

Técnicas em Teoria do Controle

Clodoaldo Grotta Ragazzo

14 de agosto de 2025

Sumário

| | |
|---|----------|
| Prefácio | v |
| 1 Sistemas Mecânicos Translacionais | 1 |
| 1.1 Conceitos básicos | 1 |
| 1.2 Elementos idealizados de um sistema mecânico | 2 |
| 1.2.1 Massa | 2 |
| 1.2.2 Mola, Figura 1.2 | 2 |
| 1.2.3 Amortecedor, Figura 1.3 | 3 |
| 1.3 Exemplos de Sistemas Mecânicos | 3 |
| 1.3.1 Molas em série | 3 |
| 1.3.2 Molas em paralelo | 4 |
| 1.3.3 Oscilador Harmônico Amortecido e Forçado | 4 |
| 1.3.4 Ogata 5 th ed. pg. 66 | 4 |
| 1.4 Forma Canônica das Equações | 4 |
| 1.5 Exemplos | 5 |
| 1.5.1 Oscilador harmônico na Figura 1.6 | 5 |
| 1.5.2 Sistema na Figura 1.7 | 6 |
| 2 Sistemas Elétricos e Analogias | 7 |
| 2.1 Histórico | 7 |
| 2.2 Conceitos básicos | 7 |
| 2.3 Lei de Faraday e “Voltagem” | 8 |
| 2.4 Elementos passivos de um circuito | 9 |
| 2.5 Elementos ativos de um circuito | 11 |
| 2.6 Equações diferenciais para um circuito elétrico | 12 |
| 2.6.1 Exemplo 1, Figura 2.8 | 13 |
| 2.6.2 Exemplo 2, Figura 2.9 | 13 |
| 2.6.3 Exemplo 3: bateria real (Figura 2.10) | 14 |
| 2.7 Analogias | 15 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 3 | Equações Diferenciais: Pontos de Equilíbrio e Linearização | 17 |
| 3.1 | Exemplo: Equações Predador-Presa | 17 |
| 3.2 | Linearização em um Ponto de Equilíbrio | 17 |
| 3.3 | Equilíbrios e Linearização | 18 |
| 3.4 | Exemplo: A dinâmica da hiperinflação. | 19 |
| 3.4.1 | Pontos de equilíbrio | 19 |
| 4 | Equações Diferenciais, Auto-Valores Complexos. | 21 |
| 4.1 | Equações Lineares com Coeficientes Constantes | 21 |
| 4.2 | Polinômio Característico | 21 |
| 4.3 | Fórmula de Euler | 22 |
| 4.4 | Solução Complexa da Eq. Diferencial | 23 |
| 4.5 | Conclusão | 24 |
| 4.6 | Exemplo | 24 |
| 5 | Exponencial de Matrizes | 26 |
| 5.1 | Motivação | 26 |
| 5.2 | Teorema (Forma Canônica de Jordan) (ver Elon Lages Lima, Álgebra Linear) | 27 |
| 5.3 | Forma Canônica de Jordan Exponencial de Matriz | 29 |
| 6 | Estabilidade de ponto de equilíbrio. | 32 |
| 6.1 | Estabilidade de Liapunov. | 32 |
| 6.2 | Limitação dada pela parte linear | 32 |
| 6.3 | Estabilidade assintótica linear implica estabilidade do equilíbrio da EDO não linear | 33 |
| 7 | Sistemas lineares Forçados (não homogêneos). | 34 |
| 7.1 | Sistemas Lineares Forçados | 34 |
| 8 | Transformada de Laplace. | 37 |
| 9 | Matriz de Transferência e Resposta em Frequência. | 42 |
| 10 | Resposta em frequência de 1^oe 2^o ordem. | 45 |
| 11 | Resposta transiente (ou transitória) de 1^oe 2^oordem. | 51 |
| 12 | Matriz de Controlabilidade e Estratégia Ótima. | 61 |
| 13 | Controlabilidade: critério do posto de Kalman. | 66 |
| 14 | Forma Normal dos Sistemas Controláveis. | 73 |
| 14.1 | Mudança de variáveis | 73 |
| 14.2 | Sistemas Equivalentes | 74 |

| | |
|---|-----------|
| 14.3 Teorema (forma de Kalman dos sistemas não controláveis). | 74 |
| 14.4 Forma canônica para sistemas controláveis com uma entrada, $r = 1$ | 74 |
| 14.5 Controlabilidade do sistema (14.1) | 75 |
| 14.6 Lema: Forma canônica preliminar para sistemas controláveis. | 75 |
| 14.7 Prova | 75 |
| 14.8 Teorema de Cayley-Hamilton | 76 |
| 14.9 Voltando à equação (14.5): | 76 |
| 14.10 Corolário: O sistema no teorema (8) é equivalente à equação de ordem n no parágrafo (5) | 77 |
| 14.11 Matrizes Unitriangulares | 77 |
| 14.12 Teorema: Forma canônica dos sistemas controláveis. | 79 |
| 14.13 Prova. | 79 |
| 15 Estabilizabilidade | 81 |
| 15.1 Definição. | 81 |
| 15.2 Definição. | 81 |
| 15.3 Prova: Controlável \Rightarrow Completamente Estabilizável. | 81 |
| 15.4 Matriz de ganho | 82 |
| 15.5 Nota sobre o Sistema (15.4) | 83 |
| 15.6 Polinômio Característico Desejado e determinação de \tilde{K} . | 84 |
| 15.7 Matriz de ganho nas variáveis originais | 84 |
| 15.8 Observações finais. | 84 |
| 15.9 Resultados Suplementares para Sistemas não Controláveis | 84 |
| 15.10 Escolha da Matriz de Ganho K | 85 |
| 16 Observabilidade. | 86 |
| 17 Observadores. | 90 |
| 17.1 Exemplo de Sistema Não Estabilizável por Retroalimentação de Saída (Output Feedback) | 90 |
| 17.2 Construção de Observadores | 91 |
| 17.3 Definição: Detectabilidade | 91 |
| 17.4 Prova | 92 |
| 17.5 Corolário | 92 |
| 17.6 Análise da Estabilidade do sistema (17.5) | 93 |
| 17.7 Conclusão. | 93 |
| 18 Considerações Físicas Relativas à Escolha de Parâmetros. | 94 |
| 18.1 Introdução | 94 |
| 18.2 Autovalores | 94 |
| 18.3 Parâmetros de desempenho (da Aula 10). | 95 |
| 18.4 Considerações sobre ω_n e ζ | 95 |

| | |
|---|-----------|
| 18.5 Gráficos | 96 |
| 18.6 Critério Empírico (Ogata página 171) | 96 |
| 19 Elementos de Controle Ótimo. | 98 |

Prefácio

Estas notas contém partes parcialmente copiadas de diversas fontes encontradas na internet. Elas são de uso exclusivo do curso: MAP2321 Técnicas em Teoria de Controle.

Bibliografia:

- 1) Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica, Johann Baumaister e Antonio Leitão, IMPA 2014.
- 2) Modern Control Engineering, Fifth Edition, Katsuhiko Ogata, Prentice Hall 2010.
- 3) Modern Control Theory, Third Edition, William L. Brogan, Prentice Hall 1991.
- 4) Mathematical Control Theory: An Introduction, Jerzy Zabczyk, Birkhäuser 2008.
- 5) Evans, Lawrence C. "An introduction to mathematical optimal control theory version 0.2." Lecture notes available at <http://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf> (1983).

Capítulo 1

Sistemas Mecânicos Translacionais

1.1 Conceitos básicos

Sistemas mecânicos translacionais movem-se ao longo de uma linha reta. Esses sistemas consistem principalmente em três elementos básicos: massa, mola e amortecedor.

As leis fundamentais foram propostas por Newton (1687):

- 1) Um corpo permanece em repouso ou em movimento com velocidade constante em linha reta, exceto na medida em que é atuado por uma força.
- 2) Em qualquer instante de tempo, a força resultante em um corpo é igual à aceleração do corpo multiplicada pela sua massa.
- 3) Se dois corpos exercem forças um sobre o outro, essas forças têm a mesma magnitude, mas direções opostas.

A seguir suporemos que a superfície da Terra é um referencial inercial. Os deslocamentos em metros serão sempre medidos com relação a pontos fixos na Terra, Figura 1.1.

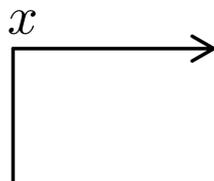


Figura 1.1: Um valor $x = 1$ no eixo horizontal indica um deslocamento de 1 metro em relação à reta horizontal que está fixa na Terra.

Na mecânica a variável independente (da nossa vontade) é o tempo t medido em segundos. As velocidades $v := \dot{x} := \frac{dx}{dt}$ são medidas em metros por segundo e as acelerações $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ são medidas em metros por segundo ao quadrado.

Pela segunda lei de Newton

$$m\dot{v} = F$$

onde:

- A massa m , medida em quilogramas, é uma propriedade do corpo que independe do tempo.
- F é a força medida em quilograma vezes metro por segundo ao quadrado (unidade denominada Newton)

As grandezas da mecânica são: tempo, comprimento e massa. Todas as unidades da mecânica, por exemplo Newton, podem ser escritas em função dessas.

Empiricamente observa-se que muitas forças (gravitacional, de atrito viscoso, etc) dependem apenas da posição e velocidade. Portanto a segunda lei de Newton dá origem à equação de Newton

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}F(x, \dot{x}) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m}F(x, v) \end{cases}$$

Da teoria das equações diferenciais as condições iniciais $x(0), v(0)$ determinam o movimento do sistema por meio da lei de Newton.

As posições e velocidades dos diversos pontos materiais de um sistema mecânico são as variáveis de estado do sistema. Dados os seus valores iniciais é possível determinar o movimento ou dinâmica do sistema.

1.2 Elementos idealizados de um sistema mecânico

1.2.1 Massa

A massa é a propriedade de um corpo que armazena energia cinética: $m\frac{v^2}{2}$ (medida em Joules:= Newton vezes metro). Se um objeto aplica uma força em um corpo de massa m , então o objeto sofre uma força oposta (terceira lei). A massa ideal é indeformável.

1.2.2 Mola, Figura 1.2

A mola de constante elástica k é um elemento que armazena energia de deformação, definida por $k\frac{(\Delta x)^2}{2}$. Se um objeto exerce uma força na mola k , então a mola exerce uma força oposta no objeto de mesma intensidade. Essa força oposta é proporcional ao deslocamento da mola $F = k\Delta x$. A mola ideal não possui inércia, portanto a força resultante em uma mola sempre é nula.

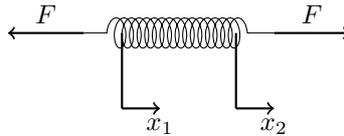


Figura 1.2: A deformação da mola é $\Delta x = x_2 - x_1$. A força que age na mola $F = k(x_2 - x_1) = k\Delta x$ pode tensionar a mola $\Delta x > 0$ ou comprimir a mola $\Delta x < 0$.

1.2.3 Amortecedor, Figura 1.3

O amortecedor é um elemento que dissipa energia. A potência (energia por unidade de tempo Watt=Joule/segundo) dissipada por um amortecedor é $b(\Delta v)^2$, onde b é o coeficiente de amortecimento viscoso. Se um objeto exerce uma força no amortecedor, então o amortecedor exerce uma força oposta no objeto de mesma intensidade. Essa força oposta é proporcional à velocidade $F = b\Delta v$. O amortecedor ideal não possui inércia, portanto a força resultante em um amortecedor sempre é nula.

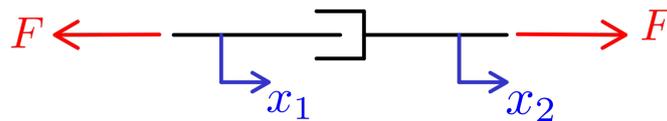


Figura 1.3: A taxa de deformação do amortecedor é $\Delta v = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$. A força que age no amortecedor $F = b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = b\Delta v$ pode estender o amortecedor $\Delta v > 0$ ou encurtar o amortecedor $\Delta v < 0$.

1.3 Exemplos de Sistemas Mecânicos

1.3.1 Molas em série

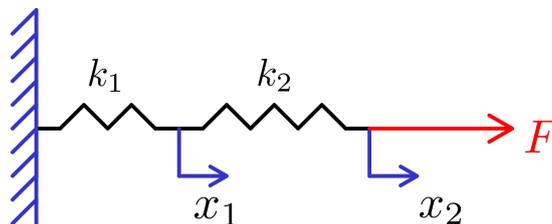


Figura 1.4: O sistema pode ser trocado pela mola equivalente $x_2 k_{eq} = F$ onde $k_{eq} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

1.3.2 Molas em paralelo

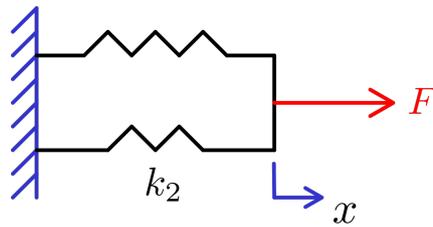


Figura 1.5: O sistema pode ser trocado pela mola equivalente $xk_{eq} = F$ onde $k_{eq} = k_1 + k_2$

1.3.3 Oscilador Harmônico Amortecido e Forçado

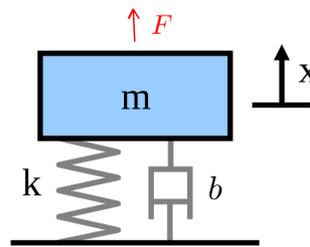


Figura 1.6: A equação de movimento é $m\ddot{x} = -kx - bx + F$.

1.3.4 Ogata 5th ed. pg. 66

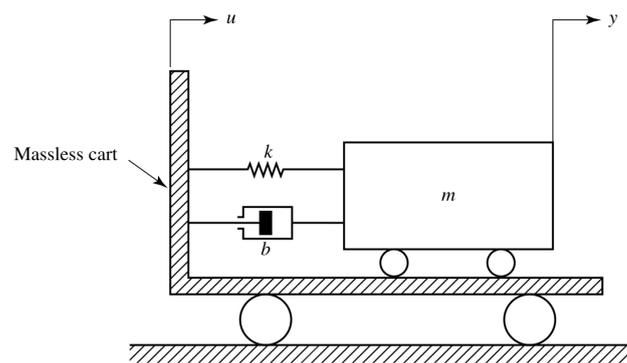


Figura 1.7: A equação de movimento é $m\ddot{y} = -k(y - u) - b(\dot{y} - \dot{u})$. O deslocamento $u(t)$ é prescrito.

1.4 Forma Canônica das Equações

Sejam:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} && \text{variáveis de estado (posições e velocidades)} \\ \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix} && \text{variáveis de entradas (forças, deslocamentos prescritos, etc)} \\ \mathbf{y} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} && \text{variáveis de saída (quantidades medidas ou interessantes)} \end{aligned}$$

A forma canônica das equações é:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

Onde as dimensões das matrizes são:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

1.5 Exemplos

1.5.1 Oscilador harmônico na Figura 1.6

Para não confundir o vetor de estados \mathbf{x} com a variável de deslocamento x introduzimos uma nova notação

$$m\ddot{q} = -kq - b\dot{q} - F(t)$$

Definimos

$$q = x_1 \quad \text{variáveis de estado}$$

$$\dot{q} = x_2$$

$$F = u_1 \quad \text{entrada}$$

$$q = y_1 \quad \text{saída}$$

Supondo que estejamos interessados na posição q (saída) e a entrada seja a força F , obtemos as equações na forma canônica:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u_1 \\ y_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.5.2 Sistema na Figura 1.7

Novamente reescrevemos as equações usando uma nova notação:

$$\ddot{q} = -\frac{k}{m}(q - u) - \frac{b}{m}(\dot{q} - \dot{u})$$

Estamos interessados na posição q (saida). A entrada é u , como representá-la na forma canônica?

Fazendo

$$x_1 = q$$

$$x_2 = \dot{q} - \beta u,$$

onde β é uma constante a ser determinada, temos

$$\dot{x}_1 = \dot{q} = x_2 + \beta u$$

e

$$\dot{x}_2 = \ddot{q} - \beta \dot{u} = -\frac{k}{m}q - \frac{b}{m}\dot{q} + \frac{k}{m}u + \left(\frac{b}{m} - \beta\right)\dot{u}$$

Como queremos escrever as equações do sistema apenas como função da entrada u e não de sua derivada \dot{u} , impomos

$$\beta = \frac{b}{m} \Rightarrow \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left(\frac{k}{m} - \frac{b}{m}\beta\right)u$$

ou seja:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \frac{b^2}{m^2} \end{pmatrix} u$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Sistemas Elétricos e Analogias

2.1 Histórico

1. **Electricus** = como âmbar = latinização da *elektron* (grego) = âmbar. (William Gilbert, 1600)
2. **Datas:**
 - **Antiguidade:** carregamento eletrostático do âmbar por esfregamento, peixe elétrico e ímãs naturais.
 - **1785:** Lei de Coulomb da atração eletrostática.
 - **1799:** Alessandro Volta, bateria.
 - **1813:** Gauss, campo eletrostático.
 - **1820:** Oersted (dinamarquês), corrente elétrica deflete bússola.
 - **1823:** Faraday, campo magnético variável cria campo elétrico.
 - **1961-1862:** Leis de Maxwell.

2.2 Conceitos básicos

Aqui por sistema elétrico (ou circuito elétrico) entenderemos uma ligação de elementos elétricos passivos: resistores, indutores, capacitores; e ativos: baterias e fontes de tensão alternada.

Variáveis de estado:

$$q = \text{carga}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \text{corrente}$$

Unidades:

- **Carga** = Coulomb = 6.24×10^{18} elétrons (C). Força entre duas cargas elétricas pontuais de 1 C separadas de um metro \approx 900 mil toneladas-força! Geralmente usa-se microcoulomb (μC) ou nanocoulomb (nC).

- **Corrente** = Ampère = $\frac{C}{s}$ (A). Uma corrente elétrica é um fluxo de partículas carregadas, como elétrons ou íons, movendo-se através de um condutor elétrico ou no espaço. A direção convencional da corrente é definida como a direção em que as cargas positivas fluem.
- **Obs:** A corrente $\frac{dq}{dt}$ é a unidade fundamental da eletricidade (e não a carga q), pois é mais fácil de medir (Oersted).

2.3 Lei de Faraday e “Voltagem”

O campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}) := \mathbf{F}/q$ é definido como a razão entre força elétrica \mathbf{F} , que age em uma carga q estacionada no ponto \mathbf{x} , dividida pela carga. O campo magnético \mathbf{B} é definido usando forças magnéticas.

Lei de Faraday da indução eletromagnética, Figura 2.1:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (\text{Faraday})$$

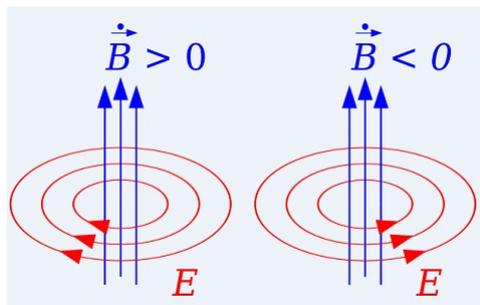


Figura 2.1: A integral de linha do campo elétrico \mathbf{E} ao longo de um círculo na figura é igual à integral de $-\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{n}$ sobre uma superfície cujo bordo é o círculo. \mathbf{n} é a normal à superfície.

Em um campo magnético estático $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ e

$$V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}_o) = -\int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.1)$$

independe da curva que liga o ponto \mathbf{x}_o a \mathbf{x} . Suponha que o ponto \mathbf{x}_o está fixo na superfície da Terra¹. Neste caso, $V(\mathbf{x})$ é uma função da variável \mathbf{x} chamado de potencial eletrostático (com referência à Terra).

Note: se há campos magnéticos variáveis, então $V(\mathbf{x})$ na equação (2.1) depende do caminho que liga \mathbf{x}_o a \mathbf{x} .

