_i > f_i \text{ para } i \in I(f)\},$$

onde $I(f) = \{i \in \hat{A} \mid f_i > 0\}$.

Por conveniência, nós trabalharemos somente com pares $(f,T) \in F \times R_{++}$ e com pares $(f,D) \in F \times \{x \in R \mid x > \sum_{i\in I(f)} d_i(f_i)\}$. Nestas condições, o "inf" presente em ambas as definições torna-se um mínimo.

Com estas definições em mente, podemos afirmar:

Fato III.8. Para todo real estritamente positivo T, supondo a validade de (H5), a função $D^*(\cdot,T) : F \mapsto R$ é côncava. Mais ainda, se vale (H5A) (custos estritamente côncavos), então $D^*(\cdot,T)$ é estritamente côncava em F.

Demonstração: Há várias formas de provar este resultado, mas a que consideramos mais simples e interessante é aquela em que tratamos o problema $CD(T)$ como sendo um de designação de graus de congestionamento $\rho_i = f_i/c_i$.

É trivial verificar, usando (III.4), que $\forall f \in F$, $\forall T > 0$,

$$\begin{aligned} D^*(f,T) &= \min\{\sum_{i\in I(f)} d_i(c_i) \mid \sum_{i\in I(f)} t_i(f_i,c_i) \leq \hat{q}T \text{ e } f_i > c_i \text{ para } i \in I(f)\} \\ &= \min\{\sum_{i\in I(f)} d_i(f_i/\rho_i) \mid \sum_{i\in I(f)} t_i(\rho_i,1) \leq \hat{q}T \text{ e } \rho_i \in (0,1) \text{ para } i \in I(f)\} \\ &= \min\{\sum_{i\in I(f)} d_i(f_i/\rho_i) \mid \rho \in RO(f)\} \end{aligned}$$

onde

$$RO(f) = \{\rho \in R^m \mid \sum_{i\in I(f)} t_i(\rho_i,1) \leq \hat{q}T \text{ e } \rho_i \in (0,1) \text{ para } i = 1,2,\ldots,m\}$$

Para tal constatação basta lembrar que

$\forall z \in (0,1),\ d_i(0/z) = d_i(0) = 0,\ i = 1,2,\ldots,m$ por (H1).

Portanto, $\forall \lambda \in (0,1),\ \forall (f^1, f^2) \in F \times F$ convexo: $f^1 \neq f^2$, se utilizarmos a notação $f(\lambda) = \lambda f^1 + (1-\lambda) f^2$, temos

$D^*(f(\lambda), T) = \min\{\sum_{i=1}^m d_i(f_i(\lambda)/\rho_i) \mid \rho \in RO(f(\lambda))\}$.

Mais ainda, $\forall i \in I(f(\lambda)) = I(f^1) \cup I(f^2)$, e $\forall z \in (0,1)$

$d_i(f_i(\lambda)/z) \geq \lambda d_i(f_i^1/z) + (1-\lambda) d_i(f_i^2/z)$ (por (H5))

Note-se que, se (H5A) vale, a desigualdade estrita vale, e que, para $i \notin I(f_\lambda)$, $d_i(f_i(\lambda)/z) = 0$.

Portanto, como $(I(f(\lambda)) \equiv I(f^1) \cup I(f^2) \Rightarrow RO(f^i) \supset RO(f(\lambda)),\ (i = 1,2)$, segue que

$$D^*(f(\lambda), T) \geq \min\{\sum_{i=1}^m \lambda d_i(f_i^1/\rho_i) + (1-\lambda) d(f_i^2/\rho_i) \mid \rho \in RO(f(\lambda))\}$$

$$\geq \lambda \min\{\sum_{i=1}^m d_i(f_i^1/\rho_i) \mid \rho \in RO(f(\lambda))\} + (1-\lambda)\{\sum_{i=1}^m d_i(f_i^2/\rho_i) \mid \rho \in RO(f(\lambda))\}$$

$$\geq \lambda D^*(f^1, T) + (1-\lambda) D^*(f^2, T),$$

sendo que a primeira desigualdade é estrita caso (H5A) valha. ■

É interessante notar que as únicas propriedades de F utilizadas foram convexidade de F e que $f \in F \Rightarrow f \geq 0$. Portanto, o resultado acima enunciado para $D^*(\cdot, T) : F \mapsto R$ é válido para $D^*(\cdot, T) : R_+^m \mapsto R$.

Esta constatação é a base para a seguinte afirmação:

Fato III.9. Para todo real estritamente positivo T, para toda partição (I,J) de $\{1,2,\ldots,m\}$,

$D^*(\cdot, T) = \{f \in R^m \mid f_i > 0$ para $i \in I$, e $f_j = 0$ para $j \in J\} \mapsto R$

é contínua e superdiferenciável.

