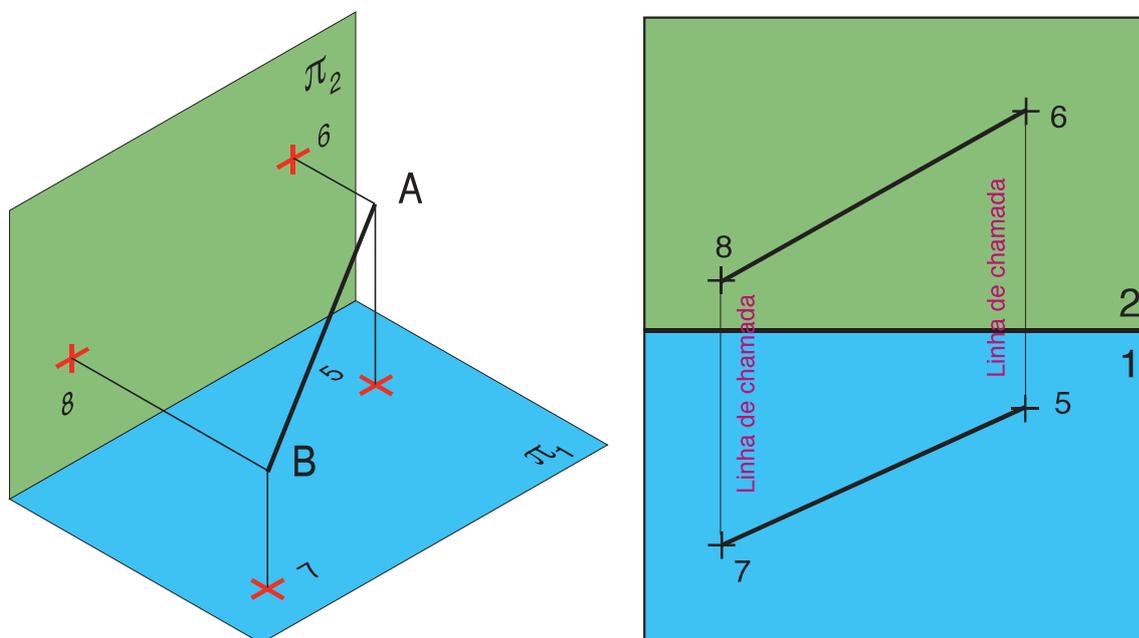


# Elementos Principais da Geometria Descritiva



Alexandre Kawano & João Petreche

2023

# Elementos Principais da Geometria Descritiva

Alexandre Kawano

ORCID <https://orcid.org/0000-0002-2248-6422>

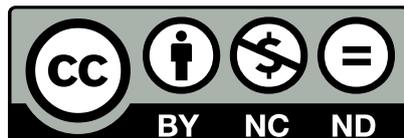
João Roberto Diego Petreche

ORCID <https://orcid.org/0000-0003-1335-3334>

2023

---

“É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e autoria, proibindo qualquer uso para fins comerciais.”



Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons - Atribuição-Não Comercial-SemDerivações 4.0 Internacional.

---

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO -USP

Reitor: Prof. Dr. Carlos Gilberto Carlotti Junior

Vice-reitora: Profa. Dra. Maria Armanda do Nascimento Arruda

ESCOLA POLITÉCNICA -EP

Diretor: Prof. Dr. Reinaldo Giudici

Vice-diretor: Prof. Dr. Sílvio Ikuyo Nabeta

Catálogo-na-publicação (CIP). Serviço de Biblioteca e Documentação  
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Maria Cristina Olaio  
Villela CRB 1338/8<sup>a</sup>

Kawano, Alexandre

Elementos Principais da Geometria Descritiva / A.Kawano, J. R.  
D. Petreche – São Paulo : Epusp, 2023.

518 kb

ISBN 978-65-89190-24-0

DOI 10.11606/9786589190240

1. Geometria Descritiva I.Petreche, João Roberto Diego I.t.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução à Geometria Descritiva</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	1
1.3	Sistemas de Projeção . . . . .	1
1.4	Elementos principais da Geometria Descritiva . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Pontos e Retas</b>	<b>11</b>
2.1	Objetivos . . . . .	11
2.2	Estudo do ponto . . . . .	11
2.3	Estudo da reta . . . . .	13
2.3.1	Elementos principais . . . . .	13
2.4	Exercícios Gerais . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Planos</b>	<b>22</b>
3.1	Objetivos . . . . .	22
3.2	Intersecção de plano com os quadros de projeção . . . . .	22
3.3	Pertinência de ponto a plano . . . . .	26
3.4	Intersecção de plano com plano . . . . .	27
3.5	Intersecção de reta com plano . . . . .	29
3.6	Exercícios Gerais . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Métodos</b>	<b>34</b>
4.1	Objetivos . . . . .	34
4.2	rotações . . . . .	34
4.3	Mudança de planos . . . . .	40
4.4	Exercícios Gerais . . . . .	49

## Lista de Figuras

1.1	Elementos principais do sistema de projeção. . . . .	2
1.2	Efeito da proximidade com o centro de projeção. . . . .	3
1.3	Centro de projeção no infinito. . . . .	3
1.4	Sistema cilíndrico de projeção. . . . .	4
1.5	Sistema cilíndrico ortogonal de projeção. . . . .	5
1.6	O perpendicularismo se mantém. . . . .	6
1.7	Sistema de Monge. . . . .	7
1.8	Projeção de um ponto em dois planos perpendiculares entre si. . .	8
1.9	Rotação das figuras contidas em $\pi_2$ em torno da linha de terra LT. . .	9
1.10	Épura. . . . .	9
1.11	Divisão do espaço em quatro diedros. . . . .	10
2.1	Cota, afastamento e abscissa de um ponto. . . . .	12
2.2	Projeções de uma reta na épura. . . . .	13
2.3	Traços de uma reta. . . . .	14
3.1	Traços de um plano no espaço. . . . .	23
3.2	Épura dos traços de um plano. . . . .	24
3.3	Épura simplificada dos traços de um plano. . . . .	24
3.4	Traços de um plano e traços de retas nele contidas. . . . .	25
3.5	Intersecção de dois planos: uma conjectura. . . . .	27
3.6	Intersecção de dois planos: solução . . . . .	28
4.1	Segmento de reta na épura: obter sua VG. . . . .	35
4.2	Rotação de Segmento. . . . .	35
4.3	Rotação de uma figura no espaço. . . . .	38
4.4	Épura tradicional. . . . .	40
4.5	Também é épura. . . . .	41
4.6	Épura generalizada. . . . .	41
4.7	Épura generalizada mostrando projeção de ponto. . . . .	42
4.8	Obtenção de VG de segmento de reta. . . . .	42

## Capítulo 1

# Introdução à Geometria Descritiva

### 1.1 Introdução

A Geometria Descritiva tem como objetivo representar objetos tridimensionais em planos bidimensionais, utilizando projeções de elementos geométricos como pontos e retas.

Ela foi desenvolvida no século XVII por Gaspard Monge e é utilizada nas áreas de engenharia, arquitetura e design.

A Geometria Descritiva é baseada em um conjunto de princípios permitem representar a forma e a posição de objetos tridimensionais em um sistema de projeções ortogonais. Essas projeções são obtidas por meio de planos de projeção, que são posicionados de forma a capturar as diferentes vistas do objeto.

A Geometria Descritiva é uma ferramenta essencial para a representação e a comunicação de ideias no campo da engenharia e do design. Ela permite aos profissionais visualizarem e analisarem objetos complexos em um plano bidimensional, facilitando o processo de projeto, construção e fabricação.

### 1.2 Objetivos

O objetivo principal é apresentar ao leitor os fundamentos da geometria descritiva, que é uma ferramenta gráfica para a solução de problemas geométricos no espaço. Nossa experiência indica que o tema, apesar de ser de fácil leitura, é de difícil aprendizado. A melhor forma de se aprender a matéria, é fazendo exercícios.

### 1.3 Sistemas de Projeção

Até se aprender multiplicação de matrizes, era óbvio que um ente  $a$  multiplicado a outro  $b$ , resultaria em um ente  $a \times b$ , que era igual à  $b \times a$ . Em outras pala-

vras, a propriedade comutativa era “óbvia”. Depois da primeira mordida na aula de multiplicação de matrizes, caímos na realidade: a comutatividade não é óbvia, e temos a sensação de que o chão sob nossos pés não nos sustenta firmemente, mas após algum tempo, percebemos claramente que a nossa compreensão da matemática aumentou.

O mesmo acontece com o desenho e a geometria descritiva. Existem inúmeros sistemas de projeção, e depois que se atinge um certo nível de maturidade, pode-se formular problemas algébricos, resolver problemas de geodésicas (linhas de menor comprimento), ou até mesmo projetar elementos geométricos do 4-D para sistemas de projeção 2-D. Mas paremos por aqui e iniciemos a jornada “à maturidade”.

Apresentamos agora dois sistemas de projeção, o cilíndrico ortogonal e o cônico. Em ambos os sistemas, há três elementos principais: o *objeto a ser projetado*, o *quadro de projeção* e o *centro de projeção*, como é mostrado na figura 1.1.

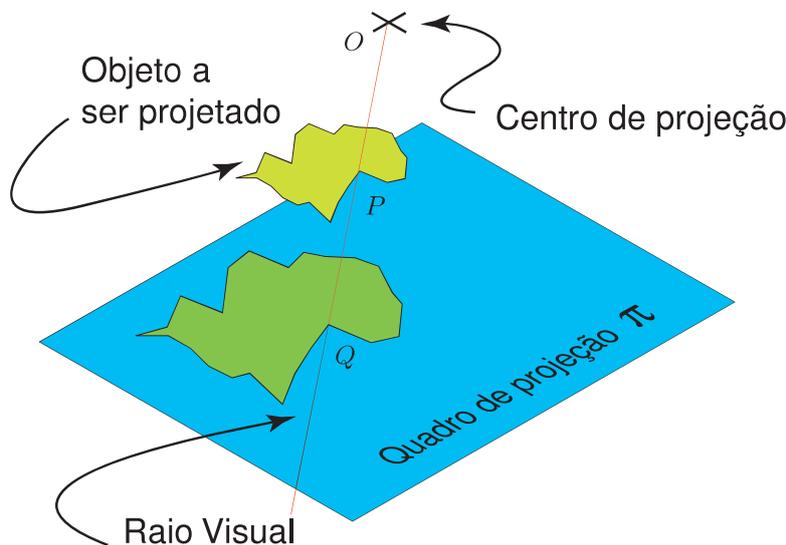


Figura 1.1: Elementos principais do sistema de projeção.

Um raio de luz (ou mais tecnicamente *raio visual*) parte do centro de projeção  $O$ , passa por um ponto genérico  $P$  do objeto, e atinge o quadro de projeção  $\pi$  em  $Q$ . Dizemos que o ponto  $Q$  é a *projeção de  $P$  em  $\pi$* . Projetando-se todos os pontos do objeto, obtém-se a sua projeção.

Quando o centro de projeção  $O$  está a uma distância finita (cuidado com os conceitos de finito e infinito<sup>1</sup>), aqueles objetos que estão mais próximos do centro de projeção tem projeção mais ampliada do que aqueles mais distantes, como mostrado na figura 1.2.

<sup>1</sup>Se você consegue dar um valor limitante para distância, por maior que seja, então a distância é finita. Por exemplo, se digo que a distância entre você e o prédio do IFUSP é menor que um milhão de anos luz, então essa distância é finita

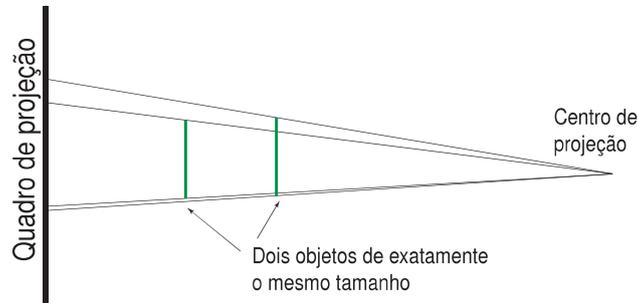


Figura 1.2: Efeito da proximidade com o centro de projeção.

Usando agora a abstração, coloque o centro de projeção à uma distância infinita do quadro de projeção, mantendo o objeto a uma distância finita. O resultado é que a distância do objeto ao quadro de projeção (note que agora, devido ao conceito de infinito, não há sentido em falarmos em distância ao centro de projeção) não influencia mais a ampliação da projeção com relação ao objeto sendo projetado (ver figura 1.3).

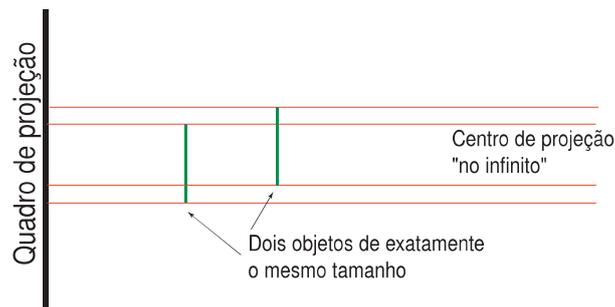


Figura 1.3: Centro de projeção no infinito.

Quando o centro de projeção está a uma distância finita, temos o sistema cônico de projeção (figura 1.1), e quando está a uma distância infinita, temos o sistema cilíndrico de projeção (figura 1.4)<sup>2</sup>.

Continuando com a especialização, se os raios visuais são perpendiculares ao quadro de projeção, e o centro de projeção está à uma distância infinita do quadro (figura 1.5), então, temos o sistema cilíndrico ortogonal.

Dois propriedades são importantes no sistema cilíndrico ortogonal:

1. Um segmento de reta paralelo ao quadro de projeção é projetado em *verdadeira grandeza*, isto é, o comprimento da projeção é igual ao comprimento do próprio segmento.

<sup>2</sup>trata-se então de uma abstração, certo?

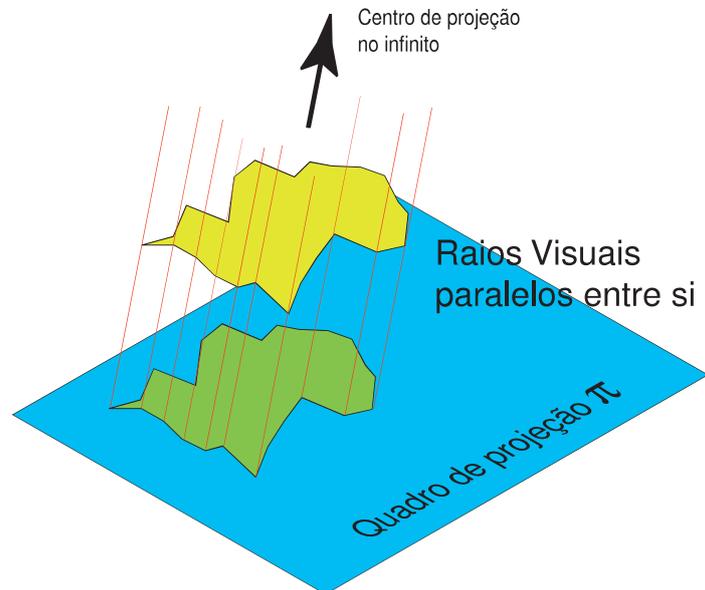


Figura 1.4: Sistema cilíndrico de projeção.