Na teoria de circuitos elétricos usam-se elementos idealizados (capacitores, resistores e indutores) onde os efeitos de campos magnéticos variáveis produzidos pelo circuito são devidamente contidos em

¹O campo elétrico na superfície da Terra pode ser assumido como nulo, de outro modo haveria movimento de cargas elétricas sob a Terra. Portanto, para quaisquer dois pontos \mathbf{x}_o e \mathbf{x}'_o na superfície da Terra $V(\mathbf{x}_o) = V(\mathbf{x}'_o)$. Ou seja, a superfície da Terra é conveniente como referência para o cálculo do potencial eletrostático.

cada elemento. Sob essas suposições, o campo elétrico na região externa a cada componente satisfaz $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, e as “Voltagens” ou tensões entre os nós a e b do circuito estão bem definidas por

$$\Delta V_{ab} = V(b) - V(a) = - \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

desde que o caminho de integração não passe pelo interior de nenhum componente. Esta integral, com o caminho de integração sendo ao longo dos fios de teste, é o que um voltímetro realmente medirá.

Se multiplicarmos a equação (2.1) dos dois lados por q obtemos

$$qV(\mathbf{x}) - qV(\mathbf{x}_o) = - \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (2.2)$$

que é igual ao trabalho, ou energia, para levar a carga de \mathbf{x} até \mathbf{x}_o . Se $qV(\mathbf{x}) < qV(\mathbf{x}_o)$ então realizamos trabalho (gastamos energia) para levar a carga de \mathbf{x} a \mathbf{x}_o . Se $qV(\mathbf{x}) > qV(\mathbf{x}_o)$, então a carga pode realizar trabalho (ganhamos energia) ao ser movimentada de \mathbf{x} a \mathbf{x}_o .

Unidade de tensão: Volt = $\frac{\Delta E}{C}$ = Variação de energia por unidade de carga = **Joules/Coulomb**
 = $\frac{kg\ m^2}{s^2\ C}$

Obs: A energia conecta a eletricidade à mecânica e a outras áreas da física, como por exemplo à termodinâmica.

2.4 Elementos passivos de um circuito

- Capacitor

$$V = \frac{q}{C}$$

$$C = \text{Capacitância (Farad)} = \text{Coulomb/Volt}$$

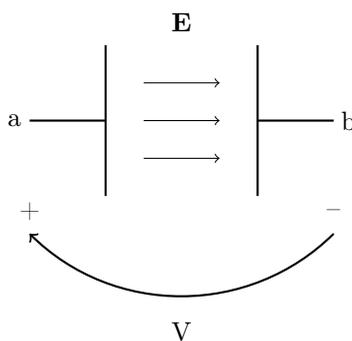


Figura 2.2: Capacitor: $V(b) - V(a) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} < 0$. Se os extremos a e b forem conectados as cargas positivas fluirão de a para b . As duas placas do capacitor estão isoladas. As cargas não podem ir de uma para outra por dentro do capacitor. A flexa curva indica a direção em que o potencial elétrico cresce: $V = V(a) - V(b)$. Este é o V que aparece na lei do capacitor $V = q/C$.

- Resistor

$$V = RI$$

R = Resistência (Ohm) = Volt/Ampère

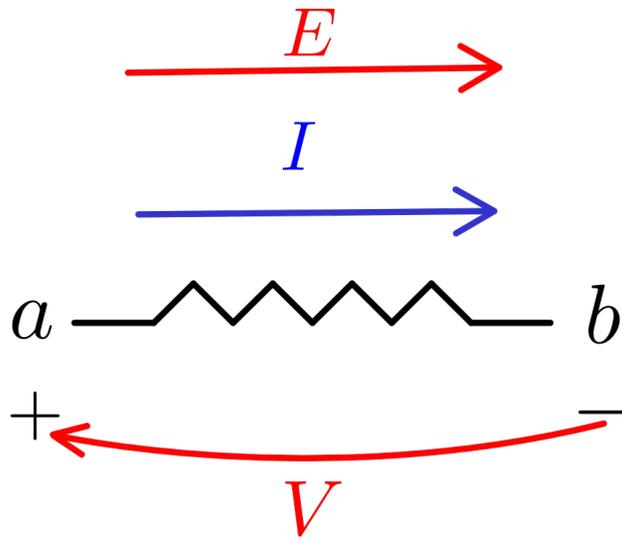


Figura 2.3: Resistor: $V(b) - V(a) = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} < 0 \Rightarrow V(a) > V(b)$. A corrente de cargas positivas flui de a para b . A flexa curva indica a direção em que o potencial elétrico cresce: $V = V(a) - V(b)$. Este é o V que aparece na lei de Ohm $V = RI$.

- Indutor

$$V = LI = L \frac{dI}{dt}$$

L = Indutância (Henry) = Volt segundo / Ampère

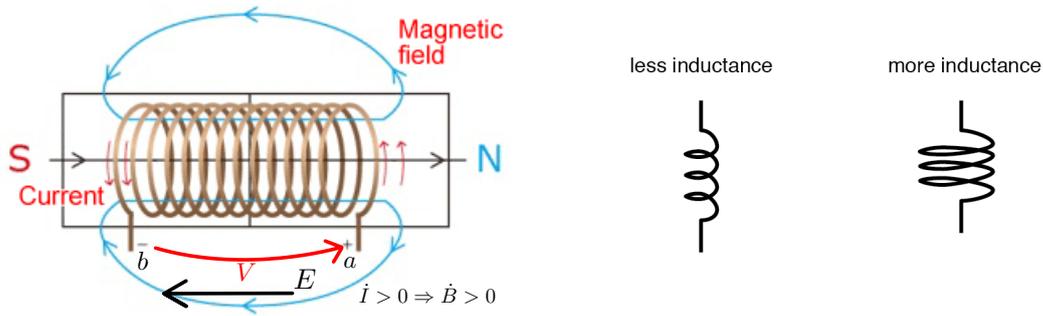


Figura 2.4: Indutor. A corrente I de cargas positivas flui de a para b . Se $\dot{I} > 0$ então $\dot{B} > 0$, onde o campo magnético está indicado em azul claro. Considere um circuito que vai de a até b por dentro do fio e de b até a por fora do fio. Dentro do fio $E = 0$, pois o fio é suposto sem resistência e qualquer $V \neq 0$ causaria uma corrente infinita. Fora do fio o campo elétrico tem que ter a orientação como na figura acima, devido à lei de Faraday como mostrada na Figura 2.1. Como fora do indutor (ideal) não há campo magnético, para qualquer caminho que liga a a b fora do fio: $V(b) - V(a) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} < 0$. A flexa curva indica a direção em que o potencial elétrico cresce e $V := V(a) - V(b)$. Este é o V que aparece na lei de indução $V = L\dot{I}$.

- **Resumo dos sinais em elementos passivos de um circuito**

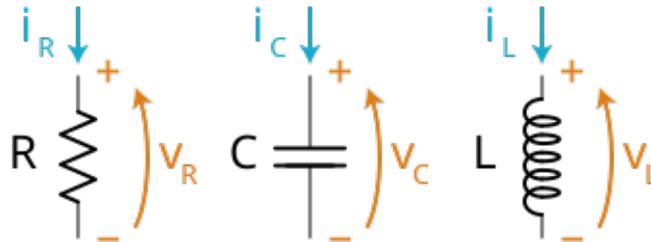


Figura 2.5: Retirado de <https://www.khanacademy.org/science/electrical-engineering/ee-circuit-analysis-topic/circuit-elements/a/ee-ideal-circuit-elements>

2.5 Elementos ativos de um circuito

- **Bateria:** Uma bateria ideal é um componente elétrico que fornece uma diferença de potencial elétrico constante (uma tensão fixa) em seus terminais.

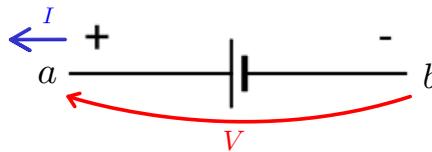


Figura 2.6: Bateria ideal: $V(a) - V(b) = V$ constante independentemente da corrente que passa pela bateria. A corrente de cargas positivas sai de a e entra em b . No caso de baterias recarregáveis a corrente pode sair de b e entrar em a .

- **Gerador ou fonte de tensão variável:** Uma fonte de tensão variável ideal gera uma tensão conhecida $V(t)$ como uma função do tempo, independentemente da corrente extraída pelos componentes conectados aos seus terminais. Ver “The Feynman Lectures on Physics” vol. 2, parágrafo 22.2.

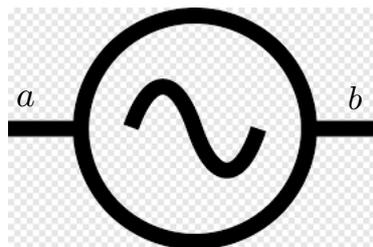


Figura 2.7: Fonte de tensão variável: $V(a) - V(b) = V$, onde $V(t)$ pode ser qualquer função, geralmente periódica no tempo. Tipicamente $V(t) = A \sin(\omega t)$ onde A é uma amplitude e ω a frequência angular da tensão. A rede elétrica em São Paulo usa $A = 110$ Volts (ou 220 V) e a frequência de 60 Hertz (ciclos por segundo) que corresponde à frequência angular $\omega = 60 \times 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{seg}}$.

2.6 Equações diferenciais para um circuito elétrico

Leis básicas de Kirchhoff:

- 1) A soma das correntes em um nó é nula (conservação da carga).
- 2) A variação da tensão (voltagem) em qualquer laço fechado é nula, decorrência da lei da indução eletromagnética de Faraday e da hipótese de não haver campo magnético fora dos elementos idealizados (ver “The Feynman Lectures on Physics” vol. 2 capítulo 22).

2.6.1 Exemplo 1, Figura 2.8

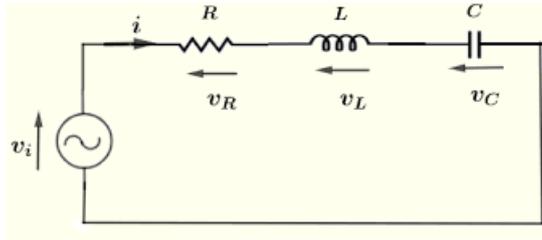


Figura 2.8: Suponha que $v_i(t)$ é dada e que a saída é $v_c(t)$. Note a corrente é a mesma em todos os elementos. Da segunda lei de Kichhoff: $v_c + v_c + v_l = v_i$. Substituindo as leis de cada elemento e usando $I = \dot{q}$ obtemos: $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = v_i$.

As equações do sistema são iguais às obtidas para o oscilador harmônico amortecido após as identificações: $L \rightarrow m$, $R \rightarrow b$, $k \rightarrow C^{-1}$ e $v_i \rightarrow F$. As equações na forma canônica são obtidas fazendo: $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$ (variáveis de estado), $y_1 = v_c = q/C = C^{-1}x_1$ (saida), $u_1 = v_i$ (entrada).

Logo,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}}_{A_{2 \times 2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}}_{B_{2 \times 1}} u_1, \quad y_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}_{C_{1 \times 2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2.6.2 Exemplo 2, Figura 2.9

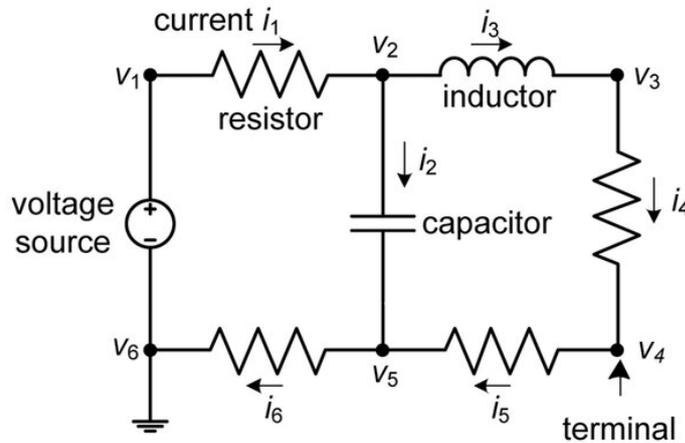


Figura 2.9: Primeira lei de Kirchhoff: $i_2 = i_1 - i_3$, $i_4 = i_3$, $i_5 = i_3$, $i_6 = i_3 + i_2 = i_1$. Todas as correntes ficam determinadas por $i_1 = \dot{q}_1$ e $i_3 = \dot{q}_3$. A tensão $v_i(t) = v_1 - v_6$ é dada (entrada). v_6 é o potencial da Terra e pode ser assumido como zero ou não. Da segunda lei de Kirchhoff aplicada ao primeiro laço: $(v_1 - v_2) + (v_2 - v_5) + (v_6 - v_5) = v_i$. Usando as leis dos elementos, obtemos $R_1 i_1 + C^{-1} q_2 + R_6 i_6 = v_i$ ou $(R_1 + R_6) \dot{q}_1 + C^{-1} (q_1 - q_3) = v_i$. Da segunda lei de Kirchhoff aplicada ao laço externo: $(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_4) + (v_4 - v_5) + (v_5 - v_6) = v_i$. Usando as leis dos elementos, obtemos $R_1 i_1 + L \dot{i}_3 + R_4 i_4 + R_5 i_5 + R_6 i_6 = v_i$ ou $(R_1 + R_6) \dot{q}_1 + (R_4 + R_5) \dot{q}_3 + L \dot{q}_3 = v_i$.

Para escrever as equações na forma canônica faremos: $x_1 = q_1$, $x_2 = q_3$, $x_3 = \dot{q}_3$, $u_1 = v_i$ e $r_1 := R_1 + R_6$, $r_2 := R_4 + R_5$. A saída é $y_1 = v_4 - v_6 = (v_4 - v_5) + (v_5 - v_6) = R_5 i_5 + R_6 i_6 = R_5 \dot{q}_3 + R_6 \dot{q}_1$.

Com isso obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r_1 C} & \frac{1}{r_1 C} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{r_1}{L} & -\frac{r_2}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u_1, \quad y_1 = \begin{pmatrix} R_6 & R_5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2.6.3 Exemplo 3: bateria real (Figura 2.10)

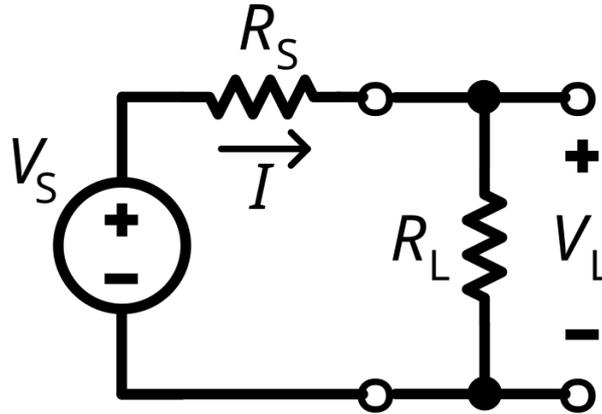


Figura 2.10: Uma bateria real pode ser modelada como uma bateria ideal, V_S na figura (S representa “source”=fonte), mais uma resistência interna, R_S . Na figura, R_L representa uma carga (“load”) resistiva. A voltagem V_L é aquela que efetivamente é aplicada à carga.

Aplicando as leis de Kirchhoff ao circuito na Figura 2.10 ² chegamos a:

$$I = \frac{V_S}{R_S + R_L}$$

A potência dissipada no elemento resistivo é

$$P_L = V_L I = R_L I^2 = \frac{V_S^2 R_L}{(R_S + R_L)^2}$$

Teorema 2.1. *Se a voltagem V_S e a resistividade interna R_S da bateria são dadas e constantes, então a transferência máxima de potência da bateria para a carga ocorre quando a resistência da carga é igual à resistência interna da bateria: $R_L = R_S$.*

Para provar basta mostrar que a função P_L tem um máximo quando $R_L = R_S$.

A eficiência é a razão entre a potência $P_L = V_L I$ dissipada pela carga R_L e a potência total dissipada pelo circuito $P_T = I(V_S + V_L)$:

$$\text{eficiência} = \frac{P_L}{P_T} = \frac{R_L I^2}{(R_S + R_L) I^2} = \frac{R_L}{R_S + R_L}$$

²By Cjp24 - Own work based on: Source and load circuit.png by Omegatron, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=57112455>

Se $R_S = 0$ então a eficiência é máxima, igual a 1. Isso ocorre pois toda a energia retirada da bateria é usada pela carga. Não há dissipação de energia na bateria.

Se $R_S > 0$ está fixa, então quanto maior a resistência da carga maior a eficiência. No entanto a potência dissipada pela carga é cada vez menor pois a corrente no circuito é cada vez menor.

Se $R_S = R_L$ a potência dissipada pela carga é máxima e a eficiência é 50%. Metade da potência é dissipada pela carga e a outra metade pela bateria.

Algo análogo vale para circuitos de corrente alternada.

2.7 Analogias

Vimos que sistemas mecânicos translacionais e sistemas elétricos conduzem a equações diferenciais da mesma forma. Há de fato mais de uma analogia entre sistemas elétricos e mecânicos, seguiremos uma atribuída a Maxwell (ver Busch-Vishniac, Ilene J. Electromechanical sensors and actuators; Springer, 1998, capítulo 2).

Chamamos de variáveis conjugadas de potência duas variáveis que, quando multiplicadas, produzem a potência. Essa definição permite um grande número de escolhas de conjuntos de variáveis, mas é tradicional escolher aquelas variáveis mais facilmente medidas. Por exemplo, em sistemas mecânicos translacionais, poderíamos usar força e velocidade, ou a taxa de variação da força e o deslocamento. O primeiro par é a escolha padrão. As variáveis conjugadas de potência padrão estão listadas abaixo:

- **Mecânico:** força, F , e velocidade, v .
- **Rotacional:** torque, τ , e velocidade angular, ω .
- **Elétrico:** tensão, V , e corrente, I .
- **Fluido:** pressão, P , e taxa de fluxo volumétrico, Q .
- **Térmico:** Temperatura, T , e taxa de variação de entropia, DS/dt .

Variáveis de estado Hamiltonianas são aquelas que quando diferenciadas produzem as variáveis conjugadas de potência. No caso da mecânica: $\dot{p} = F$ e $\dot{x} = v$, onde $p = mv$. O momento linear $p = mv$ e a posição x podem ser tomadas como variáveis de estado (nos exemplos escolhemos a velocidade, que é proporcional ao momento, como variável de estado).

As variáveis conjugadas de potência podem ser classificadas como

- F , τ , V , P e T são variáveis de esforço.
- v , ω , I , Q e S (entropia) são variáveis de fluxo.

O produto de uma variável de esforço vezes a sua variável conjugada Hamiltoniana é uma forma de energia. A lei da conservação da energia diz que a energia pode transmutar de uma forma a outra, mas deve ser conservada, ou seja:

$$F\Delta x + \tau\delta\theta + V\Delta q + P\Delta vol + T\Delta S = constante$$

onde: x é deslocamento, θ é ângulo, vol é volume, q é carga e S é entropia.

Capítulo 3

Equações Diferenciais: Pontos de Equilíbrio e Linearização

3.1 Exemplo: Equações Predador-Presa

1. Considere o sistema de Lotka-Volterra:

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2) \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(-c + dx_1) \quad (3.2)$$

onde $a > 0$ (taxa de natalidade da presa), $b > 0$ (taxa de predação), $c > 0$ (taxa de mortalidade da presa), $d > 0$ (taxa de natalidade do predador) são constantes positivas.

2. Os equilíbrios da equação são os pontos onde o campo de velocidades se anula:

$$0 = \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = \frac{a}{b}$$

$$0 = \dot{x}_2 = x_2(-c + dx_1) \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0 \text{ ou } x_1 = \frac{c}{d}$$

\Rightarrow Há 2 pontos de equilíbrio:

$$(x_1, x_2) = (0, 0) \quad \text{e} \quad (x_1, x_2) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

onde $\bar{x}_1 = \frac{c}{d}$ e $\bar{x}_2 = \frac{a}{b}$.