Demonstração: No caso $I = \{1, 2, \ldots, m\}$ e $J \equiv \emptyset$, o resultado segue trivialmente do fato de que funções côncavas definidas em abertos são contínuas e superdiferenciáveis.

Para o caso J não vazio, o raciocínio é o mesmo utilizando-se como espaço o subespaço linear $\{f \in R^m \mid f_j = 0 \text{ para } j \in J\}$ e o interior relativo a este subespaço, sendo que as coordenadas $j (j \in J)$ do supergradiente são indeterminadas. ∎

A restrição de trabalharmos com fluxos f com exatamente as mesmas componentes não nulas nos permite enunciar um resultado de concavidade estrita no caso de custos lineares e redes de filas $M/M/1$:

Fato III.10. No caso de custos lineares e redes de filas $M/M/1$, a função

$$D^*(\cdot, T) : \{f \in F \mid f_j = 0 \iff j \in J\} \mapsto R$$

é C^∞ e estritamente côncava, para todo real estritamente positivo T.

Demonstração: Vide Humes [2].

O Fato III.10 permite-nos reforçar parcialmente (III.8), enunciando

Fato III.11. No caso de redes de filas $M/M/1$, a função

$$D^*(\cdot, T) : \{f \in F \mid f_j = 0 \iff j \in J\} \mapsto R$$

é estritamente côncava.

Demonstração: Sem perda de generalidade, suponhamos $I(f) = \{1, 2, \ldots, m\}$, para $f \in \hat{F} = \{f \in F \mid f_j = 0 \iff j \in J\}$.

Sejam $(f^1, f^2, \lambda) \in \hat{F} \times \hat{F} \times (0, 1)$ e c^* a solução ótima de $CD(T)$ para $f = f(\lambda) = \lambda f^1 + (1 - \lambda) f^2$.

Claramente $c^* \in R^m_{++}$ e, portanto, $D(c)$ é superdiferenciável em c^*, pois, por

(H5), $D(\cdot)$ é côncava. Nestas condições,

$$\forall c \in \mathbb{R}^m_{++}, \quad D(c) \leq D_L(c) = D(c^*) + < \gamma, c - c^* > .$$

Por (III.10),

$$\begin{aligned} D^*_L(\lambda f^1 + (1-\lambda) f^2, T) &> \lambda D^*_L(f^1, T) + (1-\lambda) D^*_L(f^2, T) \\ &\geq \lambda D^*(f^1, T) + (1-\lambda) D^*(f^2, T) \end{aligned}$$

onde

$$D^*_L(f, T) = \min\{D_L(c) \mid \sum_{i=1}^{m} t_i(f_i, c_i) \leq \bar{q}T \text{ e } c_i > f_i,\ i \notin J\}$$

e, claramente,

$$D^*_L(\lambda f^1 + (1-\lambda) f^2, T) = D^*(\lambda f^1 + (1-\lambda) f^2, T)$$

e, portanto, segue a tese. ∎

No presente ponto, duas questões tornam-se naturais: (i) o que podemos afirmar sobre $T^*(\cdot, D)$ e (ii) qual o comportamento de $D^*(\cdot, T)$ ($T^*(\cdot, D)$) quando alguma componente do fluxo anula-se.

Quanto ao comportamento de $T^*(\cdot, D)$) os resultados obtidos não são tão fortes quanto os obtidos para $D^*(\cdot, T)$). Esta afirmação é de certo modo frustrante, pois as funções $T^*(\cdot, D)$ e $D^*(\cdot, T)$ estão intimamente ligadas por:

Fato III.12. Para todo $f \in F$, valem as seguintes relações:

(a) $\forall T > 0,\ T^*(f, D^*(f, T)) = T$

(b) $\forall D > D(f),\ D^*(f, T^*(f, D)) = D$

Demonstração: Trivial a partir de (III.3) e (III.4). ∎

A única aparente assimetria em (a) e (b) acima é a imposição de $D > D(f)$. Esta assimetria torna-se presente ao considerarmos combinações convexas de fluxos, pois, exceção feita ao caso linear (custos lineares), não podemos afirmar que $\{f \in F \mid D(f) > D\}$ é convexo. Intuitivamente, afirmaríamos o oposto, isto é, que se os custos são estritamente côncavos, existiriam sempre $(f^1, f^2) \in F \times F$ tais que $D(f^i) < D$, $i = 1,2$, e $D(0.5f^1 + 0.5f^2) > D$. Em termos mais precisos, podemos enunciar:

Fato III.13. Para todo real (positivo) D, o conjunto $\{f \in F \mid D(f) \geq D\}$ é convexo.