2. Sejam duas retas ortogonais entre si. Se (pelo menos) uma delas é paralela ao quadro de projeção, então as projeções das duas retas são perpendiculares entre si. Veja figura 1.6.

Passamos agora a estudar os elementos principais da Geometria Descritiva, que são: pontos, retas e planos.

## 1.4 Elementos principais da Geometria Descritiva

A Geometria Descritiva, foi criada por Gaspar Monge (1746-1818), um matemático francês que serviu Napoleão em sua campanha pelo Egito, foi seu Ministro da Marinha, e que tinha vários interesses tanto na Matemática como na Física e Química. Foi amigo de Lavoisier e Fourier. Para termos uma idéia do avanço científico da época, em 1800 Volta inventa a pilha elétrica!

A motivação para a criação da Geometria Descritiva foi o projeto de fortes militares, que naturalmente envolvia problemas geométricos tridimensionais complexos. Após sua invenção, ela foi conservada como segredo militar por vários anos pelo próprio Napoleão. Certamente, a Geometria Descritiva não era “óbvia”, como hoje pode parecer.

E, afinal, qual era o grande “segredo” de Gaspar Monge? Era o uso simultâneo de *dois* sistemas de projeção cilíndricos ortogonais, ortogonais entre si, como mostrado na figura 1.7.

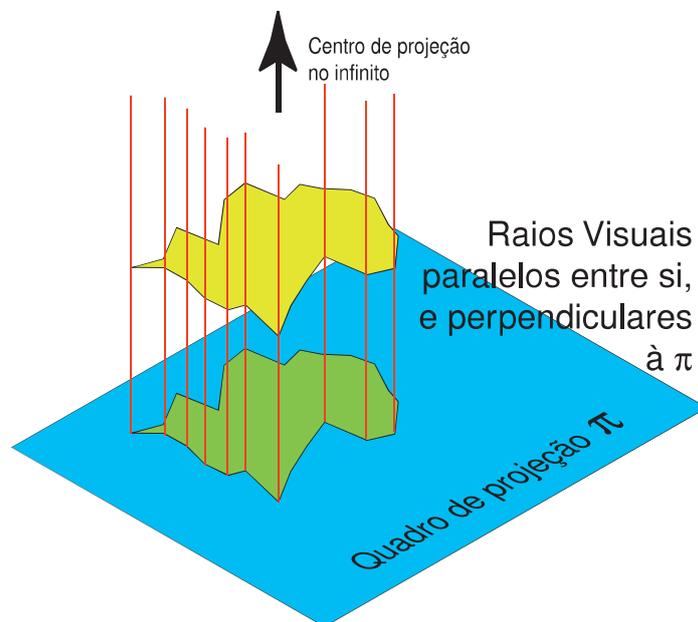


Figura 1.5: Sistema cilíndrico ortogonal de projeção.

Como você já deve ser capaz de intuir, um ponto no espaço é representado no sistema mongeano como na figura 1.8.

Falando um pouco mais formalmente, um ponto  $P$  no espaço tridimensional é localizado por três coordenadas,  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Através da projeção em dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , é possível se especificar as três coordenadas de  $P$ .

A reta resultante da intersecção dos planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  é denominada *linha de terra* (*L.T.*).

Tanto o plano  $\pi_2$  como as figuras nele resultantes são rotacionados em torno da L.T. de modo a ficarem coplanares com  $\pi_1$ , como é indicado na figura 1.9.

Assim, a posição de um dado ponto  $P$  pode ser totalmente descrita por suas projeções em  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , dispostos em um único plano (figura 1.10), denominado *épura*. Na *épura*, logo acima e abaixo da linha de terra são escritos os algarismos correspondentes aos planos que dão origem a ela (figura 1.10).

O segmento que une as projeções do ponto  $P$ ,  $P_1$  e  $P_2$ , é denominada *linha de chamada*. Perceba que ela deve ser perpendicular à linha de terra. Convencionaremos neste curso, designar o plano  $\pi_1$ , que contém os eixos  $x$  e  $y$ , de plano horizontal de projeção e o plano  $\pi_2$ , que contém os eixos  $x$  e  $z$ , de plano vertical de projeção. A projeção de um ponto no plano horizontal de projeção é denominada projeção horizontal, e a projeção sobre o plano vertical, de projeção vertical.

Em resumo, pode-se perceber que um ponto no espaço pode ser completamente especificado dadas as suas projeções ortogonais em dois planos perpendiculares

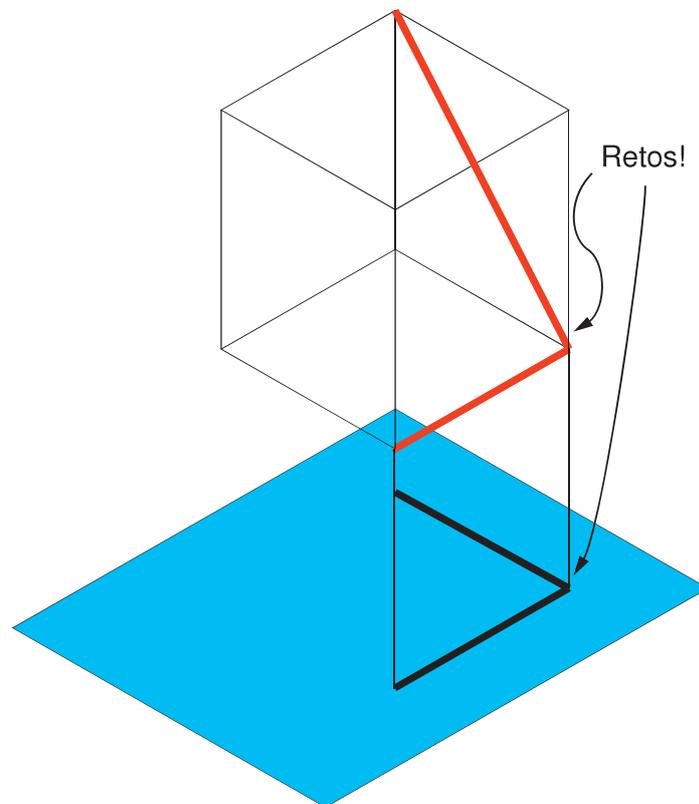


Figura 1.6: O perpendicularismo se mantém.

(afinal de contas, temos as três coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de cada ponto), designados plano horizontal de projeção, e plano vertical de projeção.

Os planos vertical e horizontal de projeção, dividem o espaço em quatro diedros como é mostrado na figura 1.11.

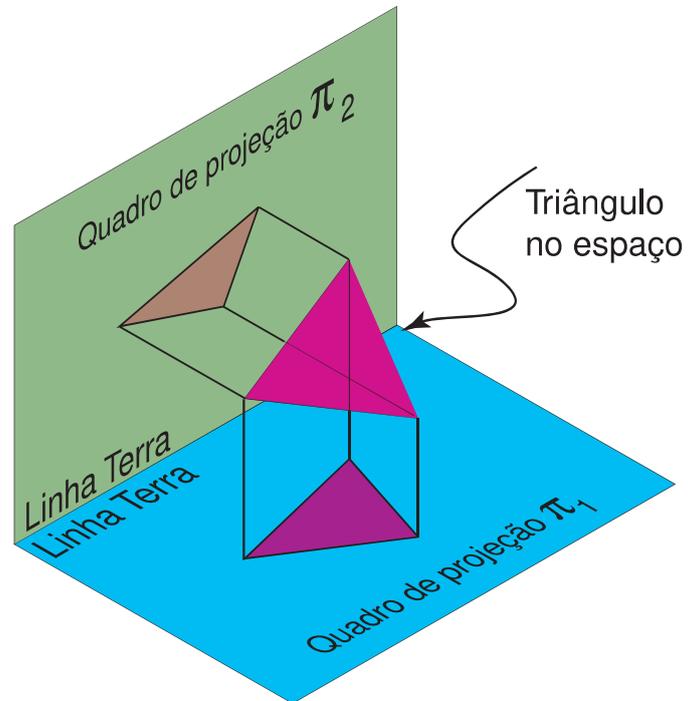


Figura 1.7: Sistema de Monge.

**Exercício 1:** Um ponto pode estar em qualquer um dos quatro diedros. Faça quatro épuras indicando a posição de pontos nos quatro diedros diferentes.

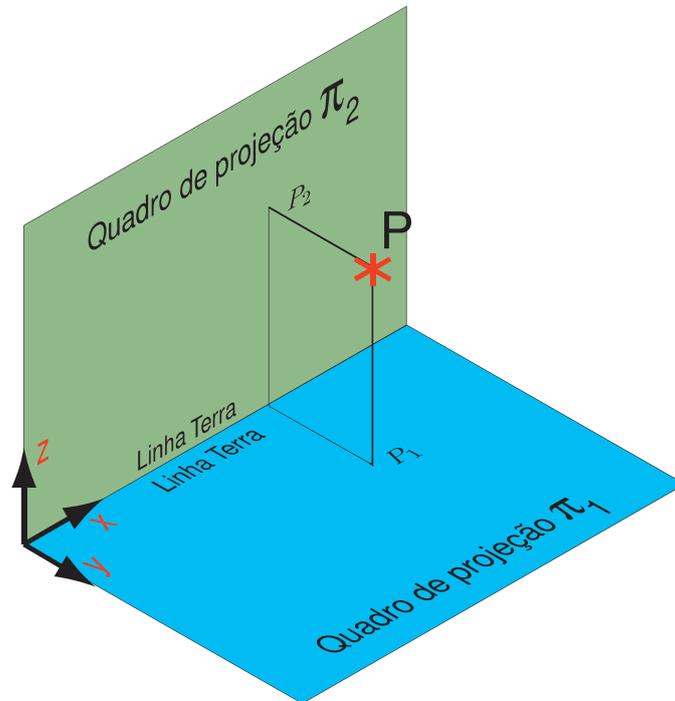


Figura 1.8: Projeção de um ponto em dois planos perpendiculares entre si.

**Exercício 2:** Escreva uma justificativa simples para o fato das projeções de um ponto estarem sobre uma reta perpendicular à linha de terra.

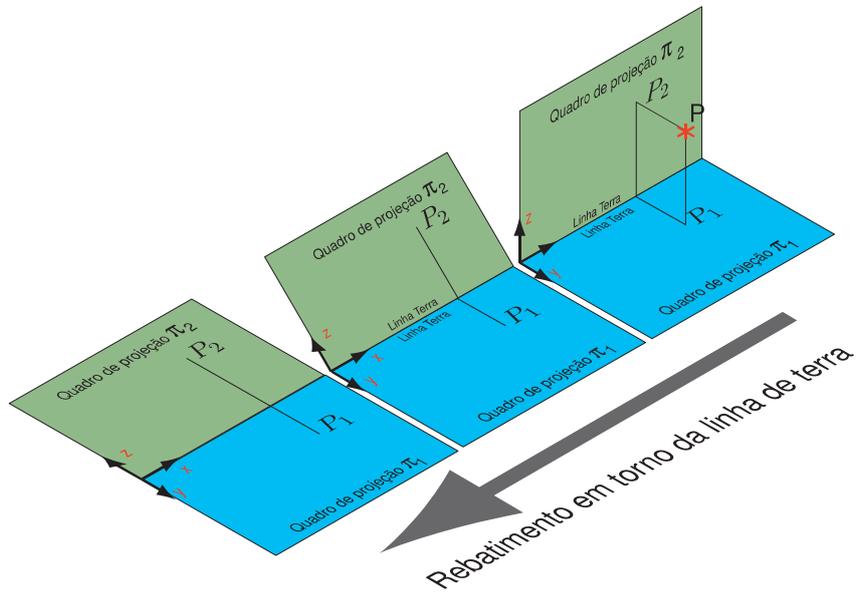


Figura 1.9: Rotação das figuras contidas em  $\pi_2$  em torno da linha de terra LT.

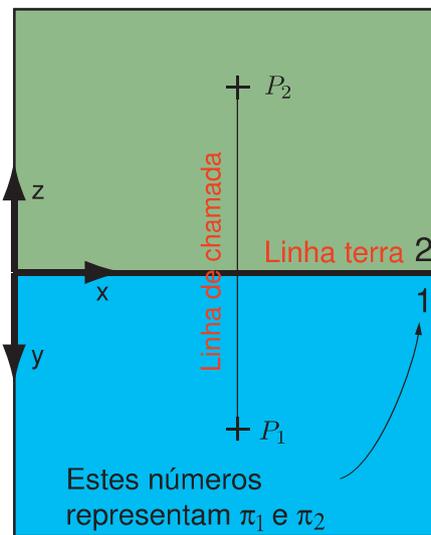


Figura 1.10: Épura.

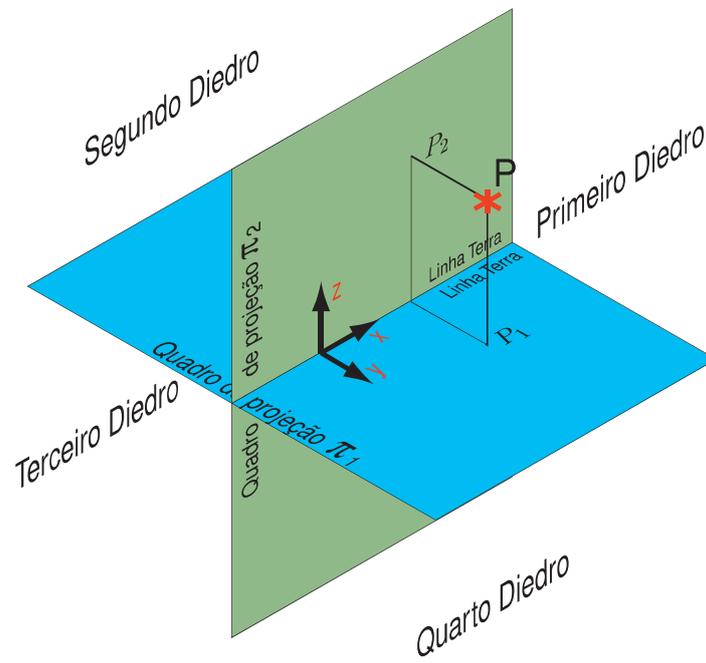


Figura 1.11: Divisão do espaço em quatro diedros.