3.2 Linearização em um Ponto de Equilíbrio

1. Para linearizarmos a equação no ponto de equilíbrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , fazemos uma mudança de variáveis:

$$x_1 = \bar{x}_1 + \delta_1$$

$$x_2 = \bar{x}_2 + \delta_2$$

e depois desprezamos todos os termos em δ_1 e δ_2 que não sejam os lineares, pois supomos que $|\delta_1|$ e $|\delta_2|$ são pequenos (logo δ_1^2 e δ_2^2 são desprezíveis).

Obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{\bar{x}}_1 + \delta_1 = (\bar{x}_1 + \delta_1)(a - b(\bar{x}_2 + \delta_2)) \\ \dot{x}_2 &= \dot{\bar{x}}_2 + \delta_2 = (\bar{x}_2 + \delta_2)(-c + d(\bar{x}_1 + \delta_1))\end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= \bar{x}_1(a - b\bar{x}_2) + (a - b\bar{x}_2)\delta_1 - \bar{x}_1b\delta_2 + \dots \\ \dot{\delta}_2 &= \bar{x}_2(-c + d\bar{x}_1) + (-c + d\bar{x}_1)\delta_2 + \bar{x}_2d\delta_1 + \dots\end{aligned}$$

Desprezando os termos de ordem $\delta_1^2 + \delta_2^2$, temos:

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_1 &= 0\delta_1 - \frac{bc}{d}\delta_2 \\ \dot{\delta}_2 &= \frac{ad}{b}\delta_1 + 0\delta_2\end{aligned}$$

ou:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

2. Se na equação acima (3.1) fizermos $a = b = c = d = 1$, o equilíbrio não trivial fica $\bar{x}_1 = \frac{c}{d} = 1$ e $\bar{x}_2 = \frac{a}{b} = 1$, e a linearização em $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1, 1)$ fica:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

3.3 Equilíbrios e Linearização

1. Em geral, considere o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

ou, abreviadamente, a equação diferencial:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

2. Os equilíbrios são as soluções de $\dot{\mathbf{x}} = 0 = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, ou seja,

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

ou ainda

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0 \end{cases}$$

3. Para obter a linearização em $\bar{\mathbf{x}}$ fazemos $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\delta}$. Após substituir na equação, desprezamos termos de ordem $|\boldsymbol{\delta}|^2$ e obtemos:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}})\boldsymbol{\delta}$$

onde

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Df}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{\mathbf{x}}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \dots & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) & \dots & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \end{pmatrix}$$

é a matriz $n \times n$ com coeficientes constantes.

3.4 Exemplo: A dinâmica da hiperinflação.

Considere o seguinte modelo para a inflação¹:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= f - m\pi \\ \dot{\pi} &= -k + \beta \ln m + \gamma\pi \end{aligned}$$

onde:

- $m = \epsilon$ é a quantidade real de moeda.
- $f =$ déficit público real.
- $\pi =$ taxa de inflação.
- k, β e γ são parâmetros positivos associados à taxa desejada de aumento de salários, ao atraso no ajuste dos salários, a taxa de inflação esperada entre outros (ver referência 1).

3.4.1 Pontos de equilíbrio

Fazendo-se $\dot{m} = 0$ e $\dot{\pi} = 0$ nas equações obtêm-se os valores de equilíbrio de m através da solução da seguinte equação:

$$g(m) = \beta \ln m + \frac{\gamma f}{m} = k$$

¹Ver: Barbosa, Fernando de Holanda, Waldyr Muniz Oliva, and Élvia Mureb Sallum. "A dinâmica da hiperinflação." *Brazilian Journal of Political Economy* 13.1 (1993): 3-23.

Exercício: Mostre que condição necessária e suficiente para que existam dois valores de equilíbrio é (ver Figura 3.1):

$$k > \beta \left(1 + \ln \frac{\gamma f}{\beta} \right)$$

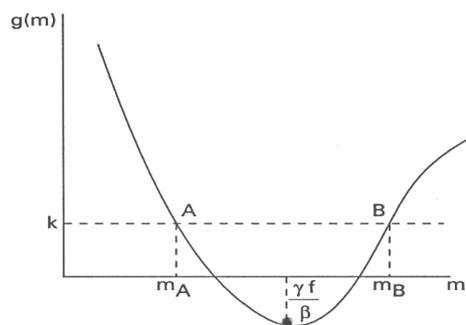


Figura 3.1: Gráfico da função $g(m)$ com dois pontos de equilíbrio A e B .

Capítulo 4

Equações Diferenciais, Auto-Valores Complexos.

4.1 Equações Lineares com Coeficientes Constantes

Considere a equação

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Tentemos uma solução da forma

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}e^{\lambda t}, \quad \text{onde } \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \text{ é constante no tempo.}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}\lambda e^{\lambda t} = A\hat{\mathbf{x}}e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda\hat{\mathbf{x}} = A\hat{\mathbf{x}} \Leftrightarrow (\lambda I - A)\hat{\mathbf{x}} = 0$$

Note que $(\lambda I - A)\hat{\mathbf{x}} = 0$ sempre possui a solução trivial $\hat{\mathbf{x}} = 0$. Se $\det(\lambda I - A) \neq 0$, esta é a única solução.

Existe $\hat{\mathbf{x}}$ solução não trivial de $(\lambda I - A)\hat{\mathbf{x}} = 0$ se, e somente se, λ é raiz de $\det(\lambda I - A) = 0$.

4.2 Polinômio Característico

O polinômio característico de A é

$$P(\lambda) := \det(\lambda I - A)$$

Para cada raiz de $P(\lambda) = 0$, existe solução da forma $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}e^{\lambda t}$ com $\hat{\mathbf{x}} \neq 0$ para a equação $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.

Para a equação da seção 4.1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \right) = \lambda^2 + 1$$

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

A equação

$$(\lambda I - A)\hat{\mathbf{x}} = 0$$

para $\lambda = i$ fica

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = 0 \\ -\hat{x}_1 + i\hat{x}_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{equações equivalentes})$$

$$\Rightarrow \hat{x}_2 = -i\hat{x}_1$$

Se $\hat{x}_1 = 1$, então $\hat{x}_2 = -i$ e temos a solução complexa

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{it}$$

4.3 Fórmula de Euler

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$e^0 = 1 + 0 + \frac{0^2}{2!} + \frac{0^3}{3!} + \frac{0^4}{4!} + \dots$$

$$e^{it} = 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right) + i \left(t - \frac{t^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= \cos t + i \sin t$$

$$\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t} \quad (\text{Euler})$$

- Representação polar

$$z = x + iy \quad \text{onde} \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

- Números complexos somam como vetores

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \Rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

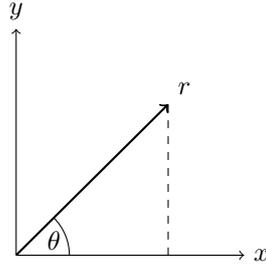


Figura 4.1: Representação polar de z : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$

- Multiplicação de números complexos

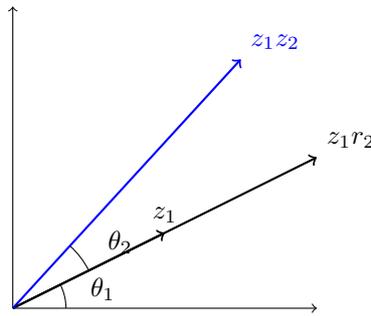
$$i^2 = -1 \Rightarrow z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

ou

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \Rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet z_1 \text{ é dilatado pelo fator } r_2 = |z_2| \\ \bullet z_1 \text{ é rodado do ângulo } \theta_2 \end{cases}$$

Geometricamente



4.4 Solução Complexa da Eq. Diferencial

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \sin t - i \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Note:

$$\dot{z}(t) = Az \Rightarrow \dot{x} + i\dot{y} = A(x + iy) = Ax + iAy$$

Dois números complexos são iguais se, e somente se, suas partes reais são iguais e suas partes imaginárias são iguais.

Logo temos duas soluções reais

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{y} = Ay$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

Como a equação é

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

é fácil verificar por diferenciação que x e y são soluções.

4.5 Conclusão

Seja $\dot{x} = Ax$ com $x \in \mathbb{R}^n$ e A uma matriz real $n \times n$.

Se $z(t) = \hat{z}e^{\lambda t}$, onde $\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y} \in \mathbb{C}^n$ é autovetor de A e $\lambda \in \mathbb{C}$ é o autovalor associado, então

$$\operatorname{Re}\{(\hat{x} + i\hat{y})e^{\lambda t}\} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\{(\hat{x} + i\hat{y})e^{\lambda t}\}$$

são soluções reais de $\dot{x} = Ax$.

4.6 Exemplo

$$\dot{x}_1 = -\nu x_1 - \omega x_2, \quad \dot{x}_2 = -\nu x_2 + \omega x_1 \quad \text{com} \quad \nu > 0, \omega > 0$$

$$z = \hat{z}e^{\lambda t}, \quad \hat{z} = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{z} = Az \Rightarrow \begin{cases} \lambda \hat{z}_1 = -\nu \hat{z}_1 - \omega \hat{z}_2 \\ \lambda \hat{z}_2 = \omega \hat{z}_1 - \nu \hat{z}_2 \end{cases}$$

ou

$$\begin{pmatrix} \lambda + \nu & \omega \\ -\omega & \lambda + \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = (\lambda + \nu)^2 + \omega^2 = \lambda^2 + 2\nu\lambda + \nu^2 + \omega^2$$

$$\lambda = \frac{-2\nu \pm \sqrt{4\nu^2 - 4(\nu^2 + \omega^2)}}{2} = -\nu \pm i\omega$$

Se $\lambda = -\nu + i\omega$, então:

$$(\lambda + \nu)\hat{z}_1 + \omega\hat{z}_2 = 0 \Rightarrow i\omega\hat{z}_1 + \omega\hat{z}_2 = 0 \Rightarrow \hat{z}_2 = -i\hat{z}_1$$

Impondo $\hat{z}_1 = 1$, temos $\hat{z}_2 = -i$.

$$z(t) = \hat{z}e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-\nu + i\omega)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-\nu t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

$$= e^{-\nu t} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) + i \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Exercício: Esboce o gráfico das soluções.

Capítulo 5

Exponencial de Matrizes

5.1 Motivação

1. Considere o sistema linear

$$\dot{x} = Ax \quad \text{com } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ e } x \in \mathbb{R}^n$$

Dada uma condição inicial $x(0)$, queremos encontrar a solução.

2. Método de Euler (aproximado)

$$\begin{aligned} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} &\approx \dot{x}(t) = Ax(t) \\ \Rightarrow x(t+h) &= x(t) + hAx(t) = (I + hA)x(t) \end{aligned}$$

onde I é a matriz identidade.

3. Dado $x(0)$ e $T > 0$

$$\begin{aligned} x(h) &= (I + hA)x(0) \\ x(2h) &= (I + hA)x(h) = (I + hA)^2 x(0) \\ &\vdots \\ x(Nh) &= (I + hA)^N x(0) \quad \Rightarrow \quad x(T) = \left(I + \frac{T}{N}A\right)^N x(0) \end{aligned}$$

Aproximação do método de Euler com $h = \frac{T}{N}$.

4. Número de Euler

$$\begin{aligned} e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{m}\right)^m &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{tn} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^t = e^t \end{aligned}$$

5. Da mesma forma que se prova a convergência e equivalência do limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots = e^t$$

Mostra-se para $N \rightarrow \infty$ em (3) que vale

$$x(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{T}{N}A\right)^N = I + TA + \frac{T^2 A^2}{2!} + \frac{T^3 A^3}{3!} + \dots \equiv e^{AT}$$

5.2 Teorema (Forma Canônica de Jordan) (ver Elon Lages Lima, Álgebra Linear)

1. Seja $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ o polinômio característico de A e $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ as suas raízes com $m \leq n$.

Existe uma matriz M , possivelmente complexa, tal que

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_\ell \end{pmatrix} \quad \text{com } m \leq \ell \leq n$$

onde cada bloco A_j possui a forma

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j I_{k_j} + N_{k_j}$$

onde I_{k_j} é a matriz identidade de dimensão k_j e

$$N_{k_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz de dimensão $k_j \times k_j$.

- A multiplicidade algébrica de um autovalor λ_j de A , é a multiplicidade da raiz de $P(\lambda) = 0$. Ela é o número de vezes que λ_j aparece na diagonal da matriz na forma canônica de Jordan.
- Mais de um bloco de Jordan pode estar associado ao mesmo autovalor.
- A multiplicidade geométrica de um autovalor λ_j é a dimensão do espaço dos autovetores v de λ_j , ou seja a dimensão do núcleo de $\lambda_j I - A$, e é também o número de blocos de Jordan que correspondem a λ_j .

- Se λ_j é raiz simples de $P(\lambda) = 0$, então seu bloco de Jordan é simplesmente unidimensional.

2. Exemplos:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = 0$$

$\lambda = 1 \Rightarrow$ multiplicidade algébrica = multiplicidade geométrica = 2.

A matriz já está na sua forma canônica de Jordan.

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

$\lambda = 1 \Rightarrow$ multiplicidade algébrica 2

multiplicidade geométrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 + v_2 = v_1 \Rightarrow v_2 = 0$$

Logo, todo autovetor é múltiplo de

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{multiplicidade geométrica } 1$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Forma canônica de Jordan

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

3. A matriz N é dita nilpotente de ordem R se $N^R = 0$ e $N^{R-1} \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é nilpotente de ordem 2.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é nilpotente de ordem 3.

4. Cada bloco de Jordan é a soma

$$(\lambda_j \mathbf{1} + N)$$

onde N é nilpotente de ordem k_j

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{k_j \times k_j}$$

5.3 Forma Canônica de Jordan Exponencial de Matriz

Seja $\dot{x} = Ax$ e $x = My$ onde M é invertível. Na nova variável y a equação fica:

$$\dot{x} = M\dot{y} = Ax = AMy \Rightarrow \dot{y} = M^{-1}AMy$$

Se M é a matriz que transforma A na forma canônica de Jordan, então

$$\begin{pmatrix} \dot{y}^1 \\ \dot{y}^2 \\ \cdots \\ \dot{y}^l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \cdots \\ y^l \end{pmatrix}$$

onde $y^j \in \mathbb{R}^{k_j}$.

Para resolver o sistema $\dot{y} = M^{-1}AMy$ basta resolvê-lo em cada um dos blocos de Jordan.

- Se o bloco de Jordan tem dimensão 1, o que ocorre para autovalores simples, então

$$\dot{y}^j = \lambda_j y^j \Rightarrow y^j(t) = e^{\lambda_j t} y^j(0)$$

Note λ_j pode ser real ou complexo.

- Se o bloco de Jordan tem dimensão 2

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1^j \\ \dot{y}_2^j \end{pmatrix} = \left\{ \lambda_j \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \end{pmatrix}$$

e a solução é

$$y^j(t) = e^{(\lambda_j I + N)t} y^j(0)$$

- **Teorema:** Se duas matrizes A e B comutam, $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$ (se A, B são 1×1 , esta é a propriedade usual).

Note: se $AB \neq BA$, $e^{A+B} \neq e^A e^B$

- Como I comuta com qualquer matriz, temos

$$y^j(t) = e^{\lambda_j I t} e^{N t} y(0)$$

onde

$$e^{\lambda_j I t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix}$$

e

$$e^{N t} = I + N t + \frac{N^2 t^2}{2!} + \frac{N^3 t^3}{3!} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pois N é nilpotente de ordem 2.

$$e^{N t} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1^j(t) \\ y_2^j(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^j(0) \\ y_2^j(0) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow y_1^j(t) &= e^{\lambda_j t} (y_1^j(0) + t y_2^j(0)) \\ y_2^j(t) &= e^{\lambda_j t} y_2^j(0) \end{aligned}$$

- Se o bloco de Jordan tem dimensão 3, então:

$$e^{t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1^j(t) &= e^{\lambda_j t} \left(y_1^j(0) + t y_2^j(0) + \frac{t^2}{2} y_3^j(0) \right) \\ \Rightarrow y_2^j(t) &= e^{\lambda_j t} (y_2^j(0) + t y_3^j(0)) \\ y_3^j(t) &= e^{\lambda_j t} y_3^j(0) \end{aligned}$$

- Para blocos de Jordan de dimensão maior que 3 o cálculo é semelhante.
- Como $x(t) = M y(t)$ e $y(t) = e^{M^{-1} A M t} y(0)$, temos $y(0) = M^{-1} x(0)$ e

$$x(t) = M e^{M^{-1} A M t} M^{-1} x(0)$$

Mas $M e^{M^{-1} A M t} M^{-1} = M \left(I + M^{-1} A M t + \frac{(M^{-1} A M)^2 t^2}{2!} + \dots \right) M^{-1}$

$$= I + A t + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots = e^{A t}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{A t} x(0) \quad \text{como esperado.}$$

- Com isso concluímos que cada componente de uma solução $x(t)$ é da forma de uma soma de exponenciais (possivelmente complexas) multiplicadas por polinômios em t . Se todos os autovalores de A são simples, só aparecem as exponenciais.

Capítulo 6

Estabilidade de ponto de equilíbrio.

6.1 Estabilidade de Liapunov.

1) Considere a EDO $\dot{x} = f(x)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$. Suponha que \bar{x} é um equilíbrio, ou seja, $f(\bar{x}) = 0$.

Dizemos que \bar{x} é estável no sentido de Liapunov se, dado um $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \delta \implies \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon \quad \text{para todo } t \geq 0.$$

2) Dizemos que o equilíbrio é assintoticamente estável se existir $\delta > 0$ tal que:

$$\text{para todo } x(0) \text{ tal que } \|x(0) - \bar{x}\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}. \quad (6.1)$$

6.2 Limitação dada pela parte linear

Teorema (Veja Figueiredo e Neves, Teorema 7.3): Seja α tal que $\alpha > \operatorname{Re} \lambda$ para todo autovalor λ da matriz A . Então, existe uma constante M tal que, para toda a solução de $\dot{x} = Ax$, vale:

$$\|x(t)\| \leq M e^{\alpha t} \|x(0)\|.$$

Prova: Simples no caso em que todos os autovalores são simples. Basta diagonalizar a matriz A . Veja Figueiredo e Neves (cópia fornecida na aula passada) para o caso geral.

Corolário: Se $\operatorname{Re} \lambda < 0$ para todo autovalor λ de A , então, para todo $0 < \epsilon < \min\{-\operatorname{Re} \lambda\}$, existe $M(\epsilon) > 0$ tal que:

$$\|x(t)\| \leq M e^{-\epsilon t} \|x(0)\|$$

para toda solução de $\dot{x} = Ax$.

Ou seja, $x = 0$ é um equilíbrio assintoticamente estável de $\dot{x} = Ax$.

6.3 Estabilidade assintótica linear implica estabilidade do equilíbrio da EDO não linear

Teorema: Considere a EDO $\dot{x} = f(x)$ onde $x \in \mathbb{R}^n$ possui o equilíbrio \bar{x} como solução. Considere a equação linearizada em \bar{x} , ou seja:

$$\dot{y} = Df(\bar{x})y$$

onde $y \in \mathbb{R}^n$.

Se todo autovalor λ de $Df(\bar{x})$ satisfaz $\operatorname{Re}\lambda < 0$, então o equilíbrio \bar{x} de $\dot{x} = f(x)$ é assintoticamente estável (ver parágrafo (2) da Seção 1).

Prova: Teorema 7.7 em Figueiredo e Neves. O conhecimento da prova, deste teorema fundamental na teoria das EDO, não será cobrada neste curso.

Capítulo 7

Sistemas lineares Forçados (não homogêneos).

7.1 Sistemas Lineares Forçados

$$\dot{x} = Ax + f$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f(t)$ é a função forçante.

1) Fórmula da variação das constantes

Considere a mudança de variável dependente do tempo:

$$x = e^{At}y$$

Substituindo na equação:

$$\dot{x} = Ae^{At}y + e^{At}\dot{y} = Ae^{At}y + f(t)$$

$$\Rightarrow e^{At}\dot{y} = f(t) \Rightarrow \dot{y} = e^{-At}f(t)$$

onde e^{-At} é a inversa de e^{At} .