Demonstração: Trivial pela concavidade do custo (H5). ■

Com estas considerações, podemos apresentar uma versão mais fraca de (III.8), a qual é:

Fato III.14. Para todo real $D > \{\inf D(f) \mid f \in F\}$ a função

$T^*(\cdot, D) : \{f \in F \mid D(f) < D\} \mapsto R$ é quasicôncava, isto é,

sendo $A = \{f \in F \mid D(f) < D\}$,

$\forall (f^1, f^2, \lambda) \in A \times A \times (0,1) : (\lambda f^1 + (1-\lambda) f^2) \in A$

$T^*(\lambda f^1 + (1-\lambda)f^2, D) \geq \min_{i=1,2}\{T^*(f^i, D)\}$.

Demonstração: Por simplicidade, utilizamos

$$T^i = T^*(f^i, D), \quad i = 1,2;$$

$$T_\lambda = T^*(f(\lambda), D), \quad \text{onde } f(\lambda) = \lambda f^1 + (1-\lambda) f^2.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, $T^1 \leq T^2$ e que, por contradição, existe λ, tal que $T_\lambda < T^1 \leq T^2$. Então

$$\begin{aligned} D &= D^*(\lambda f^1 + (1-\lambda) f^2, T_\lambda) \quad &\text{(por III.12)} \\ &\geq \lambda D^*(f^1, T_\lambda) + (1-\lambda) D^*(f^2, T_\lambda) \quad &\text{(por III.8)} \\ &> \lambda D^*(f^1, T^1) + (1-\lambda) D^*(f^2, T^2) \quad &(\text{pois } T_\lambda < T^1 \leq T^2) \\ &= D \quad &\text{(por III.12)} \end{aligned}$$

■

Note-se que com o mesmo raciocínio de (III.14) podemos enunciar:

Fato III.15. Para todo real $D > \inf\{D(f) \mid f \in F\}$, a função

$T^*(\cdot, D) : \{f \in F : D(f) < D\} \mapsto R$

é estritamente quasicôncava.

Demonstração: Omitida por ser idêntica a (III.14), substituindo $(T_\lambda \leq T^1 < T^2)$. ■

A questão natural que surge é sobre a quasiconcavidade de $T^*(\cdot, D)$ em F.

Claramente, se (f^1, f^2) goza da propriedade $D(f^i) \geq D$, por (III.13)

$\forall \lambda \in (0,1)$, $f(\lambda) = \lambda f^1 + (1-\lambda) f^2$ goza da propriedade

$D(f(\lambda)) \geq D$.

Neste caso, com a convenção $(+\infty \geq +\infty)$, a caracterização de quasiconcavidade mantém-se.

Portanto, nos interessa o caso onde $D(f^1) < D$ e $D(f^2) \geq D$. Neste caso vale:

Fato III.16. Sejam $(f^1, f^2) \in F$, tais que $D(f^1) < D$ e $D(f^2) \geq D$, então:

existe $\overline{\lambda} \in [0,1)$, tal que:

(i) $D(\lambda f^1 + (1-\lambda) f^2) < D \iff \lambda > \overline{\lambda}$,

(ii) $D(\overline{\lambda} f^1 + (1-\overline{\lambda}) f^2) = D$.

Demonstração: Trivialmente, pela continuidade de $D(\cdot)$,

$A = \{\lambda \in [0,1] \mid D(\lambda f^1 + (1-\lambda) f^2) \geq D\}$ é fechado.

Pela continuidade de $D(\cdot)$ e por $D(1 f^1 + (1-1) f^2) < D$, A possui limite superior menor que 1 e, portanto, é bem definido

$\overline{\lambda} = \sup\{\lambda \in A\} < 1$ e $D(\overline{\lambda} f^1 + (1-\overline{\lambda}) f^2\} = D$.

A propriedade (i) segue da concavidade de $D(\cdot)$. ■

Fato III.17. Nas condições de III.16, $\exists\epsilon > 0$, tal que

$$\forall\lambda \in (\overline{\lambda}, \overline{\lambda}+\epsilon], \quad T^*(f(\lambda), D) > T^*(f^1, D).$$

Demonstração: Como $D(f^2) > D(f^1)$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $f_1^2 > f_1^1$ e, portanto, $f_1(\lambda)$ é decrescente com λ.

Consideremos $\hat{c}$ definido por

$$t_1(f_1(0.5(1+\overline{\lambda})), \hat{c}) = T^*(f^1, D),$$

cuja existência é garantida por (H8) a (H11), e seja

$$d_1 = d_1(\hat{c}) > 0, \quad \text{pois} \quad f_1^2 > f_1^1 \geq 0.$$

Seja $D' = D - d_1$.

Pela continuidade de $D(\cdot)$ e pela definição de A e $\overline{\lambda}$, como em (III.16) segue que $\exists\epsilon' > 0$, tal que

$$\forall\lambda \in (\overline{\lambda}, \overline{\lambda}+\epsilon'], \quad D > D(f(\lambda)) \geq D'.$$

Tomando $\epsilon = \min\{\epsilon', 0.5(1-\overline{\lambda})\}$, temos que, sendo $c^*(\lambda)$ a solução ótima de $CT(D)$,

$$T^*(f(\lambda), D) \geq t_1(f_1(\lambda), c_1^*(\lambda)),$$

$$d_1(c_1^*(\lambda)) < D - D(f(\lambda)) \leq D - D' = d_1.$$

Portanto, $c_1^*(\lambda) < \hat{c}^*$.