## Capítulo 2

# Pontos e Retas

### 2.1 Objetivos

Os elementos geométricos principais para a resolução de qualquer problema espacial são pontos e retas. Neste capítulo, examinaremos esses entes, procurando no processo de aprendizado, fomentar o amadurecimento de idéias relacionadas ao espaço geométrico representado no sistema de Monge.

### 2.2 Estudo do ponto

A distância  $z$  de um ponto  $P$  ao plano horizontal de projeção é denominada cota, como na geometria cotada, que você já estudou no primeiro semestre. Na *épura*, a cota é a distância acima da linha de terra até a projeção vertical do ponto, como é mostrado na figura 2.1. Um ponto pertencente ao plano horizontal de projeção tem cota nula, e portanto, na *épura*, sua projeção vertical deve estar na linha de terra. A coordenada  $y$  de um ponto  $P$  é denominada afastamento. Na *épura*, o afastamento é a distância abaixo da linha de terra até a projeção horizontal do ponto. A coordenada  $x$ , fixada a partir de uma origem arbitrária, é denominada abscissa.

Um ponto pertencente ao plano vertical de projeção tem coordenada  $y$  nula, e portanto, sua projeção horizontal deve estar sobre a linha de terra. É importante notar que é possível a existência de cotas e afastamentos negativos. Por exemplo, um ponto no segundo diedro tem cota positiva, mas afastamento negativo. Um ponto no terceiro diedro tem cota e afastamento negativos.

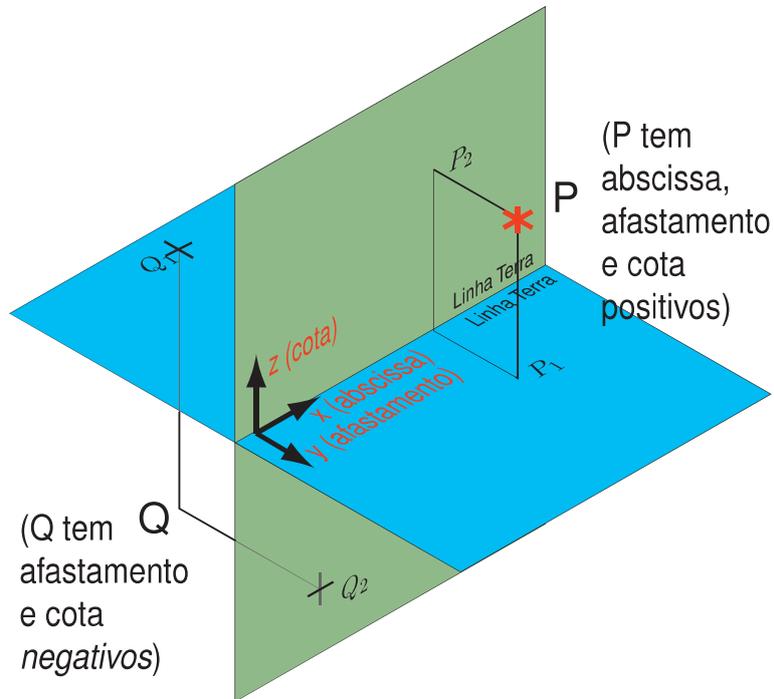


Figura 2.1: Cota, afastamento e abscissa de um ponto.

**Exercício 1:** Os pontos  $A, B, C$  e  $D$  são dados em *épura*. Determinar:

1. as projeções dos pontos  $A'$  e  $B'$ , simétricos de  $A$  e  $B$  com relação ao plano horizontal de projeção.
2. as projeções dos pontos  $C'$  e  $D'$ , simétricos de  $C$  e  $D$  com relação ao plano vertical de projeção.

	$B_2$ +	
$A_2$ +		
	$B_1$ +	2
		1
$A_1$ +		

	$D_1$ +
$C_1$ +	
	$D_2$ +
	2
	1
$C_2$ +	

## 2.3 Estudo da reta

### 2.3.1 Elementos principais

Uma forma de se especificar uma reta  $r$  é fornecendo dois pontos por onde ela passa. Uma outra seria através de suas projeções em  $\pi_1$  e  $\pi_2$  como é mostrado na figura 2.2. Perceba que já estamos usando a nova ferramenta (épura) que acabamos de apresentar. Há quatro pontos e dois segmentos de reta no desenho, mas eles representam apenas *um* segmento de reta e *dois* pontos.

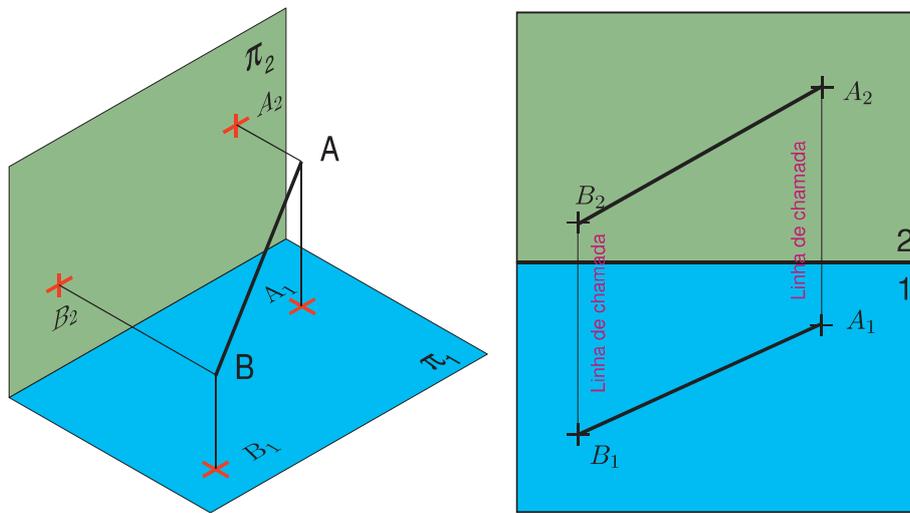


Figura 2.2: Projeções de uma reta na épura.

**Exercício 2:** São dados uma reta  $r$  e um ponto  $P \in r$ , representados em é pura. Determinar a projeção do ponto  $P$  em  $\pi_1$ .

Na designação das projeções da reta, usa-se como índice o número do plano de projeção correspondente. Assim, por exemplo, a projeção em  $\pi_2$  é designada por  $r_2$ . Os traços de uma reta são pontos resultantes das intersecções da reta com os planos de projeção. Um exemplo é mostrado na figura 2.3. É muito importante compreender a é pura associada.

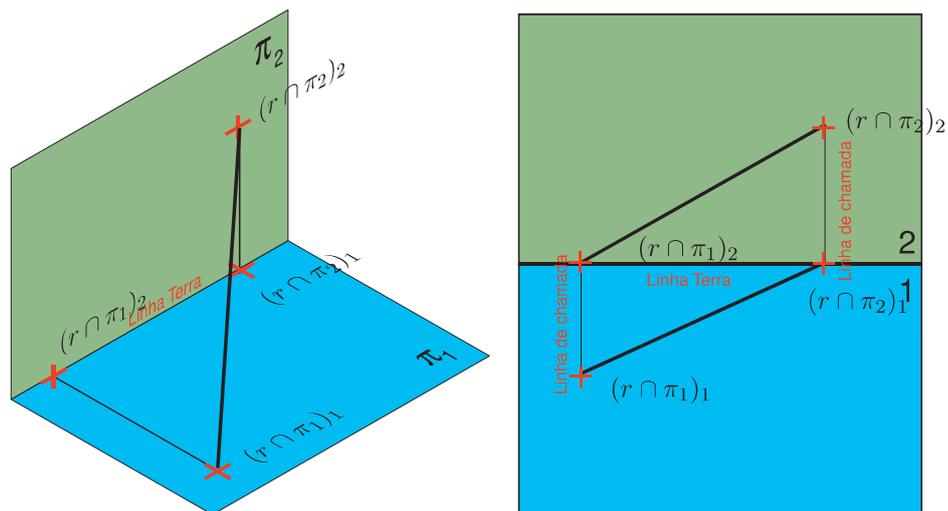
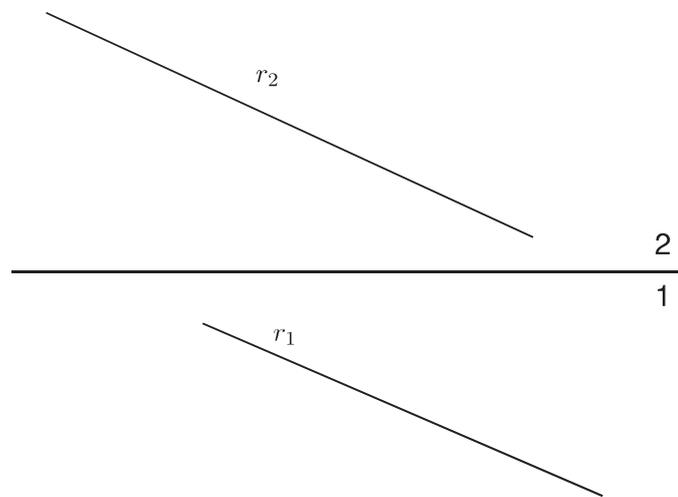


Figura 2.3: Traços de uma reta.

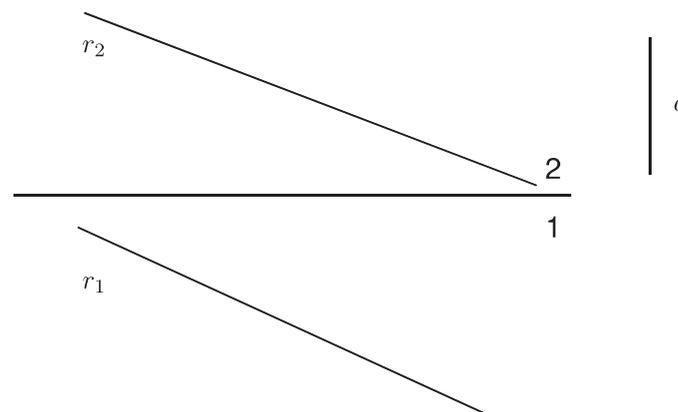
O traço de uma reta  $r$  no plano  $\pi_1$  é designada por  $r \cap \pi_1$  e no plano  $\pi_2$ ,  $r \cap \pi_2$ .

Veja que o traço no plano horizontal tem cota nula, e portanto, na *épura*, a projeção vertical de tal traço *deve estar sobre a linha de terra*. Raciocínio análogo pode ser feito para o traço no plano vertical. Note também que as linhas de chamada são sempre perpendiculares à linha de terra.

**Exercício 3:** Determinar os traços da reta  $r$  no plano horizontal  $\pi_1$  e vertical  $\pi_2$ . Se você acertou, deve ter marcado no papel quatro pontos.



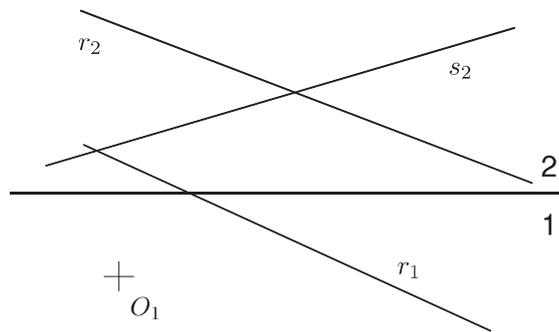
**Exercício 4:** Determinar os traços da reta  $r$  com os planos de projeção. Obter na reta  $r$  o ponto  $A$  de afastamento igual ao comprimento  $d$  e o ponto  $B$  de cota  $\frac{d}{2}$ .



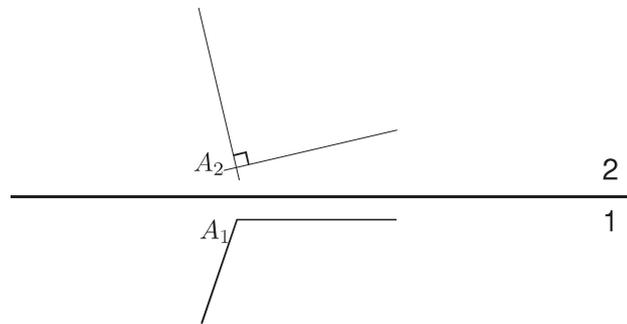
Faça todos os exercícios que agora são propostos. Alguns são desafios.

## 2.4 Exercícios Gerais

**Exercício 5:** Completar as projeções que faltam, sabendo-se que as retas  $r$  e  $s$  são concorrentes entre si e o ponto  $O$  pertence à  $s$ .

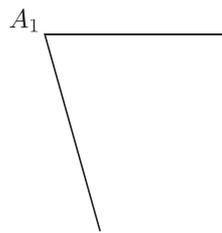
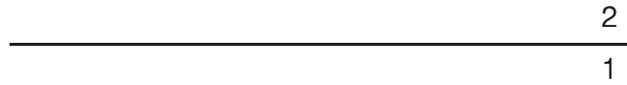
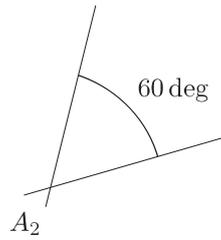


**Exercício 6:** Convença-se de que o ângulo  $\hat{A}$  (pense no espaço) mostrado na épura é reto<sup>a</sup>.



<sup>a</sup>Parece óbvio, mas nessa altura do campeonato, você já deve saber que não é!

**Exercício 7:** Convença-se de que o ângulo  $\hat{A}$  mostrado na *épura* não tem 60 deg.

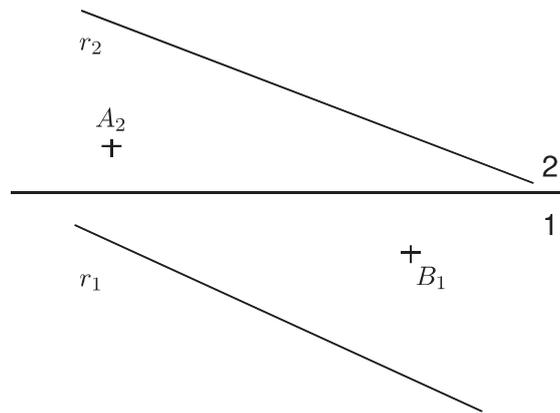


**Exercício 8:** Quantas retas no espaço formam um ângulo de 60 graus com  $\pi_1$  e são frontais?

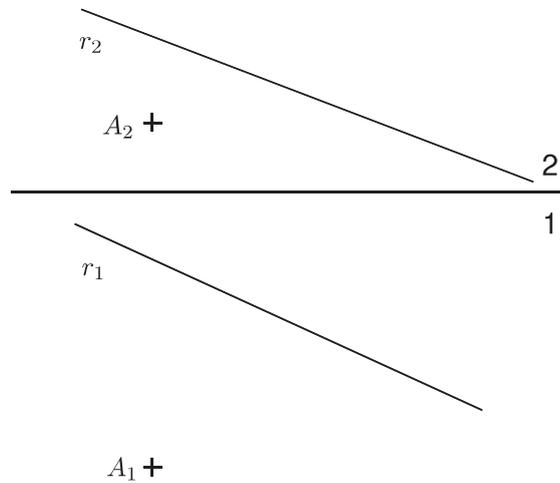
**Exercício 9:** Representar em *épura* três retas que fazem um ângulo de 60 graus com  $\pi_1$ .