Logo, integrando componente a componente:

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A\eta}f(\eta)d\eta$$

2) Voltando à variável x

$$e^{At}y(t) = e^{At}y(t_0) + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\eta}f(\eta)d\eta$$

com

$$x = e^{At}y$$

temos

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\eta)}f(\eta)d\eta$$

3) Forçante da forma $f(t) = e^{st}\hat{f}$

Quando

$$f(t) = e^{st}\hat{f}$$

onde $s = a + i\omega t \in \mathbb{C}$ é constante e

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_n \end{pmatrix} \text{ com } \hat{f}_j \in \mathbb{C} \text{ constante}$$

temos a equação:

$$\dot{x} = Ax + e^{st}\hat{f}$$

Seja $x(t) = e^{st}\hat{x}$, onde $\hat{x} \in \mathbb{C}$ constante, uma tentativa de solução. Substituindo:

$$\dot{x} = se^{st}\hat{x} = e^{st}A\hat{x} + e^{st}\hat{f} \Rightarrow (sI - A)\hat{x} = \hat{f}$$

Se s não é um autovalor de A , então

$$\hat{x} = (sI - A)^{-1}\hat{f} \tag{7.1}$$

Observação: O caso mais interessante é aquele no qual $s = i\omega$ (a forçante é da forma $(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))\hat{f}$) e $\text{Re}\lambda < 0$ para todo autovalor de A . Neste caso, s não é autovalor de A .

A fórmula da variação das constantes pode ser reescrita como:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\eta)}f(\eta)d\eta$$

$$t - \eta = \xi \Rightarrow -d\eta = d\xi \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_0^{t-t_0} e^{A\xi}f(t-\xi)d\xi \\ &= e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_0^{t-t_0} e^{A\xi}e^{s(t-\xi)}\hat{f}d\xi \end{aligned}$$

ou

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + e^{st} \int_0^{t-t_0} e^{(A-sI)\xi}\hat{f}d\xi \tag{7.2}$$

Se $0 > \operatorname{Re} \lambda$ para todos os autovalores de A , então para qualquer $x(t_0)$:

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} e^{A(t-t_0)} x(t_0) = 0$$

Neste caso a solução periódica obtida para $t \gg t_0$ não depende da condição inicial.

Se existirem autovalores de A com parte real positiva, então escolhemos $x(t_0) = 0$ de tal modo que a equação (7.2) fica

$$x(t) e^{st} \int_0^{t-t_0} e^{(A-sI)\xi} \hat{f} d\xi$$

Neste caso, vale

Se $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \lambda$ para todos os autovalores de A , então:

$$x(t) = e^{st} \int_0^\infty e^{(A-sI)\xi} d\xi \hat{f} \quad (7.3)$$

Comparando a solução na equação (7.3) com a solução $x(t) = e^{st} \hat{x}$ onde, da equação (12.2),

$$\hat{x} = (sI - A)^{-1} \hat{f}$$

e supondo que ambas as soluções são iguais obtemos:

$$\boxed{(sI - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{(A-sI)\xi} d\xi} \quad (7.4)$$

Note, para qualquer número $a < 0$

$$\int_0^\infty e^{a\xi} d\xi = -\frac{1}{a}$$

A fórmula (7.4) generaliza, para matrizes, esta identidade.

Prova que as soluções $e^{st} \hat{x}$, (\hat{x} dada em (12.2)) e $\int_0^\infty e^{(A-sI)\xi} d\xi \hat{f} e^{st}$ são iguais.

Seja

$$\tilde{x}(t) = (sI - A)^{-1} \hat{f} e^{st}$$

e

$$x(t) = \int_0^\infty e^{(A-sI)\xi} d\xi \hat{f} e^{st},$$

A diferença dessas soluções

$$y(t) := x(t) - \tilde{x}(t)$$

é solução da equação homogênea

$$\dot{y}(t) = Ay(t).$$

Qualquer solução não trivial da equação homogênea pode ser decomposta como a soma de funções de forma $P(t)e^{\lambda t}$, onde λ é um autovalor de A e $P(t)$ é um polinômio (em geral constante).

Como supusemos que s não é autovalor de A , então y é a solução trivial.

Capítulo 8

Transformada de Laplace.

Definições

1) Definição: Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $|f(t)| \leq Ke^{rt}$ para algum $r > 0$, $K > 0$ constante.

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

onde $s \in \mathbb{C}$ com $\Re(s) > r$.

Transformada Inversa

2) Se $F(s)$ é a transformada de alguma f , então:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{st} F(s) ds$$

onde β é uma constante tal que $\beta > r$.

Observações e Propriedades

3) **Note:** A transformada de Laplace é linear.

$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\}$$

(propriedade da integral) onde $a \in \mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}$.

4) **Propriedade:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = [f(t)e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= f(\infty)e^{-\infty} - f(0) + s\mathcal{L}\{f\} \\ \mathcal{L}\{f'\} &= sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$ e $\Re(s) > r$.

Logo:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'\} = sF(s) - f(0)}$$

5) **Aplicação:** Considere a equação $\dot{x} = ax + f(t)$ onde $x \in \mathbb{R}$.

Aplicamos a transformada de Laplace a ambos os lados:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = \mathcal{L}\{ax + f\} = a\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{f\}$$

Utilizando a propriedade (4):

$$-x(0) + sX(s) = aX(s) + F(s)$$

Portanto:

$$X(s) = \frac{x(0) + F(s)}{s - a}$$

Logo, o problema que no domínio do tempo era de resolver uma equação diferencial, passa a ser, no domínio da transformada (s), o de resolver uma equação algébrica.

Entretanto, para escrever $X(s)$ no domínio do tempo, precisamos encontrar $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$.

6) **Propriedade:**

$$\mathcal{L}\{f''\} = -f'(0) - f(0)s + s^2F(s)$$

(Integração por partes duas vezes, façam.)

7) **Propriedade:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(u)du\right) dt \\ &= -\frac{1}{s}e^{-st} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s}F(s) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

8) **Propriedade:**

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = F(s - a)$$

9) **Propriedade (relevante em probabilidade):**

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ F'(s) &= \frac{dF}{ds} = \int_0^\infty (-t)e^{-st}f(t)dt \Rightarrow \mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s) \\ F^{(n)}(s) &= \frac{d^n F}{ds^n} = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-st}f(t)dt \Rightarrow \mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \end{aligned}$$

Nota:

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^\infty f(t)dt \\ F'(0) &= -\int_0^\infty tf(t)dt \\ F^{(n)}(0) &= (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t)dt \end{aligned}$$

Logo os momentos da função f são dados pelas derivadas de $F(s)$ em $s = 0$.

Exemplos

10) Exemplos:

a)

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Logo:

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

b)

$$\mathcal{L}\{t\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t 1 d\tau\right\} = \frac{1}{s^2}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

c)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \frac{1}{s^{n+1}}$$

Basta aplicar a propriedade 7 repetidamente.

d)

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \mathcal{L}\{e^{-at} \cdot 1\} = \frac{1}{s+a}$$

e)

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at} \frac{t^n}{n!}\right\} = \frac{1}{(s+a)^{n+1}}$$

Usei as propriedades (8) e (c).

f)

$$\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} = \frac{1}{s-i\omega} \quad (\text{de (d) com } a = -i\omega)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right\} &= \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{2i} [\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} - \mathcal{L}\{e^{-i\omega t}\}] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

g) Analogamente:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Transformada de Laplace de Vetores e Matrizes

11) Se $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, então:

$$X(s) = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{pmatrix}$$

Se $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$, então:

$$A(s) = \begin{pmatrix} A_{11}(s) & \cdots & A_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}(s) & \cdots & A_{nn}(s) \end{pmatrix}$$

Aplica-se a transformada de Laplace componente a componente.

Aplicações

12) Considere a equação $\dot{x} = Ax$ com $x \in \mathbb{R}^n$ e $x(0)$ dado.

Aplicando a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= \mathcal{L}\{Ax\} = A\mathcal{L}\{x\} \Rightarrow -x(0) + sX(s) = AX(s) \\ (sI - A)X(s) &= x(0) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) \end{aligned}$$

onde $s \in \mathbb{C}$ e não é um autovalor de A , ou seja, $\det(sI - A) \neq 0$.

13) Sabemos que $x(t) = e^{At}x(0)$ resolve $\dot{x} = Ax$. Logo:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{e^{At}x(0)\} = \mathcal{L}\{e^{At}\}x(0)$$

Portanto:

$$X(s) = \mathcal{L}\{e^{At}\}x(0)$$

14) De (12) e (13), concluímos que:

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1} \quad \text{ou} \quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

Cálculo de $\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$ diretamente

15) Suponha que $\Re(s)$ é suficientemente grande, tal que:

$$\left\| \frac{A}{s} \right\| < 1 \quad \text{onde} \quad \|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

16) **Proposição:** Sob a hipótese (15), vale:

$$(sI - A)^{-1} = I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \frac{A^3}{s^3} + \dots$$

17) Prova:

$$\begin{aligned} & \left(I - \frac{A}{s}\right) \left(I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \frac{A^3}{s^3} + \dots + \frac{A^N}{s^N}\right) \\ &= I + \frac{A}{s} - \frac{A}{s} - \frac{A^2}{s^2} + \frac{A^2}{s^2} - \dots - \frac{A^N}{s^N} - \frac{A^{N+1}}{s^{N+1}} = I - \frac{A^{N+1}}{s^{N+1}} \end{aligned}$$

Quando $N \rightarrow \infty$, como $\left\|\frac{A}{s}\right\| < 1$, temos que:

$$\frac{A^{N+1}}{s^{N+1}} \rightarrow 0$$

Logo, a soma converge para I .

18) De (16):

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= s^{-1} \left(I - \frac{A}{s}\right)^{-1} = s^{-1} \left(I + \frac{A}{s} + \frac{A^2}{s^2} + \frac{A^3}{s^3} + \dots\right) \\ &= \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots + \frac{A^k}{s^{k+1}} + \dots \end{aligned}$$

19) Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{(sI - A)^{-1}\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots + \frac{A^k}{s^{k+1}} + \dots \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s^2} \right\} + \dots = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{I}{s} \right\} I + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} A + \dots \end{aligned}$$

De (10c):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{k+1}} \right\} &= \frac{t^k}{k!}, \quad \text{logo:} \\ \mathcal{L}^{-1} \{(sI - A)^{-1}\} &= I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^k A^k}{k!} + \dots = e^{At} \end{aligned}$$

Conclusão

$$\mathcal{L} \{e^{At}\} = \int_0^{\infty} e^{(A-I)s} dt = (sI - A)^{-1}$$

O texto que segue foi retirado do livro: “Modern Control Engineering”, Fifth Edition, by Katsuhiko Ogata.

Capítulo 9

Matriz de Transferência e Resposta em Frequência.

1. Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{9.1}$$

$$y = Cx$$

onde:

- $x \in \mathbb{R}^n$ é a variável de estados,
- $u \in \mathbb{R}^r$ é a entrada,
- $y \in \mathbb{R}^m$ é a saída,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são matrizes reais.

2. Seja $u = \hat{u}e^{st}$ onde $s = \nu + i\omega \in \mathbb{C}$ e $\hat{u} \in \mathbb{R}^r$ (constantes)

Procuramos por soluções tais que:

$$x = \hat{x}e^{st}, \quad y = \hat{y}e^{st}$$

onde $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ são constantes.

3. Substituindo (2) em (1), obtemos

$$(sI - A)\hat{x} = B\hat{u} \tag{9.2}$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\hat{x} = (sI - A)^{-1}B\hat{u}$$

Substituindo em \hat{y} :

$$\hat{y} = C\hat{x} = C(sI - A)^{-1}B\hat{u}$$

4. No caso em que $r = 1$ e $m = 1$, a matriz de transferência é chamada

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \text{função de transferência.}$$

A seguir vamos considerar apenas o caso $r = 1$ e $m = 1$.

5. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

e A_{ij} o cofator do elemento a_{ij} , isto é, $(-1)^{i+j}$ vezes o determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$ constituída pela eliminação da i -ésima linha e j -ésima coluna de A .

Denotamos por

$$A_c = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

a matriz dos cofatores de A e por A_c^T sua transposta.

6. Vale

$$A^{-1} = \frac{A_c^T}{\det(A)}$$

se $\det(A) \neq 0$.

7. De (5) e (6) temos que

$$(sI - A)^{-1} = \frac{(sI - A)_c^T}{\det(sI - A)}$$

onde $\det(sI - A) = p(s)$ é o polinômio característico de A de grau n .

Cada entrada de $(sI - A)_c^T$ tem grau no máximo $n-1$ em s (teste em uma matriz 2×2).

8. Como $C(sI - A)_c^T B$ é uma combinação linear de elementos da matriz $(sI - A)$, temos que $C(sI - A)_c^T B$ é um polinômio de grau $\leq n-1$.

9. Logo, a função de transferência

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{C(sI - A)_c^T B}{\det(sI - A)} = \frac{q(s)}{p(s)}$$

onde grau $q(s) \leq n-1$ e grau $p(s) = n$.

10. Expansão em frações parciais

Suponha que todas as raízes de $p(\lambda)$ sejam simples. Então podemos escrever:

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q(s)}{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_n)} = \frac{a_1}{s - \lambda_1} + \frac{a_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - \lambda_n}$$

onde

$$a_j = \lim_{s \rightarrow \lambda_j} \frac{q(s)(s - \lambda_j)}{p(s)}$$

Logo, a função de transferência pode ser escrita como:

$$G(s) = \frac{a_1}{s - \lambda_1} + \frac{a_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - \lambda_n}$$

onde a_1, \dots, a_n são constantes, possivelmente complexas, caso haja autovalores complexos.

11. Podemos decompor a resposta do sistema como

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{st}\hat{y}, \quad \hat{y} \in \mathbb{C} \\ \hat{y} &= G(s)\hat{u}, \quad \hat{u} \in \mathbb{C} \\ \hat{y} &= \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \dots + \hat{y}_n = \frac{a_1}{s - \lambda_1}\hat{u} + \dots + \frac{a_n}{s - \lambda_n}\hat{u} \end{aligned} \quad (9.3)$$

12. Se λ_j é real, então

$$a_j = \lim_{s \rightarrow \lambda_j} \frac{q(s)}{(s - \lambda_j)p(s)} \text{ é real.}$$

O termo correspondente na decomposição dada na equação (9.3) é:

$$\hat{y}_j = \frac{a_j}{s - \lambda_j}\hat{u}$$

Este tipo de termo é dito de 1^a ordem, pois é o mesmo que resulta da equação:

$$\dot{y} = \lambda_j y + a_j u$$

onde $y \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}$.

13. Se $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ então $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \in \mathbb{C}$ (complexo conjugado)

Se $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, então $\lambda_2 = \alpha - \beta i$.

E

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} \frac{q(s)(s - \lambda_1)}{p(s)} = \gamma + \delta i$$

e

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow \bar{\lambda}_1} \frac{q(s)(s - \bar{\lambda}_1)}{p(s)} = \gamma - \delta i.$$

Com isso:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{s - \lambda_1} + \frac{a_2}{s - \lambda_2} &= \frac{\gamma + \delta i}{s - (\alpha + \beta i)} + \frac{\gamma - \delta i}{s - (\alpha - \beta i)} \\ &= \frac{2\gamma s - 2(\alpha\gamma + \beta\delta)}{s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

14. O termo correspondente a (13)

$$\hat{y}_1 + \hat{y}_2 = \frac{a_1}{s - \lambda_1}\hat{u} + \frac{a_2}{s - \lambda_2}\hat{u}$$

é dito de 2^o ordem, pois é o mesmo que resulta da equação:

$$\ddot{y} - 2\alpha\dot{y} + (\alpha^2 + \beta^2)y = 2\gamma\dot{u} - 2(\alpha\gamma + \beta\delta)u.$$

Capítulo 10

Resposta em frequência de 1^o e 2^o ordem.

1^o Ordem

1) Da aula 9, parágrafo (12), temos que em um sistema com uma entrada e uma saída, cada autovalor simples λ corresponde a uma parcela da forma

$$\frac{a}{s - \lambda}$$

na função de transferência, $a \in \mathbb{R}$. Este termo é o mesmo que se obtém da equação

$$\dot{y} = \lambda y + au$$

com $u(t) = \hat{u}e^{st}$, onde $\hat{u} = 1$, \hat{u} real, $\sigma > 0$, $a = 1$ e $\lambda = -\nu < 0$.

2) Seja $s = i\sigma$, nós temos que

$$y(t) = \hat{y}e^{i\sigma t}$$

com

$$\hat{y} = \frac{a}{s - \lambda} \hat{u} = G(s) \hat{u} = \frac{1}{i\sigma + \nu} = \frac{\nu - i\sigma}{\nu^2 + \sigma^2}$$

3)

$$G(i\sigma) = \frac{\nu - i\sigma}{\sigma^2 + \nu^2} = \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}}$$

$$\tan \delta = \frac{-\sigma}{\nu} < 0$$

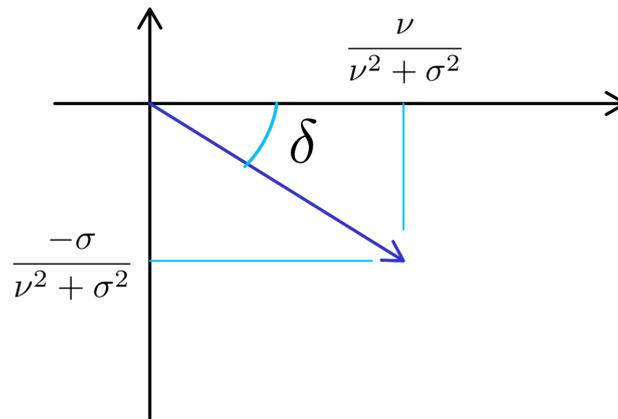


Figura 10.1: Representação geométrica da função de transferência para um particular valor de σ .

4) Com isso,

$$y(t) = \hat{y}e^{i\sigma t} = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}} e^{i\sigma t} = \frac{e^{i(\sigma t + \delta)}}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}}$$

5) Portanto, tomando a parte real e imaginária da entrada $u = e^{i\sigma t}$ e da correspondente saída $y(t) = \frac{e^{i(\sigma + \delta)t}}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}}$, obtemos:

$$\text{Entrada: } \cos(\sigma t) \quad \longrightarrow \quad \text{Saída: } \frac{\cos((\sigma + \delta)t)}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}}$$

$$\text{Entrada: } \sin(\sigma t) \quad \longrightarrow \quad \text{Saída: } \frac{\sin((\sigma + \delta)t)}{\sqrt{\sigma^2 + \nu^2}}$$

6) Vamos normalizar a função de transferência de 1ª ordem de tal modo que para $\sigma = 0$ a resposta seja igual à entrada. Como

$$G(i\sigma) = \frac{e^{i\delta}}{\nu\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\nu^2}}}$$

temos a função de transferência normalizada

$$K(\sigma) = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{1 + (\frac{\sigma}{\nu})^2}} = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{1 + (\tau\sigma)^2}}$$

onde

$$\tau = \frac{1}{\nu}$$

é a chamada constante de tempo, que possui unidade de tempo. Note

$$\tan \delta = -\frac{\sigma}{\nu} = -\tau\sigma$$

7) A função de ganho é definida como

$$|K(\sigma)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma\tau)^2}} = \text{Ganho}$$

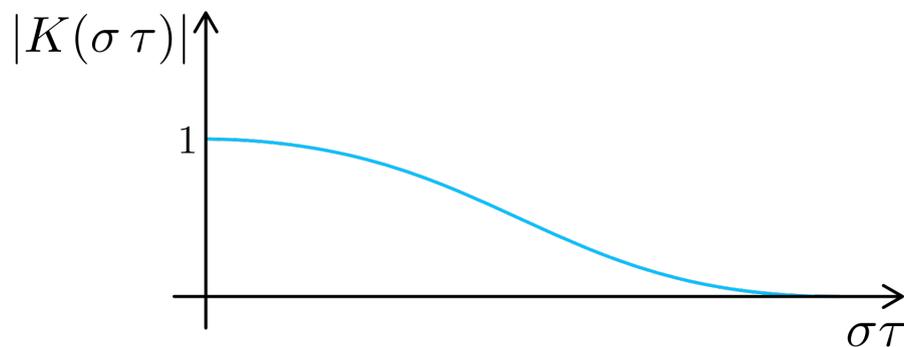


Figura 10.2: Esboço da função de ganho.