Como $f_1(\lambda)$ é decrescente com λ, $\forall\lambda \in (\overline{\lambda}, \overline{\lambda}+\epsilon]$

$$\begin{aligned} T^*(f(\lambda), D) &\geq t_1(f_1(\lambda), c_1^*(\lambda)) \\ &> t_1(f_1(0.5(1+\overline{\lambda})), c_1^*(\lambda)) \\ &> t_1(f_1(0.5(1+\overline{\lambda})), \hat{c}) \\ &= T^*(f^1, D) \end{aligned}$$

■

Utilizando (III.16) a (III.17) é fácil provar que

Fato III.17.a. Para todo real positivo D, a função

$T(\cdot, D) : F \mapsto R \cup \{+\infty\}$ é estritamente quasicôncava.

Demonstração: Omitida por ser trivial. ■

O resultado aparentemente desejável de que $T^*(\cdot, D)$ fosse côncava é falso em geral, como pode ser verificado com um exemplo simples no caso de custos lineares e redes de filas $M/M/1$ [2].

Estes fatos, aparentemente bizantinos, nos permitem apresentar um algoritmo mais simples que o de dupla projeção e que possui a propriedade de convergência em um número finito de passos (entendendo-se passo como uma solução de (CA)).

A base deste algoritmo é apresentada pelos fatos que se seguem.

Fato III.18. Seja $\bar{c}$ a solução do $CT(D)(CD(T))$ com $f = \bar{f}$. Se para o (FA), com $c = \bar{c}$, existe uma direção de descida no ponto $\bar{f}$, então esta é uma direção de descida para $T^*(\cdot, D)$ $(D^*(\cdot, T))$ no ponto $f = \bar{f}$.

Demonstração: A demonstração para $T^*(\cdot, D)$ é calcada no fato de que ocorre uma queda de retardo para direções de descida.

A demonstração para $D^*(\cdot, T)$ é conseqüência do fato de que se existe uma direção de descida, para o ponto $f = \bar{f}$, no (FA) com $c = \bar{c}$

$D^*(\bar{f} + \lambda h, T) \leq D(\bar{c}) = D^*(\bar{f}, T)$ e

$T(\bar{f} + \lambda h, \bar{c}) < T$, para λ em uma vizinhança da origem e $\lambda > 0$. ■

Fato III.19. Seja $\omega : F \mapsto R$ uma função quasicôncava em F e seja h uma direção de descida para $\omega(\cdot)$ em $\bar{f} \in F$. Isto é, $\exists(\bar{\lambda}, \bar{h}) \in R_{++} \times (F - F)$, tal que

(i) $\forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$, $(\bar{f} + \lambda \bar{h}) \in F$

(ii) $\forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$, $\omega(\bar{f} + \lambda \bar{h}) < \omega(\bar{f})$,

então $\forall \lambda \geq 0$, tal que $(\bar{f} + \lambda \bar{h}) \in F$

$\omega(\overline{f} + \lambda\overline{h}) < \omega(\overline{f})$.

Demonstração: Supondo, por contradição, que $\exists\alpha > 0$:

$(\overline{f} + \alpha\overline{h}) \in F$

$\omega(\overline{f} + \alpha\overline{h}) \geq \omega(\overline{f})$,

então existe $p \in [0,1]$, tal que

$\omega(p(\overline{f} + \alpha\overline{h}) + (1-p)\overline{f}) \geq \omega(\overline{f})$, e

$0 < p\alpha < \overline{\lambda}$,

o que gera a contradição. ■

A relevância do Fato III.18 é clara se lembrarmos que $T^*(\cdot, D)$ é quasicôncava em F e $D^*(\cdot, T)$ é (estritamente) côncava e portanto quasicôncava em F.

Nestas condições propomos o seguinte método:

Método III.20. Seja f^0 um fluxo viável no problema de designação de capacidades (isto é, $D(f^0) > D$ para o $PT(D)$ ou $T > 0$ para o $PD(T)$).

Passo 1) Normalização.

Encontre c^0 solução do problema de designação de capacidades.

Para $c = c^0$, para todo par (r,s), com $q_{rs} > 0$, encontre uma árvore de caminho mais curto, com distâncias

$$\alpha_{kl} = \alpha_{lk} = \alpha_i = \frac{\partial t_i(f_i^0, c_i^0)}{\partial f_i}, \quad \text{para} \quad \hat{a}(i) = \{k, l\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Envie todas as mensagens de k a l pelo caminho mais curto encontrado, para todos os pares (k,l). Caso esta seja a situação com o fluxo f^0, pare. Caso contrário chame o fluxo obtido de f^1.