**Exercício 10:** Traçar por um ponto *A* situado no primeiro diedro, as retas paralelas à  $\pi_2$  que fazem um ângulo de 60 deg com  $\pi_1$  e obter seus traços.

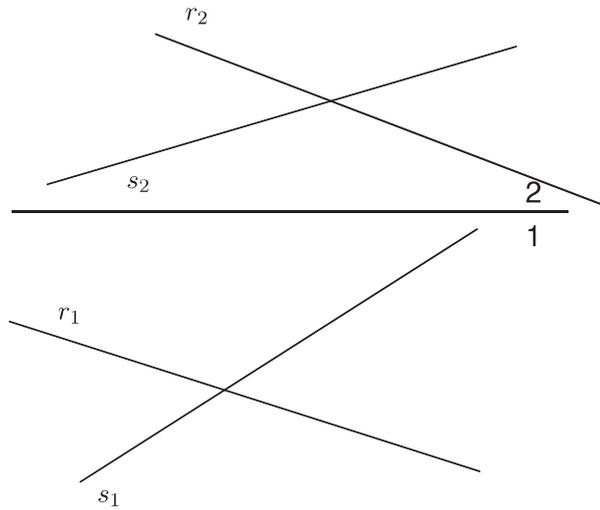
**Exercício 11:** Os pontos  $A$  e  $B$  definem uma reta  $s$  paralela à reta  $r$ . Determine as projeções de  $s$ .



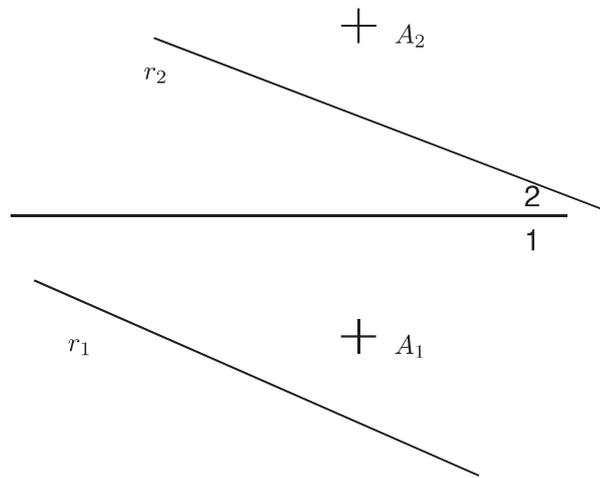
**Exercício 12:** Determinar a reta  $s$  paralela à  $\pi_1$  que passa por  $A$  e que se apóia na reta  $r$ .



**Exercício 13:** Determinar a reta perpendicular à  $\pi_2$  que se apóia nas retas  $r$  e  $s$ .



**Exercício 14:** Determinar as retas que passam por  $A$ , fazem um ângulo de 60 graus com  $\pi_1$ , e que se apóiam em  $r$ .



## Capítulo 3

# Planos

### 3.1 Objetivos

Prosseguiremos analisando os principais elementos da Geometria Descritiva. Veremos agora “planos”, e suas relações com pontos e retas que vimos no capítulo 2. Temos agora três elementos; assim o número de combinações, interrelações entre eles, é necessariamente maior que quando tínhamos apenas pontos e retas para estudar. Concretamente, as relações a ser estudadas são:

- Intersecção de plano com os quadros de projeção  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .
- Pertinência de ponto a plano;
- Intersecção de plano com plano;
- Intersecção de reta e plano.

Esses itens são os que veremos nas seções seguintes.

### 3.2 Intersecção de plano com os quadros de projeção

A intersecção de um plano qualquer com um quadro de projeção se chama *traço*. Assim, a intersecção de um plano  $\alpha$  com  $\pi_1$  se chama *traço de  $\alpha$  em  $\pi_1$*  e é simbolizado por  $\alpha \cap \pi_1$ . Caso análogo acontece com a intersecção com  $\pi_2$  (veja figura 3.1).

Se você atentar bem,  $\alpha \cap \pi_1$  e  $\alpha \cap \pi_2$ , que são retas, se interceptam em um ponto  $P^1$  pertencente à linha de terra. Isso deveria realmente acontecer, pois a linha de terra é resultado da intersecção  $\pi_1 \cap \pi_2$ , e intersecção de reta e plano é um ponto. Daí:

$$\begin{aligned}(\pi_1 \cap \pi_2) \cap \alpha &= P \\ (\pi_1 \cap \alpha) \cap (\pi_2 \cap \alpha) &= P\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>A rigor,  $\{P\}$ , mas vamos relaxar.

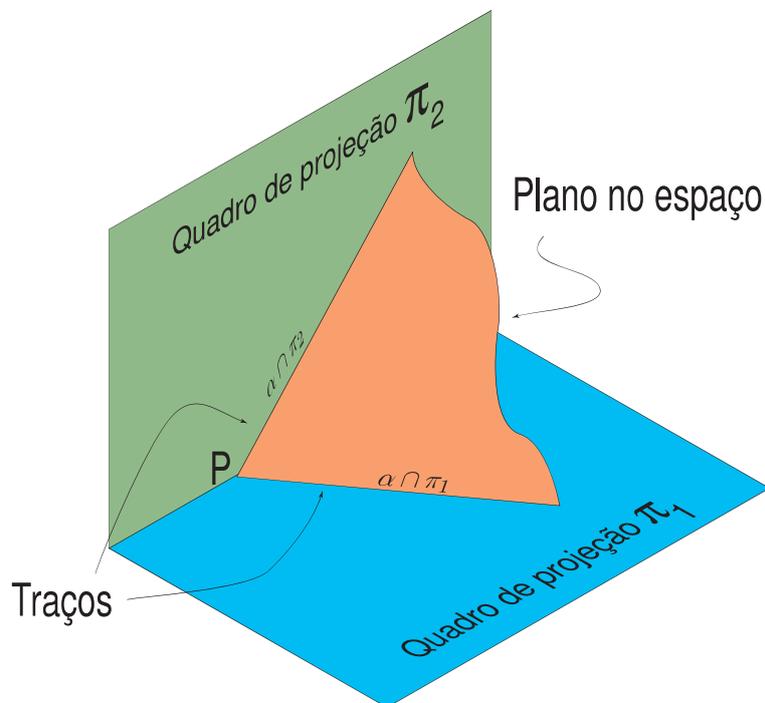


Figura 3.1: Traços de um plano no espaço.

A écura fica então como a figura 3.2.

A figura 3.2 é realmente importante. Note que cada traço do plano  $\alpha$ , que são retas, tem *duas* projeções. Por exemplo, a reta  $\alpha \cap \pi_1$  tem as projeções  $(\alpha \cap \pi_1)_1$  e  $(\alpha \cap \pi_1)_2$ . Ocorre que a reta  $(\alpha \cap \pi_1)_1$  está exatamente sobre o plano  $\pi_1$  e a reta  $(\alpha \cap \pi_1)_2$ , exatamente sobre  $\pi_2$ . Então, para evitarmos confusão de linhas, símbolos e índices, convencionaremos que quando um elemento geométrico (ponto, reta, plano, figura, etc.) estiver sobre<sup>2</sup> um dos planos de projeção<sup>3</sup>, representaremos apenas a projeção mais significativa, ou seja aquela que não coincidir com a linha de terra. Deste modo, como essa simplificação, a écura da figura 3.2 fica sendo como mostrada na figura 3.3

Um plano no espaço fica definido quando são dados três de seus pontos, um ponto e uma reta a ele pertencentes; duas retas coplanares; sua normal (lembra-se do curso de *Álgebra Linear*?) e um ponto, uma reta contida no plano e o requisito de que o plano deve ser paralelo a uma outra reta, etc, etc, etc. Realmente, existem várias formas de se especificar um plano no espaço, mas *convencionaremos* que um plano somente é conhecido se os traços nos planos de projeção são dados.

<sup>2</sup>Um ponto *pertence* a um plano e retas, planos e figuras estão *contidas* em um plano

<sup>3</sup>Se um elemento está sobre um dos planos de projeção, então sua projeção sobre o outro plano será coincidente com a linha terra

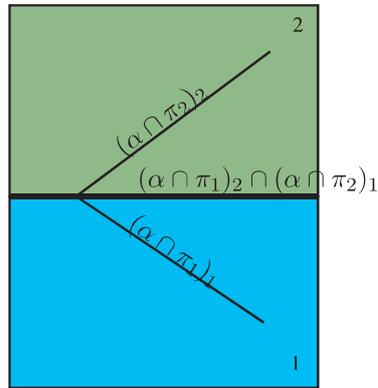


Figura 3.2: Épura dos traços de um plano.

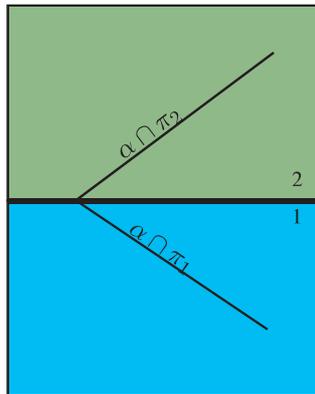


Figura 3.3: Épura simplificada dos traços de um plano.

Como exemplo, suponha que são dados três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  pertencentes a um plano  $\alpha$ , e pede-se determinar os traços de  $\alpha$ . Para achar um ponto pertencente ao traço em  $\pi_1$ , basta unir dois pontos dados, digamos  $A$  e  $B$ , e determinar o traço da reta  $AB$  em  $\pi_1$ , com foi visto no capítulo 2 (veja figura (fig:TracosReta)). Determinando-se os traços de, digamos,  $AB$  e  $AC$ , nos planos de projeção, e ligando pontos correspondentes, pode-se determinar os traços do plano  $\alpha$ . A situação toda está ilustrada na figura 3.4.

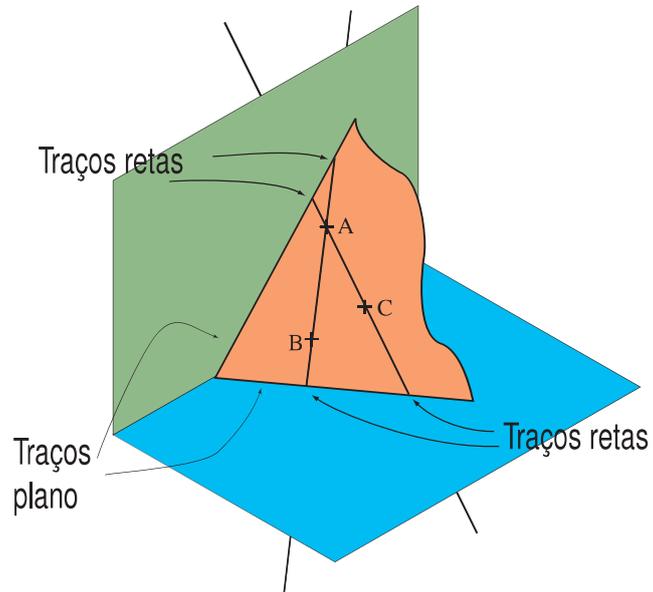
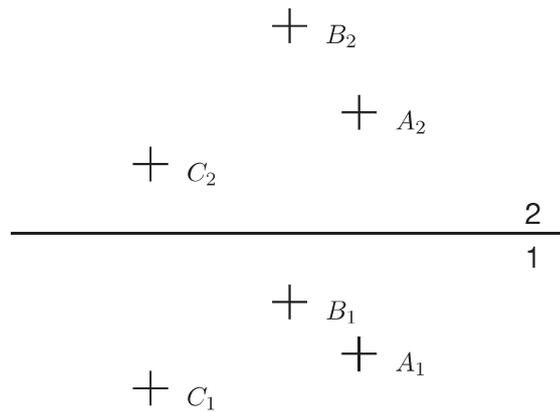


Figura 3.4: Traços de um plano e traços de retas nele contidas.

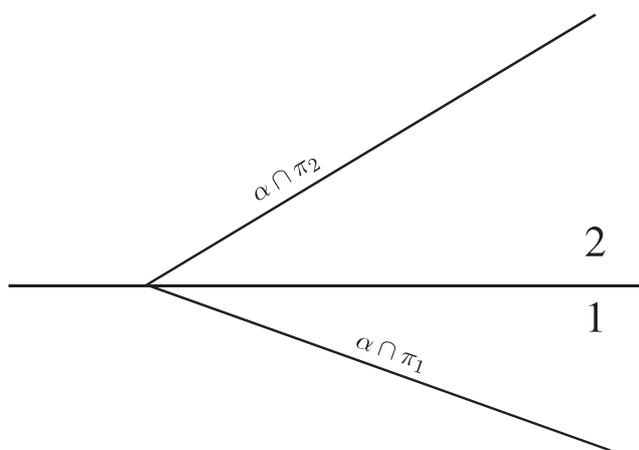
**Exercício 1:** Determinar os traços do plano  $\alpha$  definido pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  indicados na *épura* abaixo.



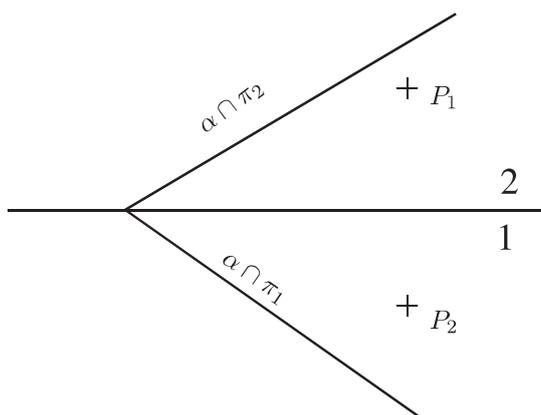
### 3.3 Pertinência de ponto a plano

Para se determinar se um ponto  $P$  pertence a um plano  $\alpha$ , deve-se recair primeiro no problema da pertinência de ponto a reta. Se  $r \subset \alpha$  e  $P \in r$ , então  $P \in \alpha$ .

**Exercício 2:** Seja  $\alpha$  dado pelos seus traços nos planos de projeção. Forneça uma reta qualquer  $r$  contida em  $\alpha$  e seus traços.