8) $\delta \in \mathbb{R}$ é o chamado ângulo de fase (phase shift). Quando $\delta < 0$, o ângulo de fase é chamado de atraso de fase (phase delay).

$$\delta = -\arctan\left(\frac{\sigma}{\nu}\right) = \arctan(-\tau\sigma) < 0$$

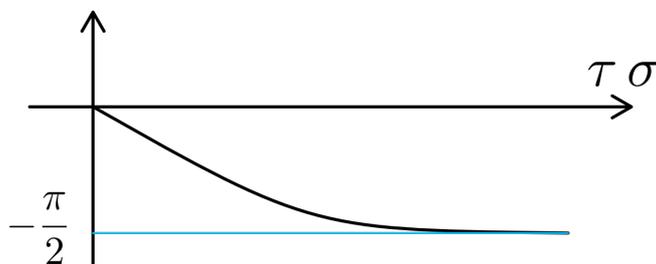


Figura 10.3: Esboço da função atraso de fase.

9)

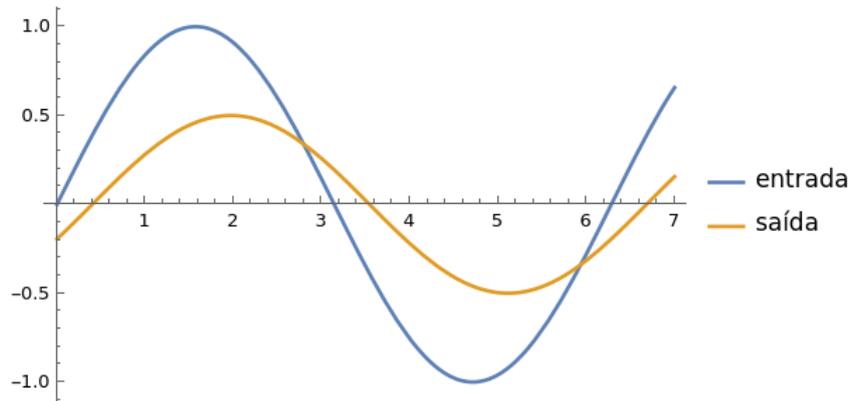


Figura 10.4: Esboço de uma saída para a entrada $u(t) = \sin(t)$. O ganho é 0.5 e o atraso de fase é 0.4 rad.

2ª Ordem

15) Da aula 9, parágrafo (14), a resposta de 2ª ordem está associada a um autovalor complexo:

$$\lambda = -\nu + i\omega \quad (\text{ou } = \alpha + \beta i \text{ na notação de aula 10})$$

Os termos na expansão em frações parciais da função de transferência que correspondem à resposta de 2ª ordem, produzem a mesma resposta dinâmica que a seguinte equação de segunda ordem (ver aula 9, parágrafo (14)):

$$\ddot{y} + 2\nu\dot{y} + (\nu^2 + \omega^2)y = 2\gamma\dot{u} - 2(-\nu\gamma + \omega\tilde{\delta})u$$

16) Vamos simplificar a forçante e dar uma interpretação física aos coeficientes. Escolhendo $\gamma = 0$ e $\tilde{\delta} = -\frac{1}{2m\omega}$ obtemos

$$\ddot{y} = -(\nu^2 + \omega^2)y - 2\nu\dot{y} + \frac{1}{m}e^{i\sigma t} \quad (10.1)$$

Faremos a seguinte redefinição de parâmetros

$$\frac{k}{m} := \nu^2 + \omega^2, \quad \frac{b}{m} := 2\nu \quad (10.2)$$

Com isso reescrevemos a equação (10.1) como

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m}y - \frac{b}{m}\dot{y} + \underbrace{\frac{1}{m}e^{i\sigma t}}_{=F/m} \quad (10.3)$$

Esta é a equação do sistema massa-mola-amortecedor forçado representado na Figura 10.5.

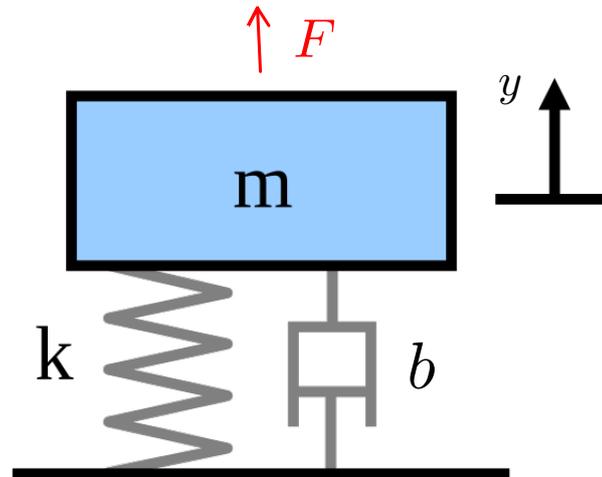


Figura 10.5: Sistema massa-mola-amortecedor forçado associado à equação (10.3).

A função de transferência associada às equações (10.1) e (10.3) é:

$$G(\sigma) = \frac{1/m}{-\sigma^2 + (\nu^2 + \omega^2) + 2\nu\sigma i}$$

ou

$$G(\sigma) = \frac{1/m}{-\sigma^2 + \frac{k}{m} + \frac{b}{m}\sigma i} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \frac{m}{k}\sigma^2 + \frac{b}{k}\sigma i}$$

17) Introduzimos a notação:

•

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \text{“quadrado da frequência natural”}$$

onde a frequência natural é aquela de oscilações do sistema autônomo não amortecido:

$$m\ddot{y} = -ky$$

$$\frac{k}{m} := \nu^2 + \omega^2, \quad \frac{b}{m} := 2\nu \quad (10.4)$$

•

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{b}{m} \frac{1}{\omega_n} \quad \text{“razão de amortecimento” (damping ratio)}$$

Note ζ é adimensional.

Se usarmos as relações na equação (10.4) obtemos a condição

$$\zeta = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \omega^2}} < 1 \quad (10.5)$$

que é necessária e suficiente para que os autovalores associados à equação (10.3) sejam complexos. Caso contrário eles são reais e temos as respostas de primeira ordem.

Com isso

$$G(\sigma) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m}{k}\sigma^2 + \frac{b}{m}\frac{\sigma i}{\omega_n}} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right)i}$$

18) Após cálculos, temos o ganho:

$$\text{ganho} = K(\sigma) = k|G(i\sigma)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right)^2\zeta^2}}$$

E o ângulo de fase:

$$\text{ângulo de fase} = -2\zeta \frac{\frac{\sigma}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\sigma}{\omega_n}\right)^2}$$

19) O máximo do ganho $K(\sigma)$ ocorre para as frequências:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{\omega_n} &= \sqrt{1 - 2\zeta^2} & \text{se } 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sigma &= 0 & \text{se } \zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

A frequência de ressonância é

$$\sigma_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

que para sistemas com pequena razão de amortecimento, $\zeta \approx 0$, é:

$$\sigma_r \approx \omega_n(1 - \zeta^2)$$

20) Pico da ressonância (resonance peak) ou valor máximo de $K(\sigma)$:

$$\begin{aligned} K_{max} &= \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} & \text{se } 0 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ K_{max} &= K(0) = 1 & \text{se } \zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

21) Se $\zeta < 1$ então

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} > \sigma_r$$

é a frequência da oscilação livre amortecida, onde $\lambda = -\nu + i\omega$.

Capítulo 11

Resposta transiente (ou transitória) de 1^oe 2^o ordem.

Resposta de 1^o ordem

1) Dada a equação $\dot{x} = Ax + f$, onde $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$ e A é diagonalizável sobre os complexos, existe uma mudança de base $x = Pz$ tal que

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{f}$$

onde

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \in \mathbb{C}$$

e

$$\tilde{f} = P^{-1}f.$$

2)

Suponha que $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ é um autovalor simples. Neste caso, a 1^a coluna da matriz P é o autovetor associado a λ_1 :

$$v_1 = P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

com

$$Av_1 = \lambda_1 v_1.$$

3) Suponha dados $x(0) \in \mathbb{R}^n$ e $f(t) \in \mathbb{R}^n$ da forma:

$$x(0) = \xi(0)v_1, \quad f(t) = f_1(t)v_1,$$

onde $\xi(t) \in \mathbb{R}$ e $f_1(t) \in \mathbb{R}$. Substituindo $x(t) = \xi(t)v_1$ e $f(t) = f_1(t)v_1$ na equação $\dot{x} = Ax + f$, temos:

$$\dot{\xi}v_1 = A\xi v_1 + f_1 v_1.$$

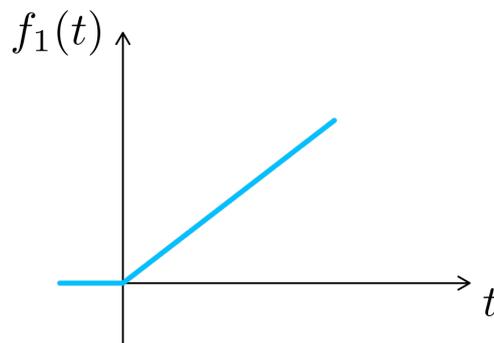
Como $Av_1 = \lambda_1 v_1$, isso implica que:

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi + f_1.$$

Forças usadas no estudo do comportamento transiente

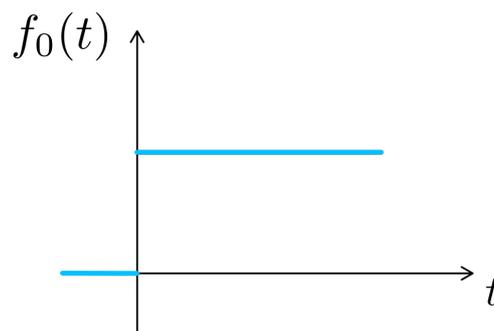
4) Função Rampa

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



5) Função degrau unitário

$$f_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$



6) Observação

$$f_0(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(t), \quad \text{onde } f_\epsilon(t) = \frac{e^{t/\epsilon}}{1 + e^{t/\epsilon}}.$$

A função degrau é obtida no limite $\epsilon \rightarrow 0$.

7) Função impulso (ou função δ , ou δ -Dirac)

$$\delta(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f'_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

A integral da função impulso é dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'_\epsilon(t) dt = f_\epsilon(\infty) - f_\epsilon(-\infty) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt.$$

E vale também:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f'_\epsilon(t) g(t) dt = g(0),$$

onde usamos $g(0) + tg'(0) + \dots$.

8) Fórmula da variação das constantes:

$$x(t) = e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-As} f(s) ds$$

No caso da equação escalar $\dot{\xi} = -\nu\xi + f$, $\xi \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$, com $\lambda_1 = -\nu$, $\nu > 0$, a solução é dada por:

$$\xi(t) = e^{-\nu t} \xi(0) + e^{-\nu t} \int_0^t e^{\nu s} f(s) ds$$

9) É padrão na teoria de controle analisar a resposta transiente usando $\xi(0) = 0$.

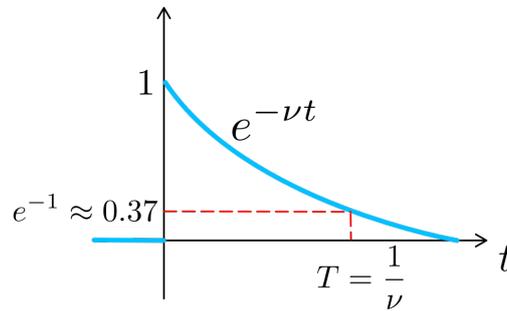
10) Resposta transiente de 1ª ordem à função impulso. Se $f(s) = \delta(s)$ em $s = 0$, então:

$$\xi(t) = e^{-\nu t} \int_0^t e^{\nu s} f(s) ds$$

Como $e^{\nu \cdot 0} = 1$, temos:

$$\xi(t) = e^{-\nu t}.$$

11) Observação A função impulso vale 0 para $t > 0$, logo o sistema é livre para $t > 0$, e o efeito do impulso é equivalente ao de tornar as condições iniciais não nulas.

12) Representação gráfica da resposta de 1ª ordem à função impulso

ν = “decay rate” = taxa de decaimento

$\frac{1}{\nu}$ = “time constant” = constante de tempo = T

$\frac{1}{\nu}$ = também chamado de tempo de amortecimento (“damping time”)

$T_h = \frac{\ln 2}{\nu}$ = “half life” = meia vida

$$e^{-\nu T_h} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_h = \frac{\ln 2}{\nu}.$$

Observação: A constante de tempo T é a vida média.

Note:

$$\xi(t) - \xi(t + dt) = -\dot{\xi}(t)dt = \text{número de mortes entre } t \text{ e } t + dt.$$

A vida média é:

$$\frac{-\int_0^{\infty} t \dot{\xi}(t) dt}{-\int_0^{\infty} \dot{\xi}(t) dt} = \frac{\int_0^{\infty} \xi(t) dt}{\xi(0)}$$

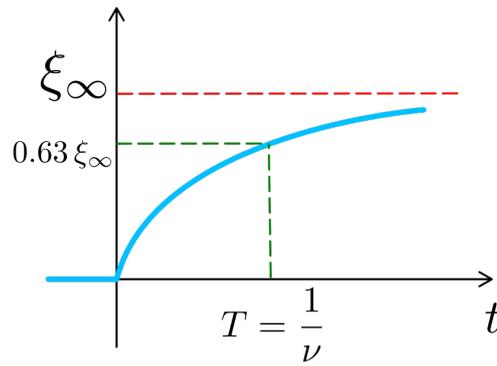
onde fizemos integração por partes do numerador. Usando que $\xi(t) = \xi(0)e^{-\nu t}$ integramos o numerador e obtemos

$$\text{Vida Média} = \frac{1}{\nu} = T$$

13) Resposta à função degrau.

Da fórmula da variação das constantes:

$$\xi(t) = e^{-\nu t} \int_0^t e^{\nu s} ds = e^{-\nu t} \left[\frac{e^{\nu t} - 1}{\nu} \right]$$



Portanto, temos:

$$\xi(t) = \frac{1 - e^{-\nu t}}{\nu}, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad \xi(t) = 0, \quad t < 0.$$

$$T = \frac{1}{\nu}$$

Se T é pequeno, $\xi(t)$ se aproxima rapidamente do valor de equilíbrio

$$\xi_{\infty} = \frac{1}{\nu} = T$$

Note:

$$\xi(0) = 0 \quad \text{para qualquer } \nu.$$

14) Resposta de 1ª ordem à função rampa

Da fórmula da variação das constantes:

$$\xi(t) = e^{-\nu t} \int_0^t s e^{\nu s} ds = e^{-\nu t} \left[\frac{s e^{\nu s}}{\nu} \right]_0^t - \int_0^t \frac{e^{\nu s}}{\nu} ds.$$

obtemos:

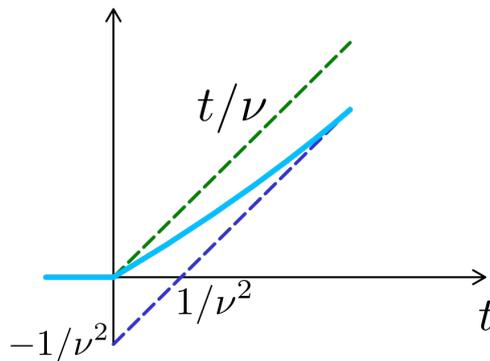
$$\xi(t) = \frac{t}{\nu} - \frac{1}{\nu^2} + \frac{e^{-\nu t}}{\nu^2}.$$

Com as condições inicial:

$$\xi(0) = 0$$

Note:

$$\dot{\xi}(0) = 0.$$



O erro de estado estacionário (steady-state error) é dado por:

$$\frac{1}{\nu^2} = T^2.$$

Logo, se T^2 é pequeno, temos um erro pequeno no estado estacionário.

15) Conclusão A resposta de 1ª ordem é determinada por $T = \frac{1}{\nu}$. Para T pequeno (ν grande), o transiente é curto.

Resposta de 2ª ordem

1) Resposta transiente de 2ª ordem (Ogata, Seção 5.3)

Suponha que A possua um autovalor complexo isolado $\lambda = -\nu + i\omega$, onde $\nu > 0$ e $\omega > 0$. Como A é real, $\bar{\lambda} = -\nu - i\omega$ também é autovalor.

2)

O autovetor $v \in \mathbb{C}^n$ associado a λ pode ser escrito como:

$$v = v_1 + iv_2, \quad \text{onde } v_1 \in \mathbb{R}^n \text{ e } v_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Substituindo na equação do autovalor:

$$Av = \lambda v \quad \Rightarrow \quad A(v_1 + iv_2) = (-\nu + i\omega)(v_1 + iv_2),$$

e expandindo, temos:

$$Av_1 + iAv_2 = (-\nu v_1 + \omega v_2) + i(\omega v_1 - \nu v_2).$$

Igualando as partes reais e imaginárias:

$$\begin{cases} Av_1 = -\nu v_1 - \omega v_2 \\ Av_2 = \omega v_1 - \nu v_2 \end{cases} \quad (*)$$

O subespaço invariante associado a λ tem dimensão (real) 2.

3)

Considere a equação $\dot{x} = Ax + f(t)$, onde:

$$x(0) = \xi_1(0)v_1 - \xi_2(0)v_2 \quad \text{e} \quad f(t) = f_1(t)v_1 - f_2(t)v_2,$$

$$x(t) = \xi_1(t)v_1 - \xi_2(t)v_2.$$

Substituindo em $\dot{x} = Ax + f(t)$:

$$\dot{x} = \dot{\xi}_1 v_1 - \dot{\xi}_2 v_2 = \xi_1 Av_1 - \xi_2 Av_2 + f_1 v_1 - f_2 v_2.$$

Sabemos que $Av_1 = -\nu v_1 - \omega v_2$ e $Av_2 = \omega v_1 - \nu v_2$, logo:

$$\dot{\xi}_1 v_1 - \dot{\xi}_2 v_2 = (-\nu \xi_1 - \omega \xi_2 + f_1)v_1 + (\omega \xi_1 - \nu \xi_2 + f_2)v_2.$$

Isso implica no sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -\nu\xi_1 - \omega\xi_2 + f_1 \\ \dot{\xi}_2 = \omega\xi_1 - \nu\xi_2 + f_2 \end{cases} \quad (**)$$

4)

A análise fica mais simples se escrevemos:

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \lambda = -\nu + i\omega, \quad f = f_1 + if_2.$$

Com isso:

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + f,$$

é equivalente ao sistema (**).

5) Fórmula das variações para A complexa.

Para resolver $\dot{\xi} = \lambda\xi + f$, fazemos a mudança de variável $\xi = e^{\lambda t}\eta$. Logo:

$$\dot{\xi} = \lambda e^{\lambda t}\eta + e^{\lambda t}\dot{\eta} = e^{\lambda t}(\lambda\eta + \dot{\eta}) + f.$$

Isso simplifica para:

$$\dot{\eta} = e^{-\lambda t}f.$$

Integrando:

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t e^{-\lambda s}f(s)ds.$$

Logo:

$$\eta(t) = e^{\lambda t}\eta(0) + e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s}f(s)ds.$$

Voltando para a variável ξ , obtemos:

$$\xi(t) = e^{\lambda t}\xi(0) + e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s}f(s)ds.$$

6)

No estudo da resposta transiente fazemos $\xi(0) = 0$. Assim, temos:

$$\xi(t) = e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s}f(s)ds.$$

7) A resposta à função impulso.