Passo 2) Melhora.

Para o fluxo f^i, $i \geq 1$, encontre c^i uma solução ótima do CA, com $f = f^i$.

Para $c = c^i$, encontre, se existir, uma árvore de caminhos mais curtos para $q_{rs} > 0$, que não seja o roteamento associado a f^i (a métrica usada é $\alpha_{kl} = \alpha_{lk} = \alpha_j = \frac{\partial t_j(f^i_j, c^i_j)}{\partial t_j}$ para $\hat{a}(j) = \{k, l\}$) e cujo caminho mais curto indicado seja estritamente melhor que o associado ao atual roteamento.

Se não existir tal árvore, pare. Caso contrário, altere o fluxo para que os caminhos mais curtos sejam obedecidos. O novo fluxo é f^{i+1}.

Retorne para o passo 2. ∎

Fato III.21. O método proposto em (III.20) converge em um número finito de passos para um ponto $(\overline{f}, \overline{c})$, tal que:

(P1) $\overline{c}$ é a solução ótima do (CA), com $f = \overline{f}$;

(P2) $\overline{f}$ é a solução ótima do (FA), com $c = \overline{c}$.

Demonstração: Após a normalização, os fluxos f^i, $i \geq 1$, estão associados biunivocamente a arborescências do grafo G.

Como as arborescências são em número finito e a cada passo a função objetivo do problema é diminuída estritamente, o método pára em um número finito de passos.

Analisando as regras de parada, segue a tese. ∎

O método (III.20) é essencialmente um método similar ao simplex. Além da garantia de convergência e a aparente necessidade de (HA), o método apresenta uma grande vantagem sobre o método de dupla projeção, que é a de não necessitar de solução do (FA).

Esta vantagem é a substituição da solução do (FA), que exige uma série de iterações, onde, em cada uma, devem ser construídas $\binom{n}{2}$ árvores de Dijkstra e uma busca unidimensional, pelo cômputo de uma direção de descida. Usando a idéia de desvio de fluxo, este último cômputo exige, no pior caso, $\binom{n}{2}$ árvores de Dijkstra.

É importante notar que em Kleinrock [5], a semente desta idéia está presente, quando ele recomenda desvio total de fluxo. Infelizmente, esta idéia aplicada à solução do (FA) pode levar à perda de viabilidade, além de não reduzir o número de desvios de fluxo a um só, como aqui é feito.

Um ponto de aceleração do algoritmo de desvio de fluxo seria a utilização de árvores prévias para auxiliar a construção das árvores seguintes. Tais idéias foram implementadas por Bezerra [07], mas ainda há possibilidade de melhoria sobre este aspecto.

A facilidade do processo de encontrar a direção de máxima descida, para o (FA), sugere naturalmente o uso do algoritmo "steepest decent", apesar de que em geral este método seja criticável quando comparado a métodos de segunda ordem, para a minimização correspondente à (FA). Para especificar completamente o algoritmo, só resta especificar a busca unidimensional. O usual na tradição de Zoutendijk é buscar o mínimo ao longo da semireta $(\overline{f}+\lambda\overline{h})$, com restrição de viabilidade. Como sabemos que $\lim_{f_i \to \bar{c}_i} t_i(f_i, \bar{c}_i) = +\infty$, a viabilidade pode aparentar restringir-se a manter $f_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, o que é automaticamente garantido, com $\lambda \leq 1$. É interessante notar que nos casos rodados sobre os exemplos da rede LARC, obtivemos consistentemente $\lambda = 1$. Tal não ocorreu em exemplos gerados aleatoriamente.

Em geral, recomendaríamos o uso da regra de Armijo, baseadas nas experiências relatadas por Polak [8].

Apesar da sua simplicidade teórica, a solução do (FA) tende a consumir ordens de grandeza de tempo a mais que a solução do (CA).

Um ponto final nesta seção é notar que a solução do (FA) é única em termos de $\{f_i\}_{i=1}^{m}$. Este fato não deve ser entendido como unicidade do roteamento, e sim como unicidade em relação ao fluxo físico.

IV - Comentários Finais.

A utilização do método proposto simplifica a solução do problema da designação de fluxos e capacidades no sentido de encontrar um ponto estacionário da Kuhn-Tucker, mas a constatação de "concavidade" nas funções $T^*(\cdot, D)$ e $D^*(\cdot, T)$ é clara indicação da existência de mínimos locais. Em particular, quando o fluxo físico restringe-se a uma árvore $(m = n - 1$ e grafo conexo), pode-se provar que estamos em um mínimo local [2].

Assim sendo, maiores resultados orientados para encontrar a solução de $PD(T)$ ou $PT(D)$ ainda não existem afora a recomendação de Gerla [1] de utilizar vários pontos iniciais viáveis e a esperança de obtermos resultados positivos seguindo as idéias de Tuy et alii [9], em particular, no caso de custos lineares e filas $M/M/1$.