**Exercício 3:** Verifique se o ponto  $P$  pertence à  $\alpha$ .



Um problema natural que pode surgir para você é a determinação do ponto de uma determinada reta que tem distância zero a um plano, ou seja, a intersecção

de uma reta com um plano. Para se resolver esse problema, é necessário primeiro atacar outro, que é a intersecção entre dois planos.

### 3.4 Intersecção de plano com plano

Partimos do fato que a intersecção entre dois planos é uma reta <sup>4</sup>. Ora, se é uma reta, para determiná-la, bastam dois pontos. Seja a épura na figura 3.5 onde estão representados dois planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

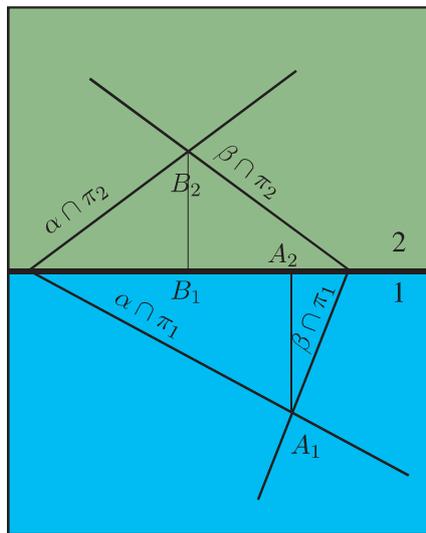


Figura 3.5: Intersecção de dois planos: uma conjectura.

Uma conjectura plausível é afirmar que os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à intersecção  $\alpha \cap \beta$ . E realmente pertencem? A resposta é sim, pelo seguinte argumento:

$$A = (\pi_2 \cap \alpha) \cap (\pi_2 \cap \beta) \Rightarrow A \in (\alpha \cap \beta)$$

$$B = (\pi_1 \cap \alpha) \cap (\pi_1 \cap \beta) \Rightarrow B \in (\alpha \cap \beta)$$

A intersecção entre os planos é mostrada na figura 3.6.

<sup>4</sup>Deixemos de lado casos patológicos

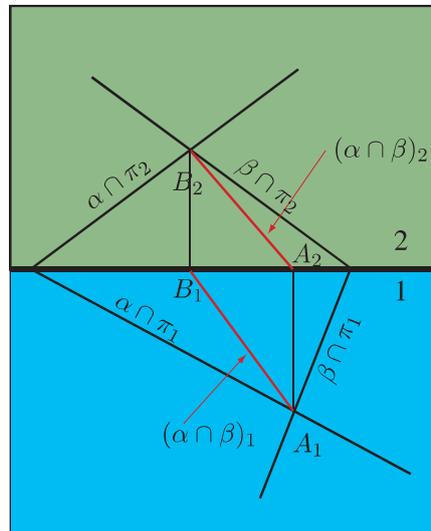


Figura 3.6: Intersecção de dois planos: solução

**Exercício 4:** Sejam dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  e uma reta  $r \subset \beta$ . Determine  $r \cap \alpha$ .

No último exercício, você deve ter concluído que a intersecção  $r \cap \alpha$  é dada por  $r \cap (\alpha \cap \beta)$ , sendo que  $\alpha \cap \beta$  foi determinado em exercício anterior.

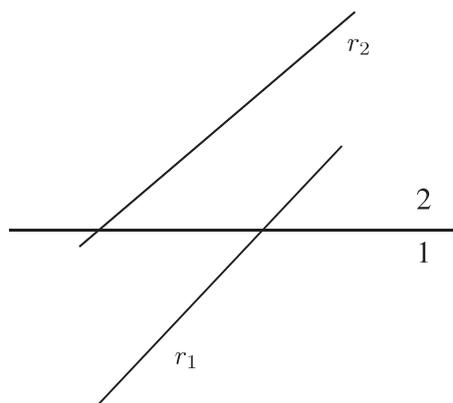
A grande lição é que para se determinar a intersecção de uma reta com um plano, é fundamental ter à disposição um plano que passe pela reta. Se esse plano não é dado, criamos um em uma posição *arbitrária*<sup>5</sup>.

### 3.5 Intersecção de reta com plano

Da última seção tiramos que para se determinar a intersecção de reta com plano, é necessário primeiro criarmos um plano que contenha a reta. Existem infinitos planos, basta escolher um!

Suponha que seja dada uma reta no espaço e seja pedido que se passe um plano qualquer por ela. Pensando em termos de *épura*, a única restrição é que os traços do plano passem pelos traços da reta nos planos de projecção. Só.

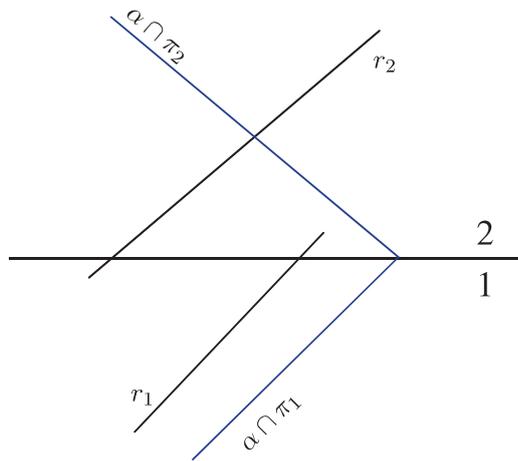
**Exercício 5:** Seja a reta  $r$ . Dê um plano arbitrário que contenha  $r$ .



Agora suponha que no exercício anterior seja acrescido um plano  $\alpha$ , e que seja pedido a intersecção de  $\alpha$  com  $r$ . Sei que você sabe resolver!

<sup>5</sup>Arbitrária, e não “aleatória” como muitos estudantes dizem. Esse erro dá até arrepios!

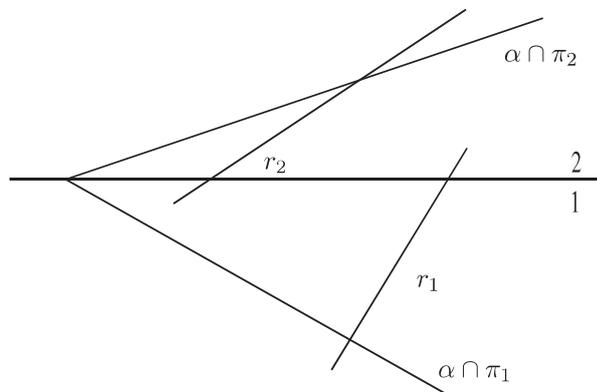
**Exercício 6:** Sejam a reta  $r$  e o plano  $\alpha$ . Determine  $r \cap \alpha$ .



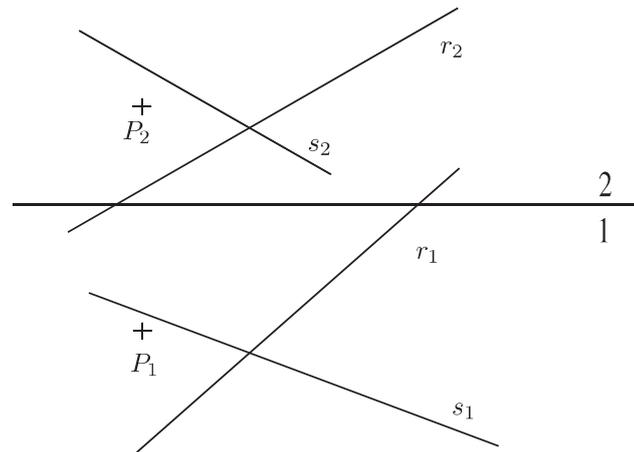
### 3.6 Exercícios Gerais

**Exercício 7:** São dados três planos no espaço. Pede-se a intersecção entre eles. Quais são as possibilidades para o resultado da intersecção?

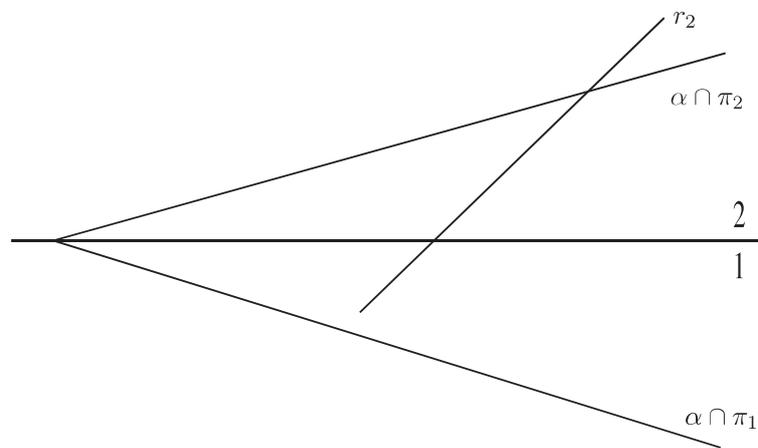
**Exercício 8:** Verifique se a reta  $r$  pertence ou não ao plano  $\alpha$  dado pelos seus traços.



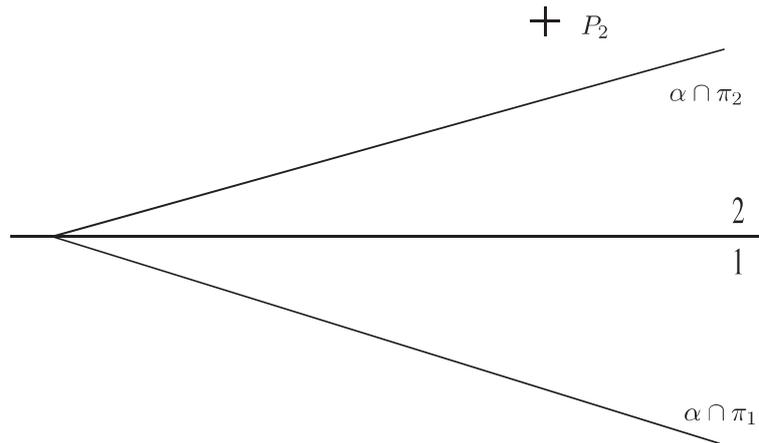
**Exercício 9:** Verifique se o ponto  $P$  pertence ou não ao plano  $\alpha$  definido pelas retas  $r$  e  $s$  concorrentes.



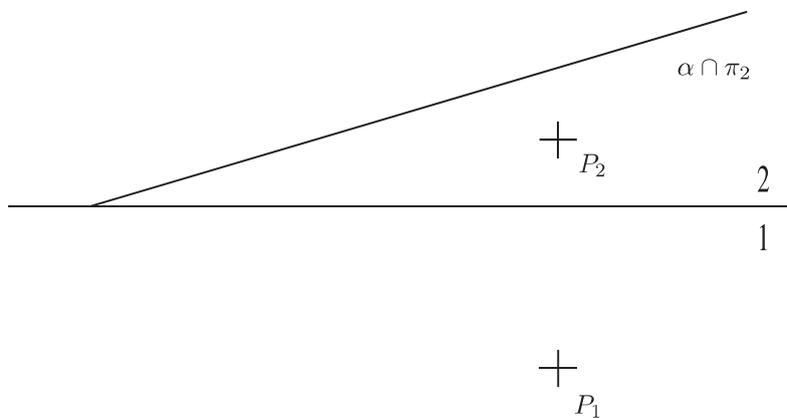
**Exercício 10:** São dados um plano  $\alpha$  e uma reta  $r \subset \alpha$ . Determine a projeção de  $r$  sobre o plano horizontal  $\pi_1$ .



**Exercício 11:** Seja um ponto  $P$  pertencente a um plano  $\alpha$ . Determine a projeção de  $P$  sobre o plano horizontal  $\pi_1$ .



**Exercício 12:** Determinar a reta  $r$  normal ao plano  $\alpha$ , passando pelo ponto  $P \in \alpha$ .



## Capítulo 4

# Métodos

### 4.1 Objetivos

Veremos agora métodos geométricos poderosos para atacar problemas mais difíceis, e ao mesmo tempo que estudamos, você verá que a sua compreensão da Geometria Descritiva aumenta. Se você realmente *aprender* o conteúdo dessa aula, ficará bem claro que a resolução de problemas em Geometria Descritiva não se baseia em um amontoado de regras arbitrárias, mas sim em operações bem fundamentadas na geometria projetiva.

Concretamente, veremos dois métodos: Resolução de problemas na épura por rotação de objetos e por mudança de planos de projeção.

### 4.2 Rotações

Um problema clássico é a determinação da *verdadeira grandeza*<sup>1</sup> de entes geométricos, como segmentos de reta e áreas de polígonos, quando estes estão representados na épura. Suponha que você deva obter o comprimento do segmento  $AB$  representado na épura da figura 4.1.

Naturalmente, você pode usar o teorema de Pitágoras, mas queremos que você use métodos puramente geométricos (régua e compasso). Como fazer?

Uma saída seria *rotacionar*  $AB$  em torno de um eixo perpendicular à  $\pi_2$  passando por  $B$ , até que  $AB$  fique paralelo à  $\pi_1$ . Daí é só medir com a régua a projeção de  $AB$  na nova posição. A operação está descrita na figura 4.2.

---

<sup>1</sup>Vimos o que é verdadeira grandeza na aula de Geometria Cotada no primeiro semestre

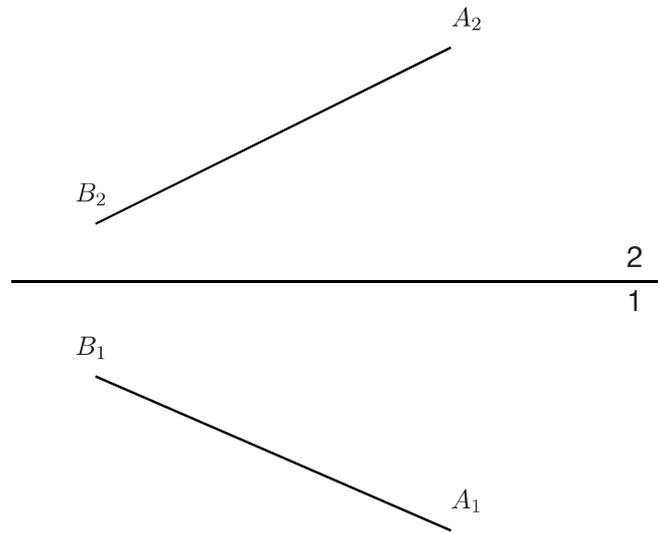


Figura 4.1: Segmento de reta na épora: obter sua VG.