A resposta à função δ (impulso), $f = (f_1 + if_2)\delta(t)$, é equivalente à resposta do sistema livre com condições iniciais não nulas (como na resposta de 1ª ordem).

8) Resposta à função degrau

A função degrau é dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f_1 + if_2 = cte & t \geq 0 \end{cases}$$

De acordo com a equação (6):

$$\xi(t) = f e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} ds = f e^{\lambda t} \left. \frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda} \right|_0^t,$$

o que resulta em:

$$\xi(t) = \frac{f}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) = \xi_1 + i\xi_2.$$

9)

Para estudar a resposta do sistema, consideramos como saída a variável $\xi_1(t)$ e como entrada $f = 0 - i$ ($f_1 = 0, f_2 = -1$). Outras escolhas de entradas dão resultados semelhantes.

10)

De (8) e (9):

$$\xi_1(t) = \Re \left\{ \frac{-i}{-\nu + i\omega} \left(-1 + e^{(-\nu + i\omega)t} \right) \right\}.$$

Logo, temos:

$$\xi_1(t) = \frac{1}{\nu^2 + \omega^2} [\omega - e^{-\nu t} (\omega \cos(\omega t) + \nu \sin(\omega t))].$$

11)

Notação: $R(t) = \xi_1(t)(\nu^2 + \omega^2) = \text{Resposta}$.

$$R(t) = \omega - e^{-\nu t} (\omega \cos(\omega t) + \nu \sin(\omega t)).$$

Inicialmente:

$$R(0) = \omega - \omega = 0,$$

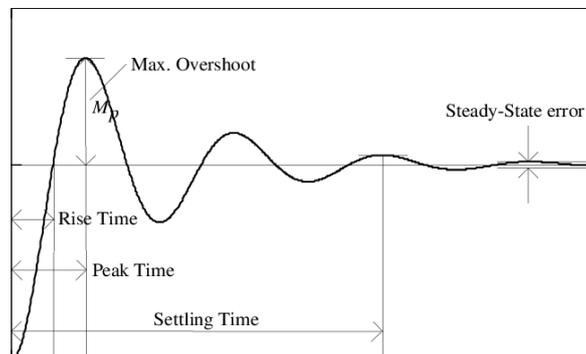
e a derivada em $t = 0$ é:

$$\dot{R}(0) = +\nu e^{-\nu \cdot 0} \cdot \omega - \nu \cdot \omega = 0.$$

Isso implica que:

$$R(t) \rightarrow \omega \quad \text{conforme} \quad t \rightarrow \infty.$$

12) Gráfico da resposta $R(t)$



O gráfico mostra a resposta $R(t)$ em função do tempo, com destaque para o tempo de pico (peak time t_p), o tempo de acomodação (settling time t_s) e o tempo de subida (rising time).

$$\frac{1}{\nu} = T = \text{constante de tempo ("time constant").}$$

t_s = tempo de acomodação ("settling time").

Existem tempos de acomodação t_s para 5 %, 2%, etc. O tempo t_s de 5% corresponde ao instante a partir do qual $|R(t) - R_\infty| < 0.05R_\infty$.

13) Tempo de Pico t_p ("peak time"):

Para determinar t_p , derivamos $R(t)$:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \nu e^{-\nu t} (\omega \cos(\omega t) + \nu \sin(\omega t)) - e^{-\nu t} (-\omega^2 \sin(\omega t) + \nu \omega \cos(\omega t)) = 0.$$

Simplificando:

$$\sin(\omega t)(\nu^2 + \omega^2) + \cos(\omega t)(\nu \omega - \nu \omega) = 0,$$

logo:

$$t_p \omega = \pi \quad \Rightarrow \quad t_p = \frac{\pi}{\omega}.$$

14) Sobressinal (M_p):

O sobressinal é definido como:

$$M_p = \frac{R(t_p) - R_\infty}{R_\infty}$$

Substituindo t_p e usand $R_\infty = \omega$:

$$M_p = \frac{R_\infty - e^{-\nu t_p} (\omega \cos \omega t_p + \nu \sin \omega t_p) - R_\infty}{R_\infty} = e^{-\nu t_p},$$

o que resulta em:

$$M_p = e^{-\nu t_p} = e^{-\frac{\nu}{\omega} \pi}.$$

Resumo

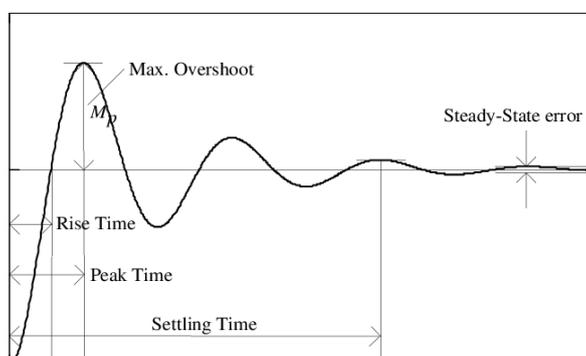
Considere um sistema de segunda ordem com autovalor $\lambda = -\nu + i\omega$. Há dois tempos importantes a serem considerados:

- $T = \frac{1}{\nu}$: constante de tempo, que determina o tempo de acomodação t_s .
- $t_p = \frac{\pi}{\omega}$: tempo de pico.
- $M_p = e^{-\frac{\nu}{\omega}\pi} = e^{-t_p/T}$: sobressinal (overshoot), que é determinado pela razão $\frac{t_p}{T}$.

O sobressinal é dado por:

$$M_p = \frac{R(t_p) - R_\infty}{R_\infty}.$$

O gráfico mostra $R(t)$ atingindo o valor assintótico R_∞ , com o sobressinal M_p e o tempo de pico t_p destacados.



Capítulo 12

Matriz de Controlabilidade e Estratégia Ótima.

1. Solução da equação não homogênea:

$$\dot{x} = Ax + f$$

Onde:

$$x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{incógnita}), \quad f(t) \in \mathbb{R}^n \quad (\text{dado, forçante})$$

e A é uma matriz de coeficientes constantes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Pela fórmula da variação das constantes, a solução da equação é:

$$x(t) = M(t)x(0) + \int_0^t M(t-\eta)f(\eta)d\eta$$

onde

$$M(t-\eta) = e^{A(t-\eta)} = e^{At}e^{-A\eta} = M(t)M(-\eta)$$

2. O sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Onde:

- x = variáveis de estado $\in \mathbb{R}^n$
- u = variáveis de controle (entrada) $\in \mathbb{R}^r$

é dito controlável se, para quaisquer condições iniciais $a \in \mathbb{R}^n$ e finais $b \in \mathbb{R}^n$, existir $T > 0$ e $u \in \mathcal{B} = \{u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r \text{ contínua por partes}\}$ tal que:

$$x(0) = a \quad \text{e} \quad x(T) = b$$

3. Caso trivial

Se $B = 0$, o sistema não é controlável. Por exemplo, não é possível conectar $a = 0$ e $b \neq 0$ por uma solução ($x = 0$ é ponto de equilíbrio da equação $\dot{x} = Ax$).

4. Caso em que B é a matriz identidade.

A equação é:

$$\dot{x} = Ax + u$$

Seja $b = x(T) = M(T)a + \int_0^T M(T - \eta)Bu(\eta)d\eta$. Como $B = \text{id}$, temos:

$$b - M(T)a = M(T) \int_0^T M(-\eta)u(\eta)d\eta$$

Definimos W como:

$$W = b - M(T)a \quad (\text{dado})$$

Escolhemos $u(\eta)$ como:

$$u(\eta) = M(\eta)M^{-1}(T)\frac{W}{T}$$

Logo:

$$W = M(T) \int_0^T M(-\eta)M(\eta)M^{-1}(T)\frac{W}{T}d\eta$$

Simplificando:

$$W = M(T)M^{-1}(T)W$$

Portanto, o sistema é controlável.

5. Observação:

Quando o sistema é controlável, existem muitas estratégias de controle. Usaremos o "Método dos Mínimos Quadrados" para selecionar uma.

6. Procura de $u \in \mathcal{B}$ por meio de minimização:

$$\min_{u \in \mathcal{B}} \frac{1}{2} \int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta$$

onde $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$, sob o vínculo:

$$W = \int_0^T M(T - \eta)Bu(\eta)d\eta$$

com $W = x(T) - M(T)x(0)$ (dado).

7. Uso de multiplicadores de Lagrange:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta - \lambda^T \left(\int_0^T M(T-\eta)Bu(\eta)d\eta - W \right)$$

Onde $\lambda \in \mathbb{R}^n$ são os multiplicadores de Lagrange.

8 Definição de ponto crítico.

A função \bar{u} é um ponto crítico (ou extremal) de Φ se, para toda variação $\delta \in \mathcal{B}$, com $\delta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$, vale:

$$\left. \frac{d}{ds} \Phi(\bar{u} + s\delta) \right|_{s=0} = 0 \quad \text{com } s \in \mathbb{R}$$

9. Derivação de Φ .

A expressão para $\Phi(\bar{u} + s\delta)$ é dada por:

$$\Phi(\bar{u} + s\delta) = \frac{1}{2} \int_0^T (|\bar{u}|^2 + 2s\bar{u}^T\delta + s^2|\delta|^2) d\eta - \lambda^T \left(\int_0^T M(T-\eta)B(\bar{u} + s\delta)d\eta - W \right)$$

A derivada de $\Phi(\bar{u} + s\delta)$ em relação a s é dada por:

$$\left. \frac{d}{ds} \Phi(\bar{u} + s\delta) \right|_{s=0} = \int_0^T \bar{u}^T \delta d\eta - \lambda^T \int_0^T M(T-\eta)B\delta d\eta = 0 \quad (12.1)$$

Ou seja:

$$\int_0^T (\bar{u}^T - \lambda^T M(T-\eta)B) \cdot \delta d\eta = 0$$

10. Lema de Du Bois-Reymond (1879); usado por Euler em 1744.

Vale a identidade na equação (12.1), para qualquer variação δ , se e só se:

$$\bar{u}^T = \lambda^T M(T-\eta)B$$

Logo, \bar{u} é um ponto crítico de Φ se:

$$\bar{u} = B^T M^T(T-\eta)\lambda$$

11. Para determinar λ , usamos o vínculo:

$$W = \int_0^T M(T-\eta)B\bar{u}(\eta)d\eta = \int_0^T M(T-\eta)BB^T M^T(T-\eta)\lambda d\eta$$

$$W = \int_0^T M(T-\eta)BB^T M^T(T-\eta)d\eta \cdot \lambda$$

12. Definição de Matriz de Controlabilidade Q_T :

$$Q_T := \int_0^T M(T-\eta)BB^T M^T(T-\eta)d\eta$$

é uma matriz $n \times n$.

13. Hipótese.

Supondo que Q_T é invertível, temos:

$$\lambda = Q_T^{-1}W$$

14. A estratégia de controle ótima é:

$$\bar{u}(\eta) = B^T M^T(T-\eta)Q_T^{-1}W$$

Note: $\bar{u} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função analítica.

15. Teorema (Jerzy Zabczyk, "Mathematical Control Theory: An Introduction", Cap. 1)

Se Q_T é invertível, então $\dot{x} = Ax + Bu$ com

$$\bar{u}(\eta) = B^T M^T(T-\eta)Q_T^{-1}W$$

satisfaz:

- Dados quaisquer $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$, se W for escolhido como $W = b - M(T)a$, então $x(0) = a$ é levado em $x(T) = b$ (o sistema é controlável).
- Para qualquer outra estratégia de controle u que leve $x(0) = a$ e $x(T) = b$, vale:

$$\int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta > \int_0^T |\bar{u}(\eta)|^2 d\eta \quad \text{para } u \neq \bar{u}.$$

Obs: $Q_T > 0$ (isto é, $\langle v, Q_T v \rangle > 0$ para todo $v \neq 0$). Q_T é invertível $\Leftrightarrow Q_T > 0$ (definida positiva).

16. Prova

- Sabemos que $\bar{u}(\eta) = B^T M^T(T-\eta)Q_T^{-1}W$, e que:

$$\int_0^T M(T-\eta)B\bar{u}(\eta)d\eta = \int_0^T M(T-\eta)BB^T M^T(T-\eta)d\eta Q_T^{-1}W = W$$

- Seja $u(\eta) = \bar{u}(\eta) + \delta(\eta)$. Como:

$$\underbrace{\int_0^T M(T-\eta)Bu(\eta)d\eta}_{=W} = \underbrace{\int_0^T M(T-\eta)B\bar{u}(\eta)d\eta}_{=W} + \int_0^T M(T-\eta)B\delta(\eta)d\eta$$

Obtemos que:

$$\int_0^T M(T-\eta)B\delta(\eta)d\eta = 0 \tag{12.2}$$

Portanto:

$$\int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta = \int_0^T |\bar{u}(\eta)|^2 d\eta + \int_0^T |\delta(\eta)|^2 d\eta + 2 \int_0^T \bar{u}^T(\eta) \delta(\eta) d\eta$$

Como $\bar{u}(\eta) = B^T M^T (T - \eta) Q_T^{-1} W$, temos

$$\int_0^T \bar{u}^T(\eta) \delta(\eta) d\eta = W^T (Q_T^{-1})^T \underbrace{\int_0^T M(T - \eta) B \delta(\eta) d\eta}_{=0 \text{ eq. (12.2)}} = 0$$

Portanto vale:

$$\int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta - \int_0^T |\bar{u}(\eta)|^2 d\eta = \int_0^T |\delta(\eta)|^2 d\eta > 0$$

Logo, \bar{u} minimiza a integral $\int_0^T |u(\eta)|^2 d\eta$.

Capítulo 13

Controlabilidade: critério do posto de Kalman.

Teorema. As seguintes condições são equivalentes para o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$:

- (a) Um estado arbitrário $w \in \mathbb{R}^n$ é atingido a partir de $x(0) = 0$.
- (b) O sistema é controlável para algum $T > 0$.
- (c) O sistema é controlável para todo $T > 0$.
- (d) A matriz de controlabilidade

$$Q_T = \int_0^T M(T-\eta)BB^T M^T(T-\eta)d\eta, \quad M(t) = e^{At}$$

é não singular para algum $T > 0$.

- (e) A matriz Q_T é não singular para todo $T > 0$.
- (f) O posto da matriz:

$$[A|B] = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}_{n \times nr}$$

é n .

- 2) **Observação:** Nas aulas passadas provamos que:

$$(a) \Rightarrow (b), \quad (d) \Rightarrow (b) \quad \text{e} \quad (e) \Rightarrow (c)$$

- 3) Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^n$, a controlabilidade significa que existe u , $T > 0$ e

$$u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$$

tal que:

$$x(T) = M(T)x(0) + \int_0^T M(T-\eta)Bu(\eta)d\eta$$

com $x(T) = b$ e $x(0) = a$.

Isso é equivalente a dizer que, para todo $w \in \mathbb{R}^n$, existe $T > 0$ e u tal que:

$$w = \int_0^T M(T - \eta)Bu(\eta)d\eta$$

ou seja, w é atingido a partir de 0. Basta fazer $w = b - M(T)a$.

Logo, $(a) \Leftrightarrow (b)$.

4) Note que:

$$(c) \Rightarrow (b) \quad \text{e} \quad (e) \Rightarrow (d)$$

5) **Observação:** Seja

$$\mathcal{C}_T = \left\{ u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r : \int_0^T u(\eta)d\eta < \infty \right\}$$

e

$$\mathcal{L}_T : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathbb{R}^n$$

a função

$$w = \mathcal{L}_T(u) := \int_0^T M(T - \eta)Bu(\eta)d\eta$$

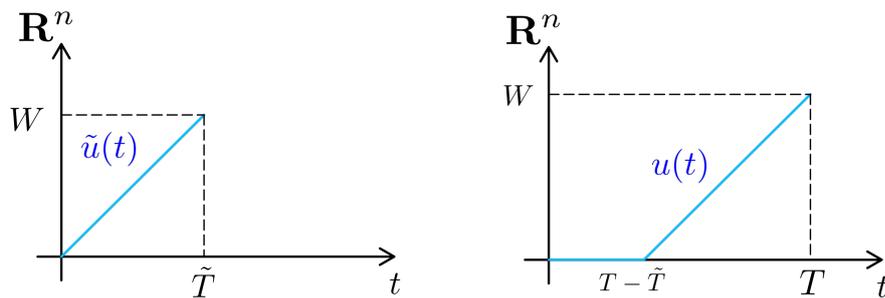
Por hipótese, $\mathcal{L}_{\tilde{T}}$ é sobrejetora para algum $\tilde{T} > 0$.

– Se $\mathcal{L}_{\tilde{T}}$ é sobrejetora, então \mathcal{L}_T é sobrejetora para todo $T \geq \tilde{T}$. De fato, dado $w \in \mathbb{R}^n$ qualquer, seja $\tilde{u} : [0, \tilde{T}] \rightarrow \mathbb{R}^r$ uma entrada tal que $\mathcal{L}_{\tilde{T}}(\tilde{u}) = w$.

– Se fizermos

$$u(\eta) = \begin{cases} 0 & 0 < \eta \leq T - \tilde{T}, \\ \tilde{u}(\eta - (T - \tilde{T})) & T - \tilde{T} < \eta < T \end{cases}$$

Gráficos:



Os gráficos mostram a função $\tilde{u}(\eta) \in \mathcal{C}_T$ e a função $u(\eta)$.

6) **Lema:** $(a) \Rightarrow (e)$, ou seja, se um estado arbitrário $w \in \mathbb{R}^n$ é atingido a partir de $x(0) = 0$ para algum $T > 0$, então Q_T é não singular para todo $T > 0$. (De fato, Q_T é positiva definida para todo $T > 0$). Em outras palavras:

Controlabilidade \Rightarrow **Det** $(Q_T) \neq 0$ para todo t

- 7) **Prova:** A matriz Q_T é simétrica. Se ela é singular para algum $T > 0$, então existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, tal que:

$$0 = v^T Q_T v = \int_0^T v^T M(T - \eta) B B^T M^T(T - \eta) v d\eta$$

Isso implica que:

$$\begin{aligned} &= \int_0^T (B^T M^T(T - \eta) v)^T (B^T M^T(T - \eta) v) d\eta \\ &= \int_0^T \|(B^T M^T(T - \eta) v)\|^2 d\eta \end{aligned}$$

Neste caso, $B^T M^T(t) v = 0$ para todo $t \in [0, T]$.

- 8) **Proposição:** $B^T M^T(t) v = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.¹

Prova: Cada linha da função $B^T M^T(t) v \in \mathbb{R}^r$ é uma combinação linear de funções da forma e^{at} , $e^{at} \cos(bt)$, $e^{at} \sin(bt)$, $t^k e^{at} \cos(bt)$ e $t^k e^{at} \sin(bt)$. Isso decorre de $M(t) = e^{At}$ e do fato, visto em aulas passadas, que as entradas de e^{At} são da forma acima (os termos em t^k só aparecem se a matriz A possui raízes múltiplas e blocos de Jordan não triviais).

Se $B^T M^T(t) v = 0$ para $t \in (0, T)$, com $T > 0$, então todas as derivadas de cada linha de $B^T M^T(t) v$ são nulas para qualquer $t \in (0, T)$. Logo a expansão em série de Taylor destas linhas em qualquer ponto do intervalo é a função nula. Mas as expansões em série de Taylor das funções acima convergem para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $B^T M^T(t) v = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

- 9) Suponha que Q_T seja singular para $T > 0$ e seja $v \in \mathbb{R}^n$ como em (7).