Consideramos entretanto interessante neste trabalho a junção de intuição encontrada nos escritos de Gerla [1] e Kleinrock [5], com o tratamento formal dado à funções valor ótimo dependendo de argumentos do problema, levando a algoritmo mais simples e eficiente, na linha de projeção - direções viáveis, como classificado em Geoffrion.

Referências

[1] Gerla, M., The design of store-and-forward networks for computer networks - Los Angeles, 1973, 300p. Tese (Doutorado) - University of California.

[2] Humes Jr., C., Tópico de otimização e redes de computadores. São Paulo, 1988, 109p. Tese (Livre-Docência) - IME - Universidade de São Paulo.

[3] Lin, J.G., Maximal vectors and multiobjective optimization. Journal of Optimization Theory and Applications, 18(1): 41-64, 1976.

[4] Lin, J.G., Multiobjective problems: Pareto-optimal solutions by method of proper quality constraints. IEEE Transactions Automatic Control, 21(5): 641-650, 1976.

[5] Kleinrock, L., Queuing Sytems. New York, John Wiley, 1975-1976, 2v.

[6] Geoffrion, A.M., Elements of large-scale mathematical programming. Management Science, 16(11): 652-691, 1970.

[7] Bezerra, J.R.M., Sobre problemas de otimização de redes de computadores. São Paulo, 1984. 233p. Dissertação (Mestrado) - IME-USP.

[8] Polak, E., Computational methods in optimization. New York, Academic Press, 1971. 329p.

[9] Tuy, H.; Thieu, T.V.; Thai, N.G.Q., A conical algorithm for globally minimizing a concave function over a closed convex set. Mathematics of Operations Research, 10(3): 498-514, 1985.

RELATÓRIOS TÉCNICOS

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Instituto de Matemática e Estatística da USP

V.W. Setzer
A NOTE ON A RECURSIVE TOP-DOWN ANALIZER OF N.WIRTH
RT-MAP-7702, Dezembro 1977

V.W. Setzer, M.M. Sanches
A LINGUAGEM "LEAL" PARA ENSINO BÁSICO DE COMPUTAÇÃO
RT-MAP-7704, Dezembro 1977

Sílvio Ursic, Cyro Patarra
EXACT SOLUTION OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS WITH ITERACTIVE METHODS
RT-MAP-7802, Fevereiro 1978

Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
HYPOHAMILTONIAN DIGRAPHS
RT-MAC-7803, Março 1978

Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
HYPOTRACEABLE DIGRAPHS
RT-MAP-7804, Maio 1978

W. Hesse, V.W. Setzer
THE LINE-JUSTIFIER: AN EXAMPLE OF PROGRAM DEVELOPMENT BY TRANSFORMATIONS
RT-MAP-7805, Junho 1978

V.W. Setzer
PROGRAM DEVELOPMENT BY TRANSFORMATIONS APPLIED TO RELATIONAL DATA-BASE QUERIES
RT-MAP-7809, Novembro 1978

D.T. Fernandes, C. Patarra
SISTEMAS LINEARES ESPARSOS, UM MÉTODO EXATO DE SOLUÇÃO
RT-MAP-7811, Novembro 1978

V.W. Setzer, G. Bressan
DESENVOLVIMENTO DE PROGRAMAS POR TRANSFORMAÇÕES: UMA COMPARAÇÃO ENTRE DOIS MÉTODOS
RT-MAP-7812, Novembro 1978

Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
ON THE COMPLEXITY OF THE MONOTONE ASYMETRIC TRAVELLING SALESMAN POLYTOPE. I: HYPOHAMILTONIAN FACETS
RT-MAP-7814, Dezembro 1978

Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
ON THE COMPLEXITY OF THE MONOTONE ASYMETRIC TRAVELLING SALESMAN POLYTOPE. II: HYPOTRACEABLE FACETS
RT-MAP-7901, Fevereiro 1979

M.M. Sanches, V.W. Setzer
A PORTABILIDADE DO COMPILADOR PARA A LINGUAGEM LEAL
RT-MAP-7902, Junho 1979

Martin Grötschel, Carsten Thomassen, Yoshiko Wakabayashi
HYPOTRACEABLE DIGRAPHS
RT-MAP-7903, Julho 1979

Routo Terada
FAST ALGORITMS FOR NP-HARD PROBLEMS WHICH ARE OPTIMAL OR NEAR-OPTIMAL WITH PROBABILITY ONE
RT-MAP-8003, Setembro 1980

V.W. Setzer, R. Lapyda
UMA METODOLOGIA DE PROJETO DE BANCOS DE DADOS PARA O SISTEMA ADABAS
RT-MAP-8004, Setembro 1980

Imre Simon
ON BRZOZOWSKI'S PROBLEM: $(1 \cup A)^m = A^*$
RT-MAP-8005, Outubro 1980