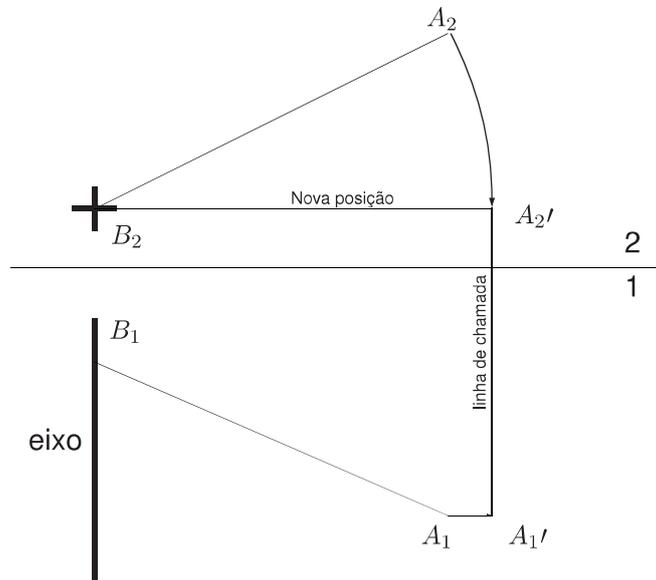
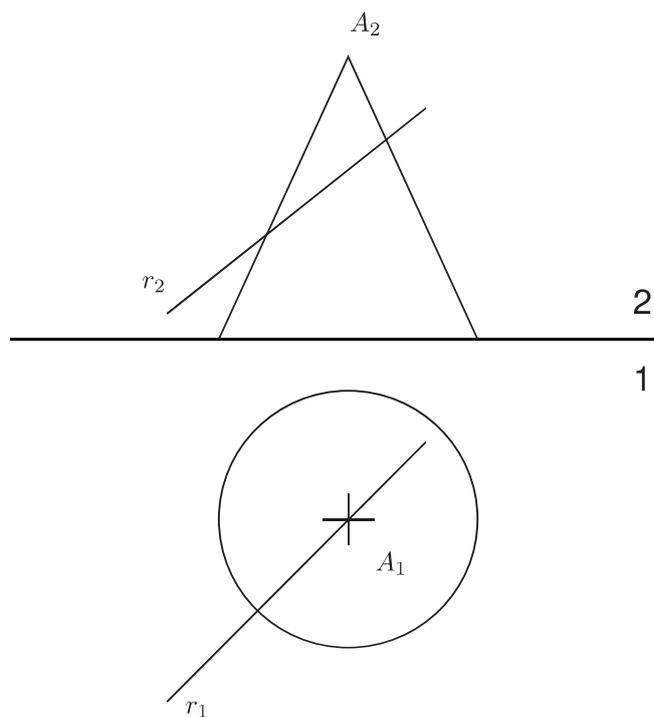


Figura 4.2: Rotação de Segmento.

**Exercício 1:** Determinar a intersecção a reta  $r$  com o cone  $\gamma$  usando a técnica da rotação. Note que  $r$  está em uma posição particular que facilita grandemente a resolução do problema.

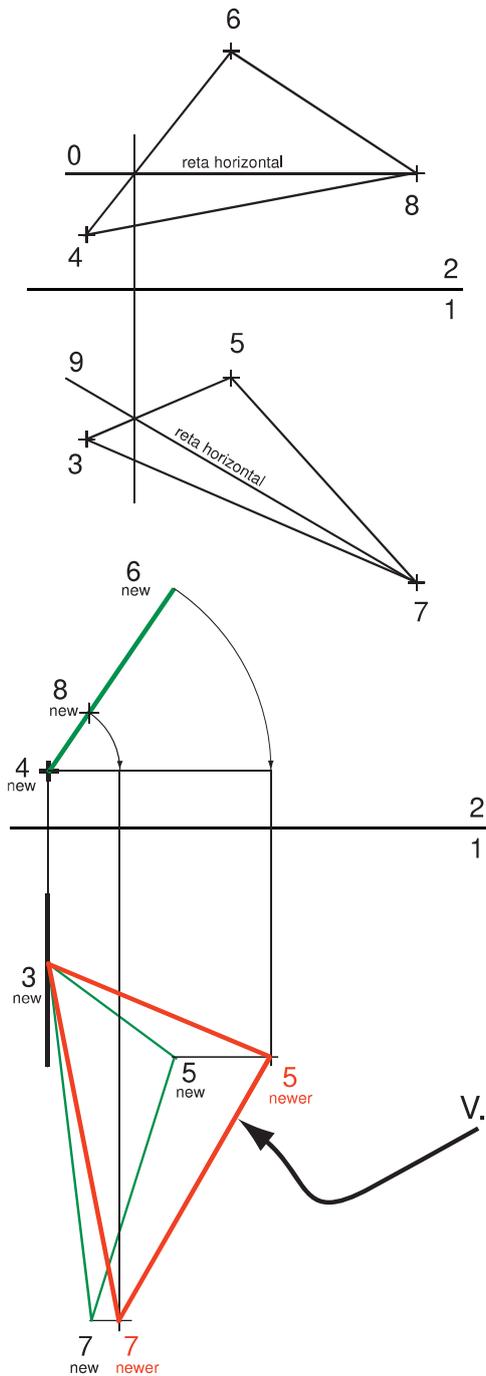


Um problema mais sofisticado seria saber se dada uma figura plana, pode-se, de alguma forma, rotacioná-la para obter a sua verdadeira grandeza. A resposta é afirmativa. Precisamos apenas de duas rotações consecutivas. Primeiramente, é necessário localizar uma reta horizontal  $h$  que servirá de “eixo”. Como não

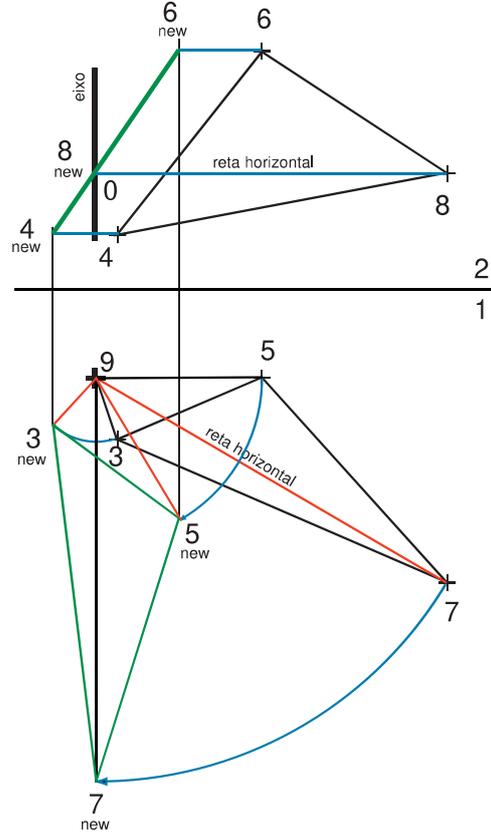
necessariamente este eixo está numa posição conveniente, isto é, perpendicular à  $\pi_2$ , fazemos uma rotação de  $h$  e de toda a figura, de forma que  $h$  se posicione perpendicularmente à  $\pi_2$ . O segundo passo é rotacionar a figura em torno da nova posição de  $h$ . A operação é ilustrada na figura 4.3.

Resolva novamente o exercício da intersecção do cone, mas agora note que a reta  $r$  está em uma posição genérica no espaço.

Primeiro passo:  
Identificar horizontal



Segundo passo:  
Rotacionar horizontal



Terceiro passo:  
Obter V.G.

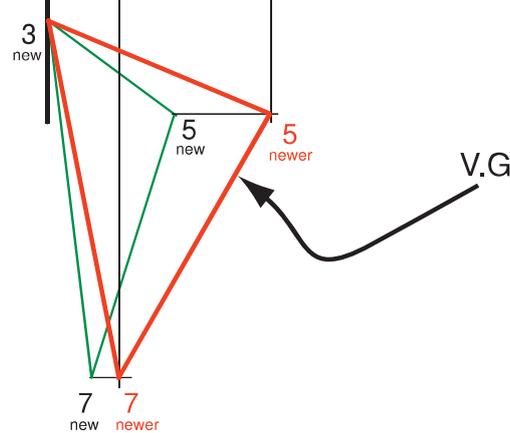
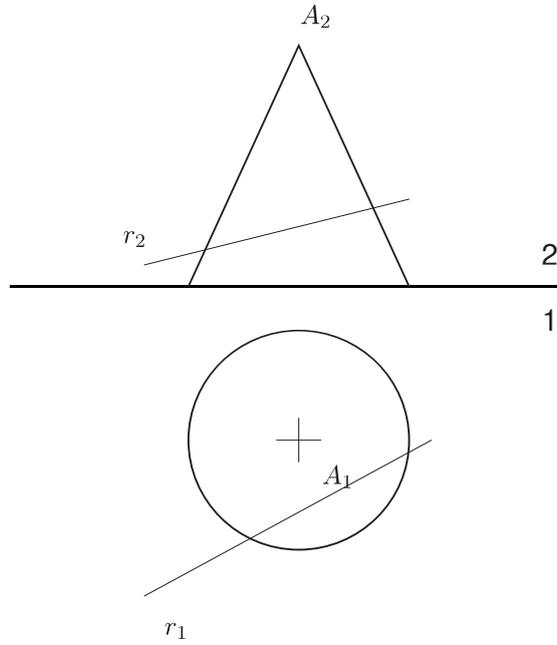


Figura 4.3: Rotação de uma figura no espaço.

**Exercício 2:** Determinar a intersecção a reta  $r$  com o cone  $\gamma$  usando a técnica da rotação.



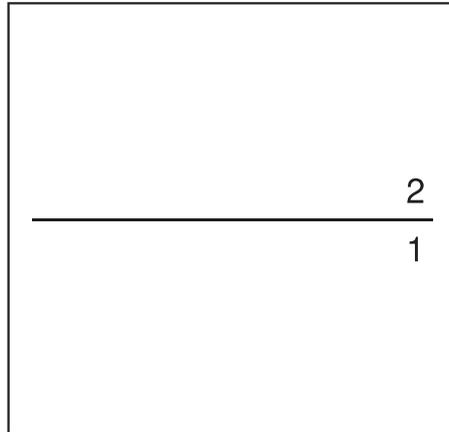


Figura 4.4: Épura tradicional.

### 4.3 Mudança de planos

A primeira coisa a ser feita é uma “mudança de mentalidade”. Desde que começamos o nosso curso, a épura sempre foi representada com a linha terra paralela à borda inferior do papel (ou do monitor!), como mostrado na figura 4.4

Nada impede que a linha terra fosse colocada de modo inclinado como ilustrado na figura 4.5

Ou ainda mais radicalmente, colocássemos *duas* linhas terra, como mostrado na figura 4.6.

E que situação a figura 4.6 estaria representando espacialmente? E se um ponto  $P$  fosse representado nessa épura com duas linhas de terra, quais seriam as posições das projeções de  $P$ ?

Para responder, veja a figura 4.7.

Note que a *cota* do ponto, ou a distância do ponto  $P$  à  $\pi_1$  é constante, independente da posição do plano vertical ( $\pi_2$ ,  $\pi_3$ , e outros arbitrariamente colocados).

Pode-se então colocar o plano vertical  $\pi_3$  onde quisermos, sendo que na épura, a cota dos pontos representada em  $\pi_3$  deve ser a mesma representada em  $\pi_2$ .

A essa operação de colocarmos planos de projeção adicionais chamamos de *mudança de planos*. Ela pode ser usada para a obtenção da VG de figuras no espaço.

Por exemplo, seja novamente o segmento  $AB$  da figura 4.1. A obtenção de sua VG por mudança de planos está mostrada na figura 4.8.

Resolva novamente o problema da intersecção da reta com cone usando mudança de planos.

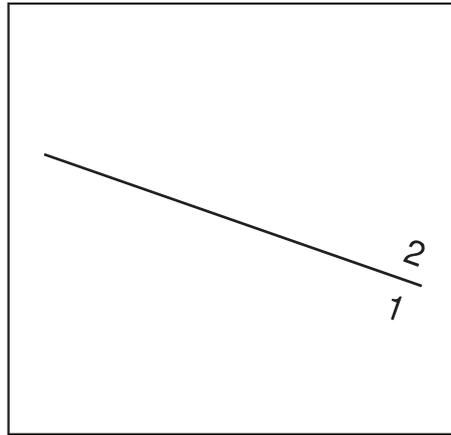


Figura 4.5: Também é é pura.

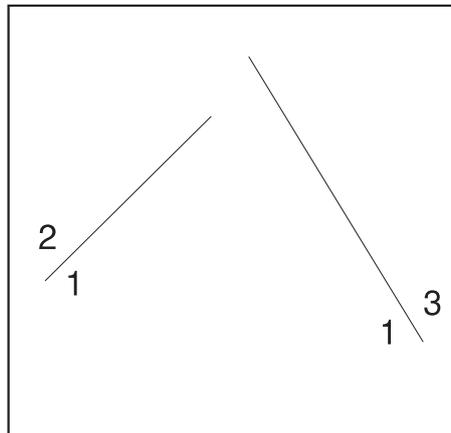


Figura 4.6: É pura generalizada.

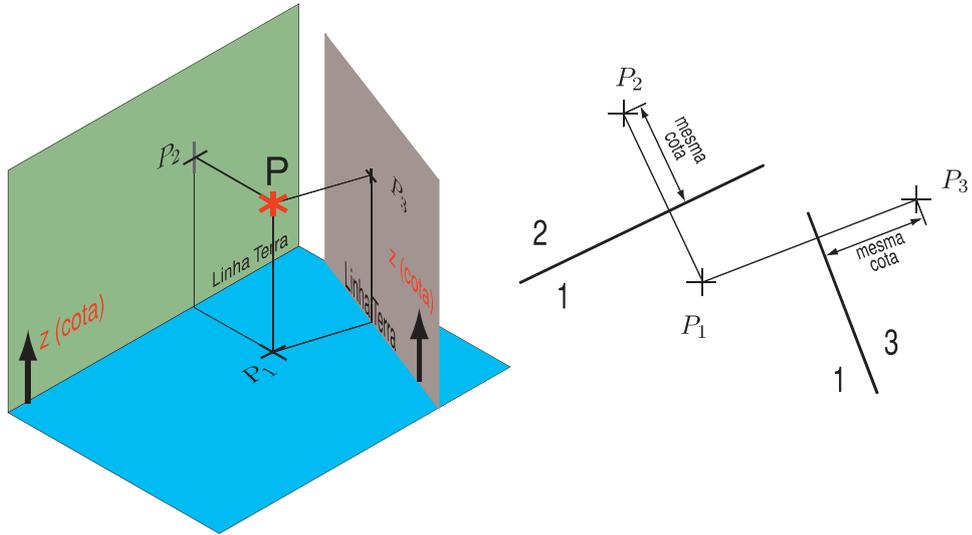


Figura 4.7: Épura generalizada mostrando projeção de ponto.