Como o sistema é controlável no tempo \tilde{T} , existe u , não necessariamente a que minimiza $\int |u|^2 d\eta$, tal que:

$$v = \int_0^{\tilde{T}} M(\tilde{T} - \eta) B u(\eta) d\eta$$

Logo:

$$\begin{aligned} v^T \cdot v &= \int_0^{\tilde{T}} v^T M(\tilde{T} - \eta) B u(\eta) d\eta = \\ &= \int_0^{\tilde{T}} (B^T M^T(\tilde{T} - \eta) v)^T u(\eta) d\eta \end{aligned}$$

Mas de (7) $B^T M^T(t) v = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então:

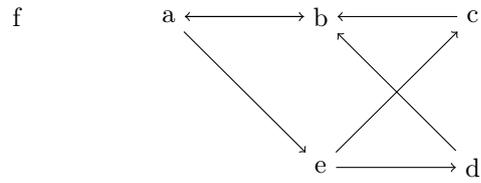
$$v^T \cdot v = |v|^2 = \int_0^{\tilde{T}} (B^T M^T(\tilde{T} - \eta) v)^T u(\eta) d\eta = 0$$

Isso implica que $v = 0$, o que contradiz que Q_T é singular em T .

Logo, (7) não é verdadeiro, e temos que Q_T é positiva definida para todo $T > 0$ e, portanto, não singular. **C.q.d.**

¹Consequência da analiticidade da função $t \mapsto B^T M^T(t) v$

10) O seguinte diagrama mostra as implicações já provadas no teorema (1):



Como chega pelo menos uma flecha e sai pelo menos uma flecha de cada uma das afirmações a , b , c , d , e , já está provada a equivalência das mesmas. Resta provar $f \Leftrightarrow a$.

11) Teorema (Cayley-Hamilton)

Seja $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$ o polinômio característico da matriz A .

Então:

$$p(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_nI = 0$$

12) Ideia da prova.

(i) Se A é diagonal, então $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são as raízes de $p(\lambda)$.

Como:

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

temos $p(A) = 0$.

(ii) Se A é diagonalizável com $M^{-1}AM = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, então:

$$p(A) = 0 \Leftrightarrow M^{-1}p(A)M = 0 \Leftrightarrow$$

$$M^{-1}A^nM + a_1M^{-1}A^{n-1}M + \dots + a_nI = 0$$

$$M^{-1}A^nM = D^n, \quad M^{-1}A^{n-1}M = D^{n-1}, \quad \dots$$

$$\Leftrightarrow D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_nI = 0$$

por (i).

(ii i) Se a matriz \tilde{A} não é diagonalizável, é possível escrevê-la na forma de Jordan. Considere um bloco de Jordan da forma:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = A$$

onde

$$bI_{n \times n} \quad \text{e} \quad N_{n \times n}$$

Temos $p(\lambda) = (\lambda - b)^n$ e:

$$p(A) = (A - bI)^n = (bI + N - bI)^n = N^n = 0$$

Usando este fato e a fatoração de $p(\lambda)$, conclui-se a prova do teorema.

13) **Lema:** Existem constantes c_0, c_1, \dots, c_{n-1} tais que:

$$e^A = c_0I + c_1A + \dots + c_{n-1}A^{n-1}$$

14) **Ideia da prova:** Suponha que A possui autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (As fórmulas de interpolação reais que estudamos também podem ser aplicadas no caso complexo).

Seja

$$q(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \dots + c_{n-1}\lambda^{n-1}$$

o polinômio interpolador da tabela:

| | | | | |
|-------------|-----------------|-----------------|---------|-----------------|
| λ | λ_1 | λ_2 | \dots | λ_n |
| e^λ | e^{λ_1} | e^{λ_2} | \dots | e^{λ_n} |

O erro de interpolação polinomial é:

$$e^\lambda - q(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)}_{=p(\lambda)} \cdot \frac{e^\xi}{n!} = E(\lambda)$$

onde ξ é um número desconhecido e $p(\lambda)$ é o polinômio característico.

Com isso, temos²:

$$e^\lambda = q(\lambda) + p(\lambda) \frac{e^\xi}{n!}$$

e, portanto:

$$e^A = q(A) + p(A) \frac{e^\xi}{n!} = q(A) = c_0I + c_1A + \dots + c_{n-1}A^{n-1},$$

pelo Teorema de Cayley-Hamilton³.

15) **Teorema** (a) \Leftrightarrow (f) no teorema 1, ou seja:

$$\left\{ w \text{ é atingido a partir de } x(0) = 0 \right\} \Leftrightarrow [A \mid B] = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

tem posto n .

²Uma fórmula análoga a essa vale para qualquer função $f(\lambda)$ interpolada nos pontos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

³Seja $f(\lambda)$ uma função cuja série de Taylor é convergente em uma região que contém $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Então o mesmo raciocínio acima implica que $f(A)$ pode ser escrita como um polinômio de orden $n - 1$ em A

16) **Prova:** Do Lema (13), existem $c_0(t), c_1(t), \dots, c_{n-1}(t)$ tal que:

$$M(t) = e^{At} = c_0(t)I + c_1(t)A + c_2(t)A^2 + \dots + c_{n-1}(t)A^{n-1}$$

Logo, usando que as funções $c_0(t), \dots, c_{n-1}(t)$ são contínuas:

$$\begin{aligned} & \int_0^T M(T-\eta)Bu(\eta)d\eta \\ &= \int_0^T [c_0(T-\eta)I + \dots + c_{n-1}(T-\eta)A^{n-1}] Bu(\eta)d\eta \\ &= B \int_0^T c_0(T-\eta)u(\eta)d\eta + BA \int_0^T c_1(T-\eta)u(\eta)d\eta \\ &+ \dots + BA^{n-1} \int_0^T c_{n-1}(T-\eta)u(\eta)d\eta \\ &= \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde:

$$V_i = \int_0^T c_i(T-\eta)u(\eta)d\eta$$

Se o posto de $[A \mid B] < n$, então existe $w \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$w \neq [A \mid B] \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{pmatrix}$$

para qualquer $(V_0, V_1, \dots, V_{n-1})$ e, logo, para qualquer $u : \mathcal{C}_T \rightarrow \mathbb{R}^r$.

Portanto w não é atingível e o sistema não é controlável.

Com isso provamos que não (f) \Rightarrow não (a), ou seja, (a) \Rightarrow (f).

– Suponha agora que, para um dado $T > 0$, não vale (a), ou seja, existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$0 = v^T \int_0^T M(T-\eta)Bu(\eta)d\eta = \int_0^T (B^T M^T(T-\eta)v)^T u(\eta)d\eta$$

para qualquer $u(\eta)$, implicando que $B^T M^T(t)v = 0$ para todo $t \in [0, T]$.

Mas $M(t) = e^{At} = I + A^T t + \frac{(A^T)^2 t^2}{2!} + \dots$

e vale:

$$F(t) = B^T \left(I + A^T t + \frac{(A^T)^2 t^2}{2!} + \dots \right) v = 0$$

Para $t = 0$, temos:

$$F(0) = B^T v = 0$$

Derivando em $t = 0$:

$$\left. \frac{dF(t)}{dt} \right|_{t=0} = B^T A^T v = 0$$

Derivando até a ordem $n - 1$:

$$\left. \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} F(t) \right|_{t=0} = B^T (A^T)^{n-1} v = 0$$

Essas identidades implicam que, para qualquer $V_0 \in \mathbb{R}^r$, $V_1 \in \mathbb{R}^r$, \dots , $V_{n-1} \in \mathbb{R}^r$:

$$(B^T v)^T V_0 = v^T B V_0 = 0$$

$$(B^T A^T v)^T V_1 = v^T A B V_1 = 0$$

$$(B^T (A^T)^{n-1} v)^T V_{n-1} = v^T A^{n-1} B V_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow v^T \cdot [A \mid B] \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

para qualquer vetor $\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{pmatrix}$.

Logo, o posto de $[A \mid B] < n$.

Com isso, não (a) \Rightarrow não (f), ou seja, (f) \Rightarrow (a).

C.q.d.

Capítulo 14

Forma Normal dos Sistemas Controláveis.

14.1 Mudança de variáveis

Considere o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r \\ y &= Cx \quad y \in \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

e as mudanças de variáveis:

$$\tilde{x} = Px, \quad \tilde{u} = Su, \quad \tilde{y} = Ry$$

onde $P_{n \times n}$, $S_{r \times r}$, $R_{m \times m}$ são invertíveis.

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= P\dot{x} = P(Ax + Bu) = PAP^{-1}\tilde{x} + PBS^{-1}\tilde{u} \\ \tilde{y} &= RCx = RCP^{-1}\tilde{x}\end{aligned}$$

Ou:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x}\end{aligned}$$

com:

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \quad \tilde{B} = PBS^{-1}, \quad \tilde{C} = RCP^{-1}$$

14.2 Sistemas Equivalentes

Dois sistemas

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \\ \tilde{y} = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases}$$

São ditos equivalentes se existe uma mudança de variáveis como no parágrafo 14.1 que leva um no outro.

14.3 Teorema (forma de Kalman dos sistemas não controláveis).

Suponha que o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ seja não controlável com posto $\text{rank}[A|B] = \ell < n$.

Então existe um sistema equivalente tal que:

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \quad PB = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde $A_{11} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{\ell \times (n-\ell)}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-\ell) \times (n-\ell)}$.

Mais ainda, $\dot{\tilde{x}} = A_{11}\tilde{x} + B_1\tilde{u}$, com $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\ell}$, $\tilde{u} \in \mathbb{R}^r$, é controlável.

Prova

Ver livro de Jerzy Zabczyk, *Mathematical Control Theory*, pág. 23.

14.4 Forma canônica para sistemas controláveis com uma entrada, $r = 1$

Considere um sistema da forma

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = u$$

onde

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$$

Em forma matricial temos, fazendo $y = z_1$:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_B u \quad (14.1)$$

14.5 Controlabilidade do sistema (14.1)

As matrizes A e B em (14.1) são tais que

$$[A|B] = [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B] = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 1 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}}_{(B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B)} \quad (14.2)$$

tem determinante igual a 1, portanto posto n .

Logo, o sistema (14.1) é controlável.

14.6 Lema: Forma canônica preliminar para sistemas controláveis.

Seja $\dot{x} = Ax + Bu$, onde $u \in \mathbb{R}$, um sistema controlável qualquer. Então $\dot{x} = Ax + Bu$ é equivalente a

$$\dot{w} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} w + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} u \quad (14.3)$$

onde a_1, \dots, a_n são os coeficientes do polinômio característico de A :

$$p(A) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

14.7 Prova

Seja A a matriz em $\dot{x} = Ax + Bu$.

Renomeamos as colunas de $[A|B]$ como

$$[e_n | e_{n-1} | \dots | e_1] := [B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B]$$

Como o sistema é controlável, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ formam uma base. O vetor x pode ser escrito na nova base como

$$x = w_1 e_1 + w_2 e_2 + \cdots + w_n e_n = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} w = Pw$$

onde

$$P := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix} = [A^{n-1}B | \cdots | A^2B | AB | B] \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (14.4)$$

Com isso:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{w}_1 e_1 + \dot{w}_2 e_2 + \cdots + \dot{w}_n e_n = Ax + Bu \\ &= A(w_1 e_1 + \cdots + w_n e_n) + e_n u \\ &= w_1 A e_1 + w_2 A e_2 + \cdots + w_n A e_n + e_n u \\ &= w_1 A^n B + w_2 A^{n-1} B + \cdots + w_n AB + e_n u \\ &= w_1 A^n B + w_2 e_1 + \cdots + w_n e_{n-1} + e_n u \end{aligned} \quad (14.5)$$

14.8 Teorema de Cayley-Hamilton

Do teorema de Cayley-Hamilton, temos que

$$\begin{aligned} p(A) &= A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \cdots + a_n I = 0 \\ \Rightarrow A^n B &= -a_1 A^{n-1} B - a_2 A^{n-2} B - \cdots - a_n B \\ \Rightarrow A^n B &= -a_1 e_1 - a_2 e_2 - \cdots - a_n e_n \end{aligned}$$

14.9 Voltando à equação (14.5):

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 e_1 + \dot{w}_2 e_2 + \dot{w}_3 e_3 + \cdots + \dot{w}_n e_n \\ = w_2 e_1 + w_3 e_2 + \cdots + w_n e_{n-1} - a_1 w_1 e_1 - a_2 w_1 e_2 - \cdots - a_n w_1 e_n + e_n u \end{aligned}$$

Estas equações podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_1 &= w_2 - a_1 w_1 & (a) \\
 \dot{w}_2 &= w_3 - a_2 w_1 & (b) \\
 \dot{w}_3 &= w_4 - a_3 w_1 & (c) \\
 &\vdots \\
 \dot{w}_{n-1} &= w_n - a_{n-1} w_1 \\
 \dot{w}_n &= -a_n w_1 + u
 \end{aligned} \tag{14.6}$$

Em forma matricial essas equações ficam

$$\dot{w} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

que é o sistema (14.3) no enunciado do Lema.

14.10 Corolário: O sistema no teorema (8) é equivalente à equação de ordem n no parágrafo (5)

Seja $w_1 = y$, então da equação (14.6)

$$\begin{aligned}
 w_1^{(n)} &= y^{(n)} \stackrel{(a)}{=} w_2^{(n-1)} - a_1 w_1^{(n-1)} \stackrel{(b)}{=} -a_1 y^{(n-1)} + w_3^{(n-2)} - a_2 w_1^{(n-2)} \\
 &\stackrel{(c)}{=} -a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} + w_4^{(n-3)} - a_3 w_1^{(n-3)} = \dots \\
 &= -a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} \dots - a_{n-1} \dot{y} + \dot{w}_n \\
 &= -a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} \dots - a_{n-1} \dot{y} - a_n y + u
 \end{aligned}$$

Logo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = u$$

que é a equação em (5). A equação (5) pode ser escrita na forma matricial (6).

Antes de apresentarmos a transformação $w \rightarrow z$ que leva o sistema (14.3) no sistema (14.1), apresentaremos alguns resultados preliminares sobre matrizes unitriangulares.

14.11 Matrizes Unitriangulares

Matrizes Unitriangulares inferiores são da forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Note: as matrizes unitriangulares tem determinante 1.

- O produto de duas matrizes A da forma acima é da mesma forma. As matrizes formam um grupo.

Seja:

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (14.7)$$

Então sua inversa é da forma

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (14.8)$$

De fato

$$Q^{-1}Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

onde

$$\alpha_1 + a_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -a_1$$

$$\alpha_2 + \alpha_1 a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_1 a_1 - a_2$$

$$\alpha_3 + \alpha_2 a_1 + \alpha_1 a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -\alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1 - a_3$$

etc.

É possível inverter a matriz Q facilmente usando uma recursão.

14.12 Teorema: Forma canônica dos sistemas controláveis.

Seja $\dot{x} = Ax + Bu$ um sistema controlável qualquer, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}$.

A mudança de variáveis

$$x = PQz$$

onde P e Q são as matrizes dadas na equações (15.1) e (15.2), respectivamente, leva o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ ao seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & \cdots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (14.9)$$

(ou seja, ao sistema (14.1)), onde a_1, \dots, a_n são os coeficientes do polinômio característico de A :

$$p(A) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

14.13 Prova.

No Lema 14.6 mostramos que a transformação $x = Pw$ leva o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ no sistema (14.3), ou seja $\dot{w} = \tilde{A}w + \tilde{B}u$.

Portanto basta mostrar que fazendo $w = Qz$ obtemos

$$\dot{z} = Q^{-1} \tilde{A} Q z + Q^{-1} \tilde{B} u$$

e este sistema é igual ao sistema (15.3)

Usando a expressão de \tilde{B} na equação (14.3) temos

$$Q^{-1} \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que possui a forma desejada.

Resta ainda provar que

$$Q^{-1}\tilde{A}Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Vamos apenas verificar a identidade para uma matriz 3x3.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}$$

com

$$\alpha_1 = -a_1, \quad \alpha_2 = -a_2 - \alpha_1 a_1 = -a_2 + a_1^2$$

Usando que

$$\tilde{A}Q = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$Q^{-1}\tilde{A}Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_1 & 1 & 0 \\ (-a_2 + a_1^2) & -a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

como desejado.

Capítulo 15

Estabilizabilidade

15.1 Definição.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}$$

é estabilizável se for possível encontrar uma retroalimentação ("feedback")

$$u = -Kx \quad \text{tal que } \dot{x} = (A - BK)x \text{ é estável.}$$

Referência: (Ogata 5th ed cap 10-2) "pole placement"

(Zabcyk sec 2.5)

15.2 Definição.

O sistema é completamente estabilizável se dados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ é possível escolher K tal que $A - BK$ possua $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ como raízes do seu polinômio característico.

Teorema: O sistema é estabilizável \iff O sistema é controlável.

Recordação:

- O sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é controlável \iff dado $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n, \exists u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$x(0) = a \quad \text{e} \quad x(T) = b$$

- O sistema é controlável $\iff [A|B] = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ tem posto n .
- Teorema já provado: $Q_T = \int_0^T M(t)BB^T M^T(t) dt$ é invertível $\iff [A|B]$ é de posto n .

15.3 Prova: Controlável \implies Completamente Estabilizável.

Consideraremos apenas o caso em que $u \in \mathbb{R}$ (caso considerado no livro do Ogata). Portanto, $B_{n \times 1}$.

Na Aula 14, teorema 12, provamos que se o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ é controlável, então as matrizes

$$P := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} = [A^{n-1}B | \dots | A^2B | AB | B]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & * & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (15.1)$$

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (15.2)$$

são invertíveis e definem uma transformação de variáveis

$$x = PQz$$

que leva o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ ao seguinte sistema (forma canônica dos sistemas controláveis):

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (15.3)$$

onde a_1, \dots, a_n são os coeficientes do polinômio característico de A :

$$p(A) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

15.4 Matriz de ganho

Seja \tilde{K} a matriz de ganho nas variáveis z a ser usada no controle por retroalimentação (“feedback”) de estados

$$u = -\tilde{K}z$$

Note: $u_{1 \times 1} = -\tilde{K}_{1 \times n} z_{n \times 1}$.

Escrevemos

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \dots & \delta_1 \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

Usando que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \dots & \delta_1 \end{bmatrix}}_{=\tilde{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_n & \delta_{n-1} & \dots & \dots & \delta_1 \end{bmatrix},$$

escrevemos o sistema (15.3) com $u = -\tilde{K}z$ como

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \underbrace{-a_n - \delta_n \quad -a_{n-1} - \delta_{n-1} \quad \dots \quad \dots \quad -a_1 - \delta_1}_{\tilde{A}} \end{bmatrix} z \quad (15.4)$$

O determinante

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - \tilde{A}) &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \dots & \dots & \lambda + a_1 + \delta_1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^n + (a_1 + \delta_1)\lambda^{n-1} + \dots + \lambda(a_{n-1} + \delta_{n-1}) + a_n + \delta_n \end{aligned}$$

pode ser obtido desenvolvendo por Laplace usando a última linha.

15.5 Nota sobre o Sistema (15.4)

O sistema (15.4) pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dots, \quad \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n &= -\left\{ (a_n + \delta_n)z_1 + (a_{n-1} + \delta_{n-1})z_2 + \dots + (a_1 + \delta_1)z_n \right\} \end{aligned}$$

Esse sistema é equivalente a:

$$z_1^{(n)} + (a_1 + \delta_1)z_1^{(n-1)} + (a_{n-1} + \delta_{n-1})z_1^{(n-2)} + \dots + (a_n + \delta_n)z_1 = 0$$

Fazendo $z_1 = e^{\lambda t}$, temos que

$$\lambda^n + (a_1 + \delta_1)\lambda^{n-1} + \dots + (a_n + \delta_n) = 0$$

o que é a equação característica correspondente.

15.6 Polinômio Característico Desejado e determinação de \tilde{K} .

Dado os autovalores desejados $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, construímos o polinômio

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

Expandindo, temos:

$$p(\lambda) = \lambda^n + \tilde{a}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \tilde{a}_n$$

Para encontrar os valores de δ que definem a matriz de ganho \tilde{K} , fazemos:

$$\lambda^n + (a_1 + \delta_1)\lambda^{n-1} + \dots + (a_n + \delta_n) = \lambda^n + \tilde{a}_1 \lambda^{n-1} + \dots + \tilde{a}_n$$

Isso implica que:

$$\delta_1 = \tilde{a}_1 - a_1, \quad \delta_2 = \tilde{a}_2 - a_2, \dots, \quad \delta_n = \tilde{a}_n - a_n$$

Concluimos, então, que controlabilidade implica completamente estabilizável. Mais ainda, temos uma maneira explícita de determinar a matriz de ganho para qualquer escolha de autovalores.