Luzia Kazuko Yoshida, Gabriel Richard Bitran
UM ALGORITMO PARA PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO COM VARIÁVEIS ZERO-UM
RT-MAP-8101, Fevereiro 1981

V.W. Setzer, R. Lapyda
DESIGN OF DATA MODELS FOR THE ADABAS SYSTEM USING THE ENTITY-RELATIONSHIP APPROACH
RT-MAP-8103, Abril 1981

U.S.R. Murty
PROJECTIVE GEOMETRIES AND THEIR TRUNCATIONS
RT-MAP-8105, Maio 1981

V.W. Setzer, R. Lapyda
PROJETO DE BANCOS DE DADOS, USANDO MODELOS CONCEITUAIS
RT-MAP-8106, Junho 1981
(Este Relatório Técnico complementa o RT-MAP-8103. Ambos substituem o RT-MAP-8004 ampliando os conceitos ali expostos.)

Maria Angela Gurgel, Yoshiko Wakabayashi
EMBEDDING OF TREES
RT-MAP-8107, Agosto 1981

Siang Wun Song
ON A HIGH-PERFORMANCE VLSI SOLUTION TO DATABASE PROBLEMS
RT-MAP-8201, Janeiro 1982

Maria Angela Gurgel, Yoshiko Wakabayashi
A RESULT ON HAMILTON-CONNECTED GRAPHS
RT-MAP-8202, Junho 1982

Arnaldo Mandel
TOPOLOGY OF ORIENTED MATROIDS
RT-MAP-8205, Junho 1982

Erich J. Neuhold
DATABASE MANAGEMENT SYSTEMS: A GENERAL INTRODUCTION
RT-MAP-8206, Novembro 1982

Béla Bollobás
THE EVOLUTION OF RANDOM GRAPHS
RT-MAP-8207, Novembro 1982

V.W. Setzer
UM GRAFO SINTÁTICO PARA A LINGUAGEM PL/M-80
RT-MAP-8208, Novembro 1982

Jayme Luiz Szwarcfiter
A SUFFICIENT CONDITION FOR HAMILTON CYCLES
RT-MAP-8209, Novembro 1982

Belá Bollobás, Istvan Simon
REPEATED RANDOM INSERTION INTO A PRIORITY QUEUE
RT-MAP-8302, Fevereiro 1983

V.W. Setzer, P.C.D. Freitas, B.C.A. Cunha
UM BANCO DE DADOS DE MEDICAMENTOS
RT-MAP-8303, Julho 1983

Arnaldo Mandel
THE 1-SKELETON OF POLYTOPES, ORIENTED MATROIDS AND SOME OTHER LATTICES
RT-MAP-8305, Julho 1983

Arnaldo Mandel
ALGUNS PROBLEMAS DE ENUMERAÇÃO EM GEOMETRIA
RT-MAP-8306, Agosto 1983

Siang Wun Song
COMPLEXIDADE DE E/S E PROJETOS OPTIMAIS DE DISPOSITIVOS PARA ORDENAÇÃO
RT-MAP-8307, Agosto 1983

V.W. Setzer
MANIFESTO CONTRA O USO DE COMPUTADORES NO ENSINO DE 1º GRAU
RT-MAP-8402, Abril 1984

Imre Simon
A FACTORIZATION OF INFINITE WORDS
RT-MAP-8404, Setembro 1984, 7 pgs

Imre Simon
THE SUBWORD STRUCTURE OF A FREE MONOID
RT-MAP-8405, Setembro 1984, 6 pgs

Jairo Z. Gonçalves, Arnaldo Mandel
ARE THERE FREE GROUPS IN DIVISION RINGS?
RT-MAP-8406, Setembro 1984, 25 pgs

Paulo Feofiloff, D.H. Younger
VERTEX-CONSTRAINED TRANSVERSALS IN A BIPARTITE GRAPH
RT-MAP-8407, Novembro 1984, 18 pgs

Paulo Feofiloff
DISJOINT TRANSVERSALS OF DIRECTED COBOUNDARIES
RT-MAP-8408, Novembro 1984, 126 pgs

Paulo Feofiloff, D.H. Younger
DIRECTED CUT TRANSVERSAL PACKING FOR SOURCE-SINK CONNECTED GRAPHS
RT-MAP-8409, Novembro 1984, 16 pgs

Siang Wun Song
DISPOSIÇÕES COMPACTAS DE ÁRVORES NO PLANO
RT-MAP-8501, Maio 1985, 11 pgs

Paulo Feofiloff
TRANSVERSAIS DE CORTES ORIENTADOS EM GRAFOS BIPARTIDOS
RT-MAP-8502, Julho 1985, 11 pgs

Christian Choffrut
FREE PARTIALLY COMMUTATIVE MONOIDS
RT-MAP-8504, Setembro 1985, 110 pgs