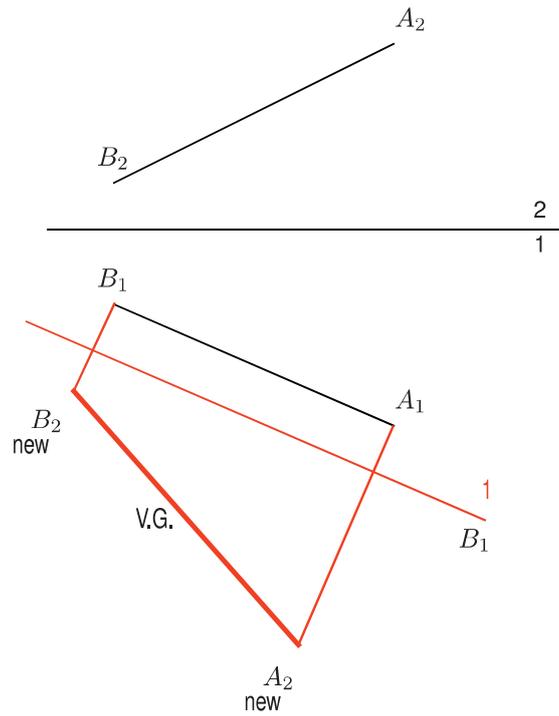
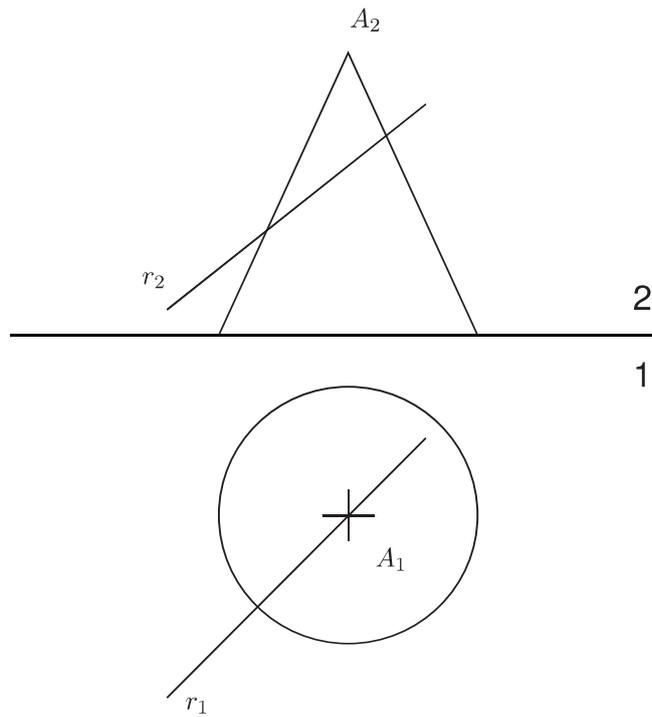


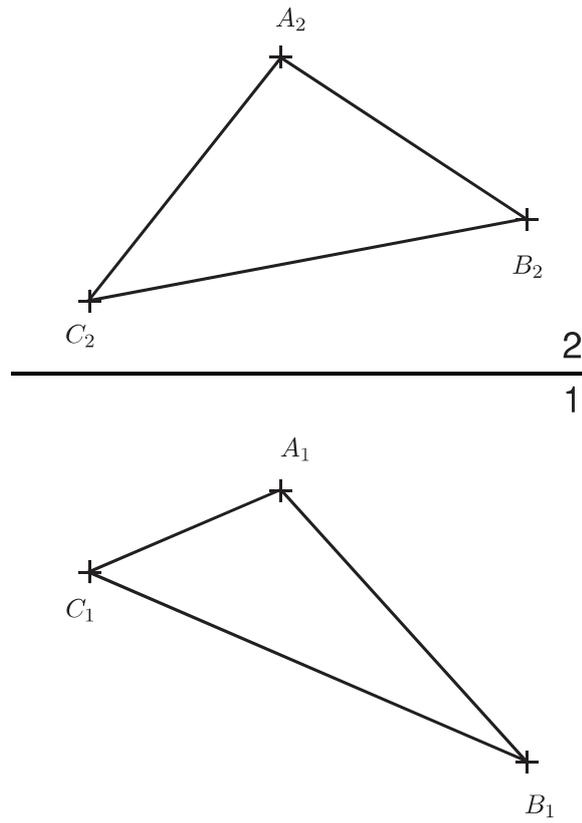
Figura 4.8: Obtenção de VG de segmento de reta.

**Exercício 3:** Determinar a intersecção a reta  $r$  com o cone  $\gamma$  usando a técnica da mudança de planos. Note que  $r$  está em uma posição particular que facilita grandemente a resolução do problema.

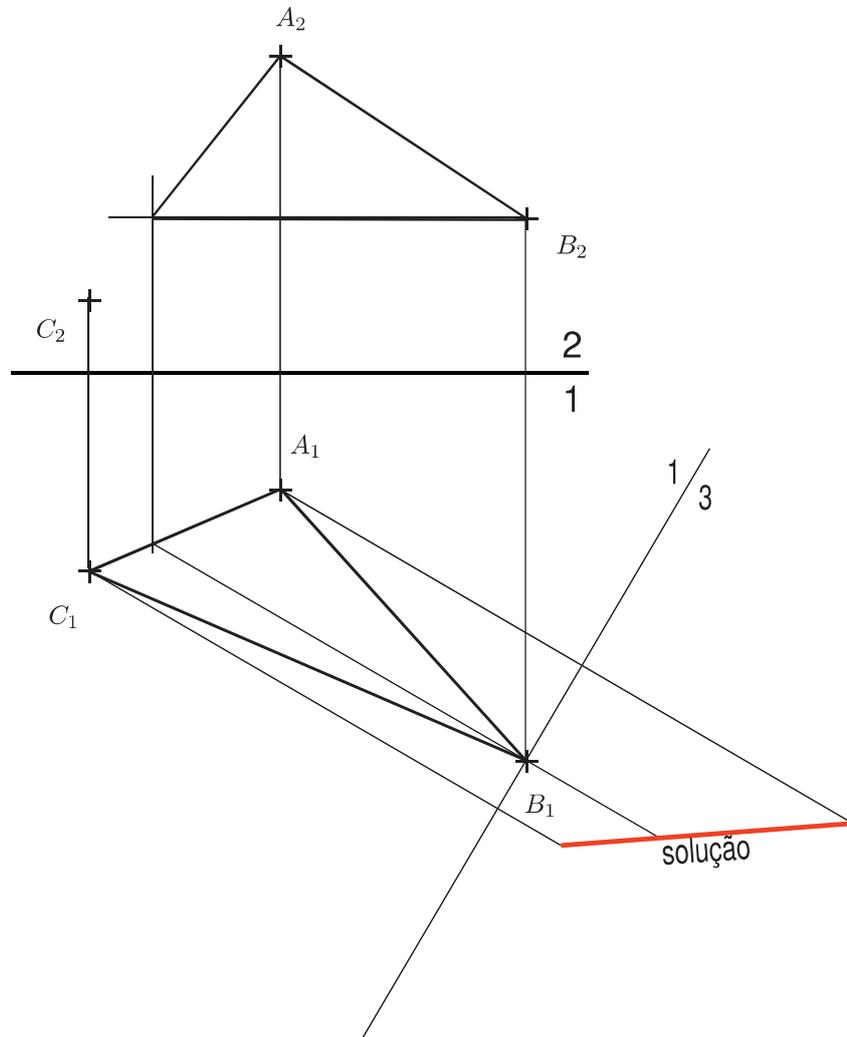


O próximo exercício é importante.

**Exercício 4:** Determinar um plano de projeção (sua linha de terra) perpendicular ao plano definido pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Além disso, determinar a projeção do triângulo  $ABC$  no novo plano de projeção (deve dar apenas um segmento de reta).



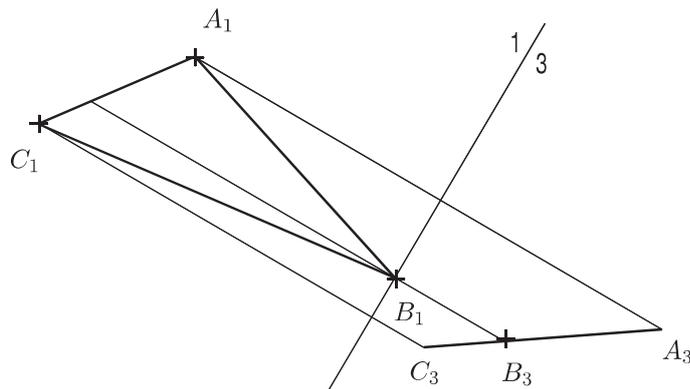
Como esse exercício é importante, aqui está a sua resolução:



O próximo problema será apenas um exercício de aplicação:

**Exercício 5:** Determinar a VG do triângulo  $ABC$  representado na *épura*. Note duas coisas:

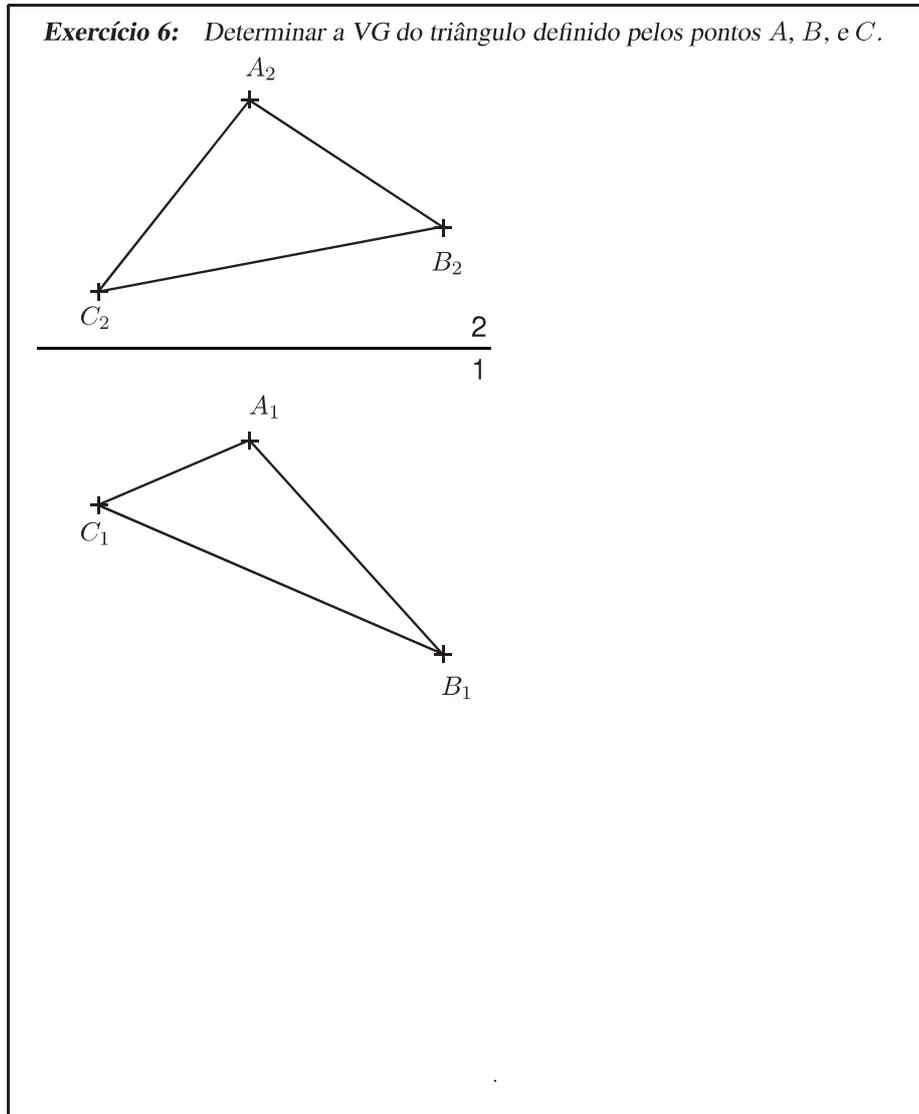
- A *épura* deste problema é igual a *épura* solução do exercício anterior;
- O triângulo está em uma posição particular.



Agora a próxima questão, natural, é perguntar se podemos usar o método de mudança de planos para se resolver o problema de determinar a VG de uma figura plana colocada em uma posição qualquer do espaço. A resposta é afirmativa, e se você realmente está entendendo a exposição, você já sabe qual é o procedimento. O procedimento de solução pode ser resumido assim:

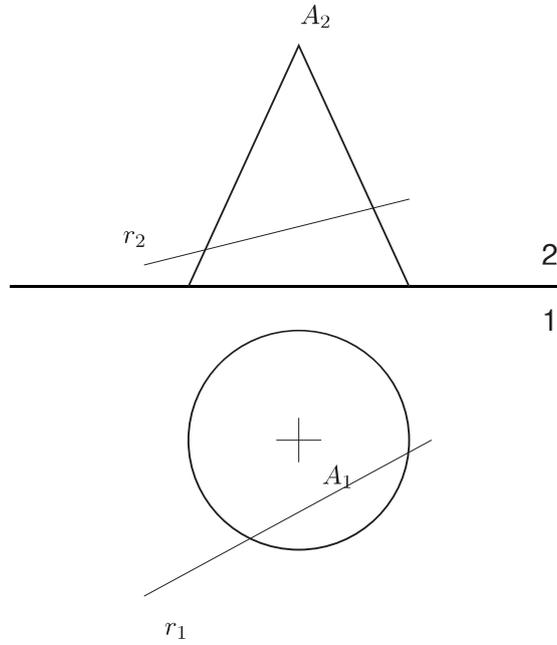
- “Mudar o plano de projeção” de modo a fazer com que a figura plana fique perpendicular ao novo plano de projeção;
- o resultado do passo anterior define um novo problema, que é o de se determinar a VG de uma figura em uma posição particular.

Resolva agora o problema completo:



Como aplicação do que acabamos de ver, resolva o “problema do cone” novamente, mas agora usando o novo método:

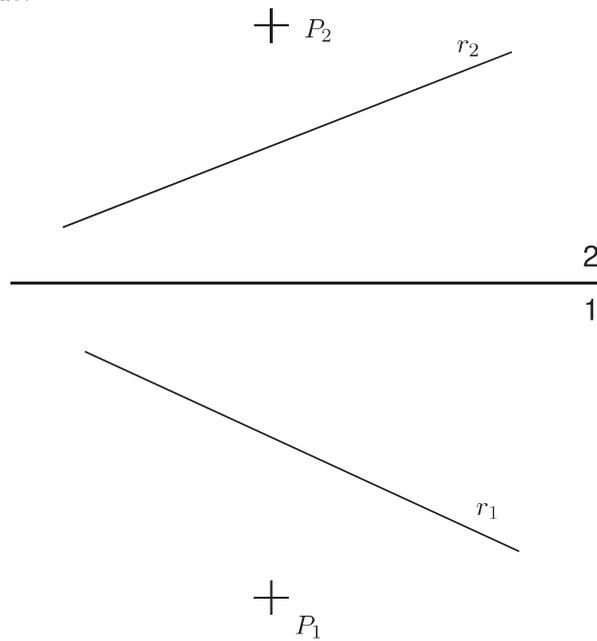
**Exercício 7:** Determinar a intersecção a reta  $r$  com o cone  $\gamma$  usando a técnica da mudança de planos de projeção.