Valdemar W. Setzer
MANIFESTO AGAINST THE USE OF COMPUTERS IN ELEMENTARY EDUCATION
RT-MAP-8505, Outubro 1985, 40 pgs

Júlio Michael Stern
FATORAÇÃO L-U E APLICAÇÕES
RT-MAP-8606, Agosto 1986, 105 pgs

Afonso Galvão Ferreira
O PROBLEMA DO DOBRAMENTO OPTIMAL DE PLAs
RT-MAP-8607, Agosto 1986, 73 pgs

Imre Simon
THE NONDETERMINISTIC COMPLEXITY OF A FINITE AUTOMATON
RT-MAP-8703, Fevereiro 1987, 20 pgs

Imre Simon
INFINITE WORDS AND A THEOREM OF HINDMAN
RT-MAP-8704, Abril 1987, 8 pgs

Imre Simon
FACTORIZATION FORESTS OF FINITE HEIGHT
RT-MAP-8707, Agosto 1987, 36 pgs

Routo Terada
UM CÓDIGO CRIPTOGRÁFICO PARA SEGURANÇA EM TRANSMISSÃO E BASE DE DADOS
RT-MAP-8709, Março 1987, 31 pgs

Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
FACETS OF THE CLIQUE PARTITIONING POLYTOPE
RT-MAC-8801, Janeiro 1988, 21 pgs

Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
A CUTTING PLANE ALGORITHM FOR A CLUSTERING PROBLEM
RT-MAC-8802, Fevereiro 1988, 52 pgs

Martin Grötschel, Yoshiko Wakabayashi
COMPOSITION OF FACETS OF THE CLIQUE PARTITIONING POLYTOPE
RT-MAC-8803, Março 1988, 14 pgs

Imre Simon
SEQUENCE COMPARISON: SOME THEORY AND SOME PRACTICE
RT-MAC-8804, Abril 1988, 14 pgs

Imre Simon
RECOGNIZABLE SETS WITH MULTIPLICITIES IN THE TROPICAL SEMIRING
RT-MAC-8805, Maio 1988, 14 pgs

Valdemar W. Setzer, Ervino Marussi
LDT: UM GERADOR UNIVERSAL DE APLICAÇÕES PARA PROCESSAMENTO DE DADOS
RT-MAC-8806, Junho 1988, 40 pgs

Routo Terada
PROBABILISTIC ANALYSIS OF OPTIMAL ALGORITHMS FOR THREE NP-HARD PROBLEMS
RT-MAC-8807, Agosto 1988, 16 pgs

Valdemar W. Setzer
UM SISTEMA SIMPLES PARA DOCUMENTAÇÃO SEMI-AUTOMÁTICA DE PROGRAMAS
RT-MAC-8808, Setembro 1988, 18 pgs

Valdemar W. Setzer, R. Hirata Jr.
HIPO-PC: UM "SOFTWARE" EDUCACIONAL PARA INTRODUÇÃO AO COMPUTADOR
RT-MAC-8809, Novembro 1988, 20 pgs

Arnaldo Mandel
O EDITOR DE TEXTO ÉPSILON
RT-MAC-8901, Abril 1989, 97 pgs

Valdemar W. Setzer, R. Hirata Jr.
DIA DA COMPUTAÇÃO
RT-MAC-8902, Abril 1989, 11 pgs

Valdemar W. Setzer, N. A. Zaguir
UM BANCO DE DADOS PARA CRIAÇAO E SELEÇÃO ZEBUÍNA
RT-MAC-8903, Março 1989, 16 pgs

Imre Simon
PROPERTIES OF FACTORIZATION FORESTS
RT-MAC-8904, Junho 1989, 8 pgs

Valdemar W. Setzer, Roberto C. Mayer
GRAFOS SINTÁTICOS SIMPLES E UM GRAFO PARA A LINGUAGEM C ANSI
RT-MAC-8905, Agosto 1989, 24 pgs

Routo Terada
UMA IDENTIFICAÇÃO CRIPTOGRÁFICA COMPACTA DO TIPO 'ZERO-KNOWLEDGE'
RT-MAC-8906, Setembro 1989, 6 pgs

Imre Simon
ON SEMIGROUPS OF MATRICES OVER THE TROPICAL SEMIRING
RT-MAC-8907, Setembro 1989, 19 pgs

Marco Dimas Gubitoso, Claudio Santos Pinhanez
MÁQUINA WORM - SIMULADOR DE MÁQUINAS PARALELAS
RT-MAC-8908, Novembro 1989, 28 pgs

Carlos Humes Jr.
SOME POMU COMMENTS ON LAGRANGIAN DUALITY, OPTIMALITY CONDITIONS AND CONVEXITY
RT-MAC-8909, Novembro 1989, 15 pgs.

Carlos Humes Jr.
MÉTODO DE DESIGNAÇÃO DE FLUXOS E CAPACIDADES: VERSÃO FINITA
RT-MAC-8910, Dezembro 1989, 31 pgs