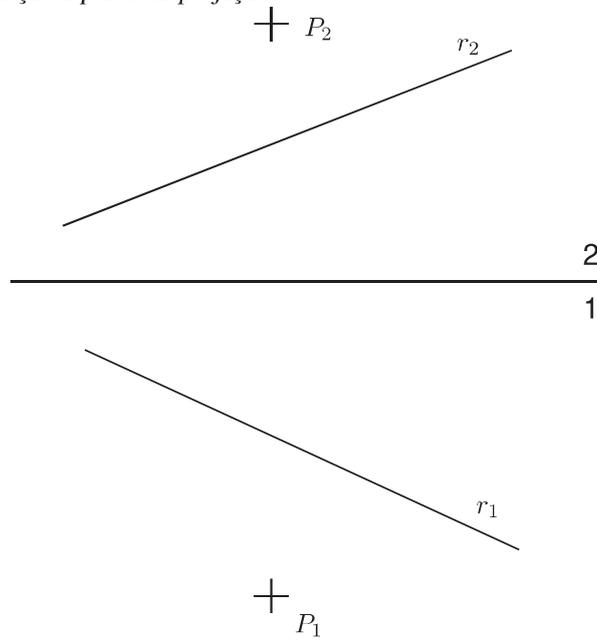
#### 4.4 Exercícios Gerais

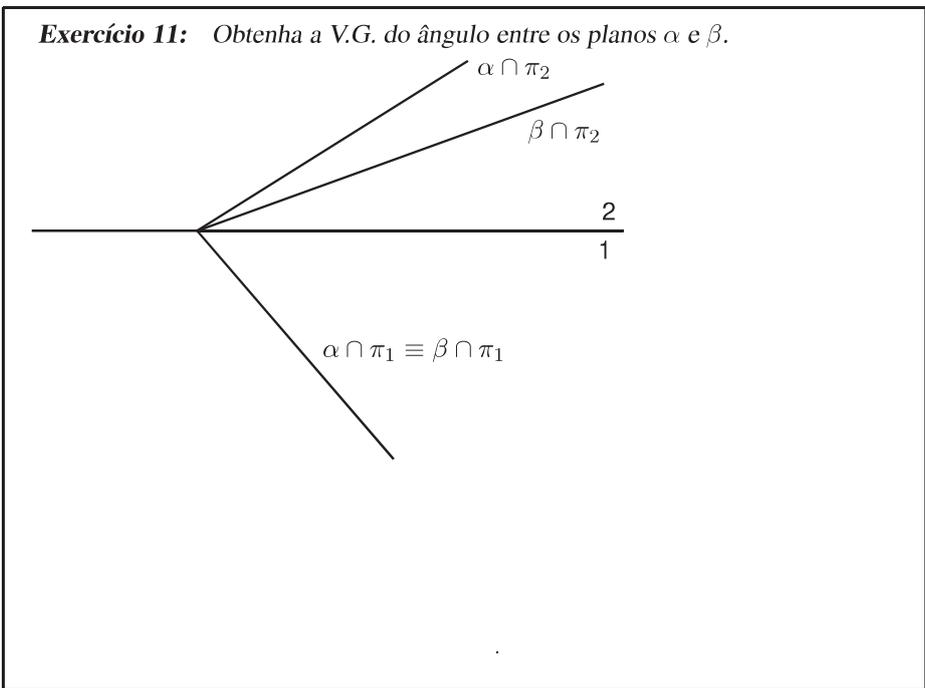
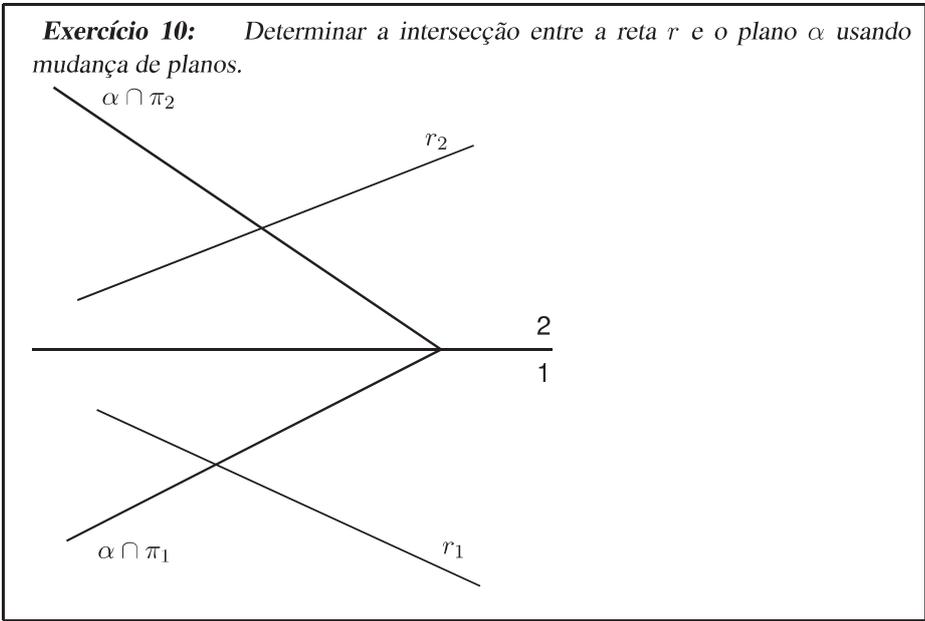
Faça os “Projetos” em folha separada.

**Exercício 8:** Determinar a distância entre a reta  $r$  e o ponto  $P$  usando o método da rotação.

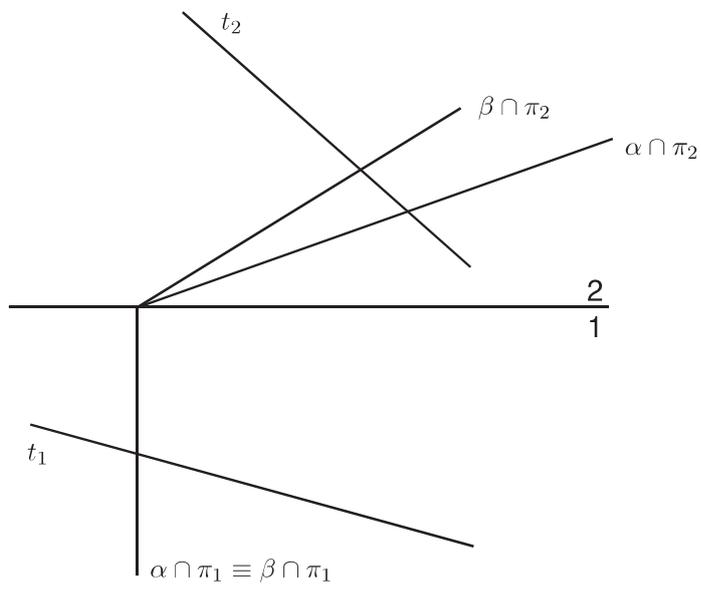


**Exercício 9:** Determinar a distância entre a reta  $r$  e o ponto  $P$  usando o método da mudança de plano de projeção.

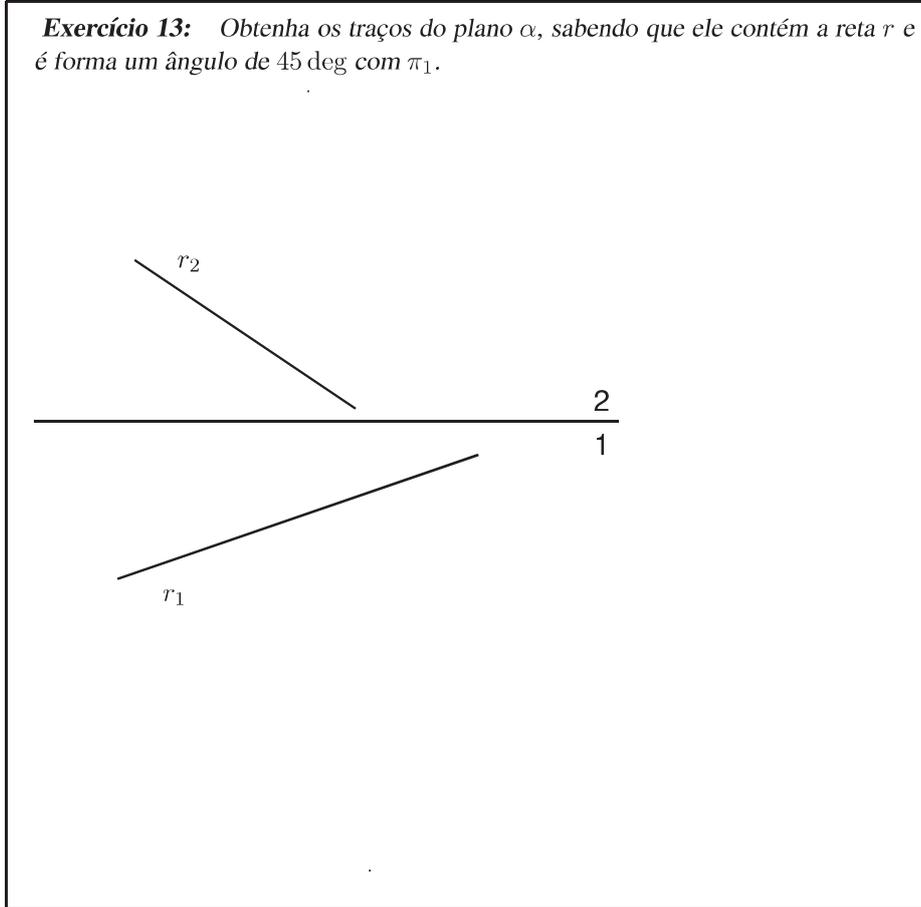




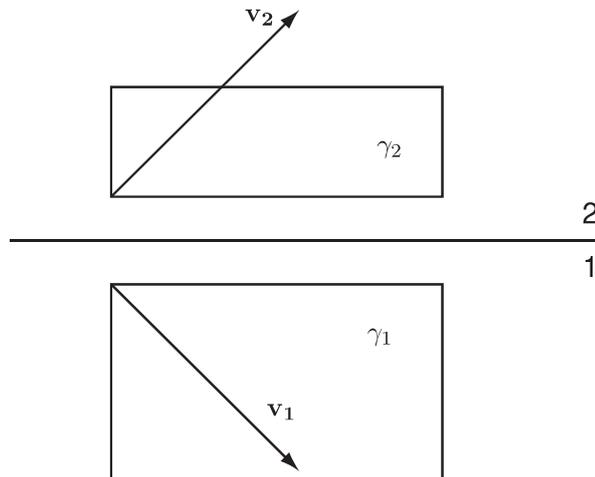
**Exercício 12:** Obtenha o ponto  $C$  da reta  $t$  que eqüidista dos planos  $\alpha$  e  $\beta$ .



**Exercício 13:** Obtenha os traços do plano  $\alpha$ , sabendo que ele contém a reta  $r$  e é forma um ângulo de 45 deg com  $\pi_1$ .

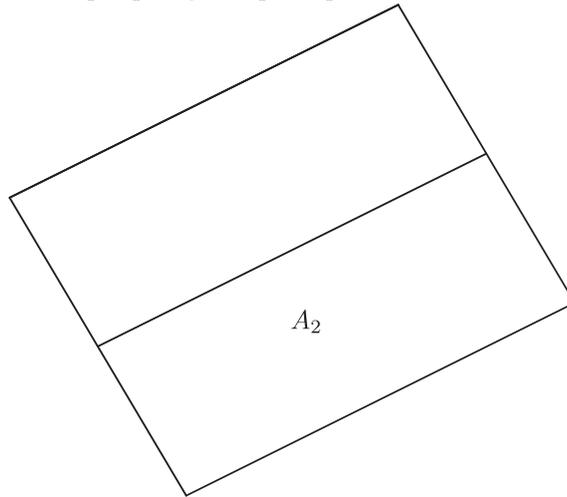


**Projeto 1:** Seja o paralelepípedo  $\gamma$ , e o vetor  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)^a$ . Use o método de mudança de planos de modo que  $\mathbf{v}$  seja projetado como um ponto, e obtenha a projeção do paralelepípedo.



<sup>a</sup>ver capítulo 1

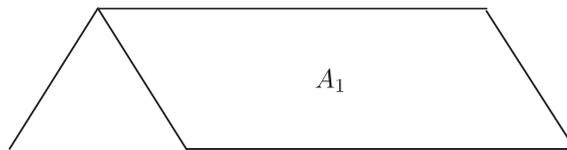
**Projeto 2:** São dados o telhado de uma casa e um poste. Qual é o comprimento do menor fio de luz que que liga o topo do poste  $X$  ao telhado  $A$ ?



$\perp X_2$

2

1



$X_1$

$A_1$

**Projeto 3:** Dois turistas estão discutindo se a rota de vôo mais curta entre São Paulo (23 deg Sul 46 deg Oeste) e Tóquio (35 deg Norte 139 deg Leste) passa por Los Angeles (34 deg Norte 118 deg Oeste) ou Nova Iorque (40 deg Norte 74 deg Oeste). Descubra quem tem razão usando a geometria descritiva. Para isso, resolva os seguintes problemas parciais:

1. Faça uma mudança de planos de projeção de modo que a reta que liga o centro da Terra e São Paulo seja projetada como uma reta frontal no novo sistema.
2. Faça uma nova mudança de planos de modo que a reta que liga o centro da Terra e São Paulo seja projetada como uma reta de topo.
3. Qual dos dois turistas tem razão?



Obs: Um desenho do mapa da Terra foi dado, mas ele é apenas ilustrativo! Ele foi baseado em na figura encontrada em [rawpixel.com](http://rawpixel.com) / Freepik

**Projeto 4:** Ao levantar vôo em São Paulo (23 deg Sul, 46 deg Oeste) um avião viaja em diretamente à Sydney (33 deg Sul, 15 deg Leste). O ângulo que a direção do avião forma com a direção norte (ambas são tangentes à superfície da terra) pode ser lida usando uma bússola. Determine este ângulo, desprezando a diferença entre os polos magnético e geográfico.