15.7 Matriz de ganho nas variáveis originais

Usando que $x = Pw$ e $w = Qz$ temos

$$(\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)z = (\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)Q^{-1}w = (\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)Q^{-1}P^{-1}x$$

Portanto, nas variáveis originais x :

$$K = (\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)Q^{-1}P^{-1}$$

15.8 Observações finais.

A prova de

$$\text{Completamente Estabilizável} \Rightarrow \text{Controlável}$$

é feita provando

$$\text{Não Controlável} \Rightarrow \text{Não Completamente Estabilizável}$$

Ver livro do Ogata, parágrafo 10-2.

15.9 Resultados Suplementares para Sistemas não Controláveis

Na aula 14, parágrafo 3, nós apresentamos o seguinte resultado.

Suponha que o sistema $\dot{x} = Ax + B\tilde{u}$ seja não controlável com $\text{posto}[A|B] = \ell < n$. Então existe um sistema equivalente tal que:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (15.5)$$

onde $x_1 \in \mathbb{R}^l$ e $x_2 \in \mathbb{R}^{n-l}$, $A_{11} \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{l \times (n-l)}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-l) \times (n-l)}$.

Mais ainda, $\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + B_1u$ é controlável.

15.10 Escolha da Matriz de Ganho K

Seja $r = 1$, ou seja $u \in \mathbb{R}$, e

$$u = -[K_1, 0_{1 \times (n-l)}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

onde K_1 é uma matriz $(1 \times l)$.

Substituindo este u no sistema (15.5) obtemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1K_1 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (15.6)$$

Vamos calcular o polinômio característico $p(\lambda)$ da matriz na equação (15.6):

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda I - A_{11} + B_1K_1 & -A_{12} \\ 0 & \lambda I - A_{22} \end{vmatrix} \\ &= \det(\lambda I - A_{22}) \cdot \det(\lambda I - (A_{11} - B_1K_1)) \end{aligned}$$

onde $\det(\lambda I - A_{22})$ é o polinômio $p_2(\lambda)$ correspondente à parte não controlável do sistema. A prova pode ser feita usando eliminação de Gauss.

Logo, é possível estabilizar a parte controlável do sistema, mas a estabilidade dependerá das raízes de p_2 terem parte real negativa.

Capítulo 16

Observabilidade.

1) Definição de Observabilidade

Considere o sistema de controle:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad y = h(x, u), \quad y \in \mathbb{R}^m \text{ (saída)}$$

O sistema é **observável** se, conhecendo a entrada e a saída

$$u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad \forall T > 0,$$

$$y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \forall T > 0,$$

é possível determinar o estado inicial $x(0)$.

Ver Ogata (Seção 9-7).

Para sistemas lineares:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = f(x, u) \\ y = Cx + Du = h(x, u) \end{cases}$$

Observabilidade para sistemas lineares

No caso de sistemas lineares a definição de observabilidade é equivalente à seguinte:

Definição

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

é observável se conhecendo $y(t), t \in [0, T]$ é possível determinar $x(0)$.

Observação:

Eliminam-se quantidades Bu e Du pois ambas podem ser incorporadas ao y . De fato, sejam \tilde{x} e \tilde{y} novas variáveis dadas por

$$\begin{aligned}x &= \tilde{x} + \int_0^t M(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\y &= \tilde{y} + C \left(\int_0^t M(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \right) + Du\end{aligned}$$

Nas novas variáveis o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = f(x, u) \\ y = Cx + Du = h(x, u) \end{cases}$$

fica

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} \end{cases}$$

Observabilidade e Sistemas Sobre-determinados

A solução de $\dot{x} = Ax$ é

$$M(t)x(0) = e^{At}x(0)$$

Logo se $y(t)$ é conhecido, então

$$y(t) = Cx(t) = CM(t)x(0) \quad 0 \leq t \leq T$$

consiste em um sistema sobre-determinado: as componentes de $x(0)$ constituem n incógnitas e, para qualquer $T > 0$, há infinitas equações, uma para cada valor de t .

O método dos mínimos quadrados em dimensão finita diz que se a solução de um sistema sobredeterminado existe

$$\mathcal{A}z = y \quad \text{onde } z \in \mathbb{R}^q, y \in \mathbb{R}^p, q < p$$

então ela é dada pela solução de

$$\mathcal{A}^T \mathcal{A}z = \mathcal{A}^T y$$

Se a solução não existe, então a solução do sistema $\mathcal{A}^T \mathcal{A}z = \mathcal{A}^T y$ dá a “melhor aproximação” no sentido do método dos mínimos quadrados.

No caso do contínuo de equações $y(t) = Cx(t) = CM(t)x(0) \quad 0 \leq t \leq T$ a mesma ideia usada em dimensão finita dá

$$\left(\int_0^T M(t)^T C^T C M(t) dt \right) x(0) = \int_0^T M(t)^T C^T y(t) dt \quad (16.1)$$

Definição de Matriz de Observabilidade R_T

$$R_T := \int_0^T M(t)^T C^T C M(t) dt \quad (16.2)$$

Definimos também

$$Y_T := \int_0^T M^T(t) C^T y(t) dt$$

Observação: Se procurarmos o $x(0)$ que minimiza a função

$$\Phi(x) = \int_0^T \langle y(t) - CM(t)x, y(t) - CM(t)x \rangle dt \quad x \in \mathbb{R}^n$$

chegaremos exatamente à equação (16.1), ou seja,

$$R_T x(0) = \int_0^T M(t)^T C^T y(t) dt = Y_T$$

Teorema:

O sistema

$$\dot{x} = Ax, \quad y = Cx$$

é observável se, e só se, R_T é não singular para algum $T > 0$.

Valem as equivalências:

O sistema é observável $\Leftrightarrow R_T$ é não singular $\forall T > 0$

$$\Leftrightarrow \text{posto}[A^T | C^T] := \begin{bmatrix} C^T & (A^T)C^T & \dots & (A^{n-1})C^T \end{bmatrix} = n$$

onde $[A^T | C^T]$ é uma matriz $n \times nm$.

Prova (parcial):

Primeiramente note que, seja o sistema observável ou não, $y(t) = CM(t)x_0$ implica que

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle y(t), y(t) \rangle dt &= \int_0^T \langle CM(t)x_0, CM(t)x_0 \rangle dt \\ &= \left\langle x_0, \underbrace{\int_0^T M^T(t) C^T C M(t) dt}_{=R_T} x_0 \right\rangle \end{aligned} \quad (16.3)$$

A equação $y(t) = CM(t)x_0$ para $t \in [0, T]$ é equivalente à seguinte integral I ser nula:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \langle y(t) - CM(t)x_0, y(t) - CM(t)x_0 \rangle dt \\ &= \underbrace{\int_0^T \langle y(t), y(t) \rangle dt}_{= \langle x_0, R_T x_0 \rangle} - 2 \underbrace{\int_0^T \langle CM(t)x_0, y(t) \rangle dt}_{= A_1} \\ &\quad + \underbrace{\int_0^T \langle CM(t)x_0, CM(t)x_0 \rangle dt}_{= A_2} \end{aligned}$$

é nula.

Note

$$A_1 = \int_0^T \langle x_0, M^T(t)C^T y(t) \rangle dt = \left\langle x_0, \int_0^T M^T(t)C^T y(t) dt \right\rangle = \langle x_0, Y_T \rangle$$

e

$$A_2 = \int_0^T \langle x_0, M^T(t)C^T CM(t)x_0 \rangle dt = \langle x_0, R_T x_0 \rangle$$

Logo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \langle y(t) - CM(t)x_0, y(t) - CM(t)x_0 \rangle dt \\ &= 2\langle x_0, R_T x_0 \rangle - 2\langle x_0, Y_T \rangle \end{aligned}$$

Suponha, agora, que R_T é invertível e seja $x_0 = R_T^{-1}Y_T$. Substituindo na expressão acima obtemos $I = 0$, ou seja o sistema é observável.

Para a prova de que o posto

$$\begin{bmatrix} C^T & (A^T)C^T & \dots & (A^{n-1})^T C^T \end{bmatrix} = n$$

implica observabilidade, ver Ogata Seção 9-7.

Observação

Note que as matrizes

$$R_T = \int_0^T M^T(t)C^T CM(t) dt = \text{matriz de observabilidade}$$

e

$$Q_T = \int_0^T M(t)BB^T M^T(t) dt = \text{matriz de controlabilidade}$$

coincidem se na matriz de observabilidade fizermos as substituições

$$M = e^{At} \rightarrow M^T = e^{A^T t} \quad C \rightarrow B^T$$

Provamos na aula sobre controlabilidade que

$$Q_T \text{ é não singular para } \forall T > 0 \Leftrightarrow \text{posto } [A|B] = n$$

Logo, o mesmo argumento implica

$$R_T \text{ é não singular para } \forall T > 0 \Leftrightarrow \text{posto } [A^T|C^T] = n$$

onde

$$[A^T|C^T] := \begin{bmatrix} C^T & (A^T)C^T & \dots & (A^{n-1})^T C^T \end{bmatrix} \text{ (dimensão } n \times nm).$$

Capítulo 17

Observadores.

17.1 Exemplo de Sistema Não Estabilizável por Retroalimentação de Saída (Output Feedback)

Exemplo: O vetor de estado é:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix};$$

a equação diferencial do sistema é:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = u;$$

e a saída é $y = x_1$.

Se usarmos retroalimentação de saída, $u = -Ky$, a equação fica:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + (a_n + K)y = 0$$

O polinômio característico é obtido com a substituição $y = e^{\lambda t}$:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + (a_n + K) = 0 \quad (17.1)$$

Proposição Suponha que todas as raízes de um polinômio real mônico, $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots$, possuem parte real estritamente negativa. Então todos os coeficientes do polinômio são positivos.

Prova Basta escrever o polinômio na forma fatorada: $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \dots$ com fatores repetidos no caso de raízes com multiplicidade maior que um. Se todos os autovalores são reais e negativos, então $p(\lambda)$ é um produto da forma $p(\lambda) = (\lambda + |\lambda_1|)(\lambda + |\lambda_2|)(\lambda + |\lambda_3|) \dots$ e todos os coeficientes de $p(\lambda)$ são positivos.

Se $\lambda_1 = -|b| + ic$ é complexo, então $\lambda_2 = -|b| - ic$ e

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda + |b|)^2 + c^2 = \lambda^2 + 2|b|\lambda + b^2 + c^2$$

possui todos os coeficientes positivos **cq.d.**

Pela proposição se algum coeficiente do polinômio característico é estritamente negativo, então o sistema é instável.

Suponha que um dos coeficientes a_1, a_2, \dots, a_{n-1} de $p(\lambda)$ na equação (17.1) seja negativo. Não é possível mudar esse coeficiente, uma vez que K só altera a_n . Logo não é possível estabilizar o sistema com feedback de saída.

17.2 Construção de Observadores

Considere o sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx \quad (17.2)$$

onde:

- $x \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de estado
- $u \in \mathbb{R}^r$ são as entradas (variáveis de controle)
- $y \in \mathbb{R}^m$ são as variáveis de saída

Para construir o observador, fazemos uma réplica do sistema original e adicionamos um acoplamento entre a réplica e o sistema original:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \quad \hat{y} = C\hat{x} \quad (17.3)$$

onde:

- $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ é o estimador de $x \in \mathbb{R}^n$
- L é a matriz de ganho do observador

Subtraindo a equação (17.3) da (17.2):

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + L(Cx - C\hat{x})) = A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x})$$

Definindo o vetor erro $e := x - \hat{x}$, reescrevemos a equação acima como

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

Queremos determinar L tal que a matriz $A - LC$ seja estável (todas as raízes de seu polinômio característico têm parte real negativa).

17.3 Definição: Detectabilidade

O sistema $\dot{x} = Ax, y = Cx$ é **detectável** se existe uma matriz L tal que $\dot{e} = (A - LC)e$ é estável.

Teorema: Se o sistema

$$\dot{x} = Ax \quad y = Cx \quad (17.4)$$

é observável, então ele é detectável.¹

17.4 Prova

Proposição:

$$\dot{z} = (A - LC)z \text{ é estável} \Leftrightarrow \dot{z} = (A^\top - C^\top L^\top)z \text{ é estável.}$$

Prova: Note que

$$\det(\lambda I - [A - LC]) = \det(\lambda I - [A - LC])^\top = \det(\lambda I - [A^\top - C^\top L^\top]).$$

Logo, as raízes dos polinômios característicos dos sistemas $\dot{z} = (A - LC)z$ e $\dot{z} = (A^\top - C^\top L^\top)z$ são as mesmas. **qqd.**

Na aula 15 vimos que: se $[A|B]$ tem posto n , então dados $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ é possível encontrar K tal que os auto-valores de $A - BK$ são $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Como

$$A - BK \rightarrow A^\top - C^\top L^\top \quad \text{sob a identificação} \quad A \rightarrow A^\top \quad B \rightarrow C^\top \quad K \rightarrow L^\top$$

temos que: se

$$[A^\top | C^\top] = \begin{bmatrix} C^\top & (A^\top)C^\top & \dots & (A^{n-1}C)^\top \end{bmatrix}$$

tem posto n , o que significa o sistema (17.4) ser observável, então é possível escolher L^\top de modo que $A^\top - C^\top L^\top$ possua autovalores prescritos. De acordo com a Proposição a matriz $A - LC$ terá os mesmos autovalores. Isso conclui a prova do teorema.

17.5 Corolário

Se o sistema (17.4) é observável, é possível escolher autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ e depois encontrar uma matriz de ganho do observador L (se $m = 1$, L é obtida pelo algoritmo da aula 15) tal que os auto-valores de $\frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = (A - LC)(x - \hat{x})$ são $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Portanto, escolhendo auto-valores com parte real negativa garantimos que a diferença $e = x - \hat{x}$ tenda a zero quando t cresce.

O Efeito do Observador na Controlabilidade por Realimentação de Estado (Feedback)

Vimos no parágrafo 17.1 que um sistema da forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

não pode ser controlado com retroalimentação de saída $u = -Ky$.

¹O sistema (17.4) é observável se conhecida a saída $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $T > 0$, é possível determinar $x(0)$.

No entanto, com o uso de um observador podemos fazer uma retroalimentação usando o estado estimado \hat{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu & y &= Cx & u &= -K\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \end{aligned} \quad (17.5)$$

onde o ganho do controle K e o ganho do observador L precisam ser escolhidos.

17.6 Análise da Estabilidade do sistema (17.5)

Usando que $e = x - \hat{x}$, a primeira equação do sistema (17.5) pode ser escrita como:

$$\dot{x} = Ax - BK\hat{x} = Ax - BKx + BKx - BK\hat{x} = (A - BK)x + BKe$$

Subtraindo a segunda equação do sistema (17.5) da primeira obtemos a equação $\dot{e} = (A - LC)e$.

Com isso o sistema (17.5) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A - BK)x + BKe \\ \dot{e} &= (A - LC)e \end{aligned} \quad (17.6)$$

ou na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

A equação característica do sistema (17.6) é dada por

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda I - (A - BK) & BK \\ 0 & \lambda I - (A - LC) \end{pmatrix} \\ = \det(\lambda I - (A - BK)) \cdot \det(\lambda I - (A - LC)) = 0 \end{aligned}$$

o que nos mostra que as raízes de $\det(\lambda I - (A - BK)) = 0$ e $\det(\lambda I - (A - LC)) = 0$ são independentes.

17.7 Conclusão.

O controle por retroalimentação de estados estimados por um observador requer que o sistema seja controlável ($\text{posto}[A|B] = n$) e observável ($\text{posto}[A^\top|C^\top] = n$). O projeto do sistema de controle possui 2 etapas:

- Determinar a matriz de ganho de controle K como se estivéssemos fazendo retroalimentação de estado ("state feedback").
- Determinar a matriz de ganho do observador L .

Capítulo 18

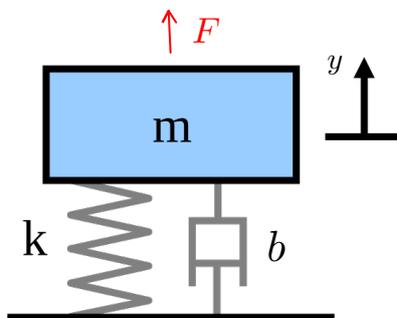
Considerações Físicas Relativas à Escolha de Parâmetros.

1

18.1 Introdução

Para entender as restrições físicas impostas na escolha de autovalores (matriz de ganho), consideremos o sistema de 2ª ordem:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F \quad (18.1)$$



18.2 Autovalores

Os autovalores da equação (1) são determinados por:

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

ou

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

¹Estas notas foram parcialmente copiadas de diversas fontes encontradas na internet. Elas são de uso exclusivo do curso: MAP2321 Técnicas em Teoria de Controle.

onde:

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad \text{é o quadrado da frequência natural}$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = \frac{b}{m \cdot 2\omega_n} \quad (\text{razão de amortecimento} = \text{"damping ratio"})$$

Os autovalores ficam:

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm \frac{\sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

ou

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (18.2)$$

para $\zeta < 1$, o que implica que λ seja complexo.

Observação: Se $\zeta > 1$, o sistema é superamortecido e a análise dinâmica é similar à que fizemos para os sistemas de 1^a ordem.

Escrevendo

$$\lambda = -\nu \pm i\omega = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

temos a parte real e a frequência do auto-valor

$$\nu = \zeta\omega_n \quad \text{e} \quad \omega = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

A frequência ω é chamada de *frequência do sistema amortecido*.

18.3 Parâmetros de desempenho (da Aula 10).

Para $0 < \zeta < 1$:

$$T = \text{constante de tempo} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega} = \text{tempo do pico} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$M_p = \text{sobressinal} = \exp\left(\frac{-\nu}{\omega}\pi\right) = \exp\left(\frac{-\zeta\omega_n}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}\pi\right) = \exp\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\pi\right)$$

18.4 Considerações sobre ω_n e ζ

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\text{Rigidez}}{\text{Inércia}}$$

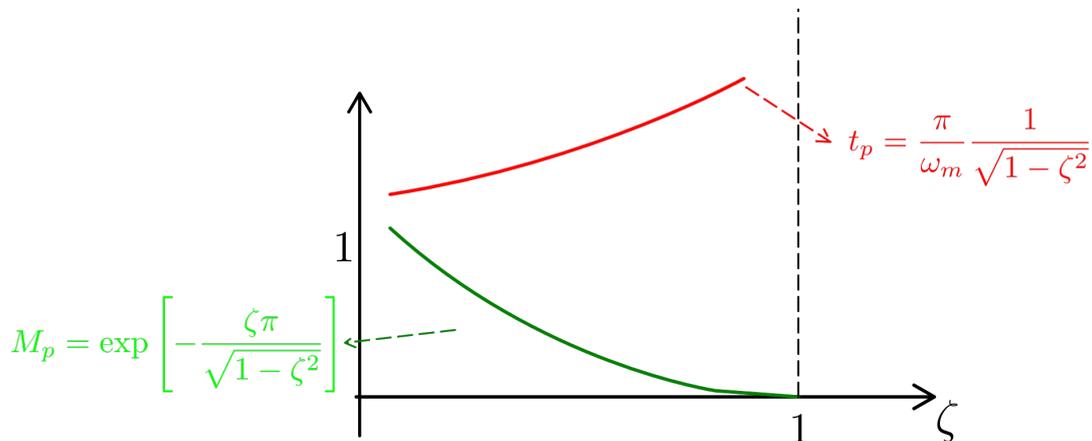
Rigidez é uma característica que geralmente é difícil de ser alterada e é mais fácil de ser estimada teoricamente.

ζ é proporcional a b , que é uma constante muitas vezes difícil de estimar teoricamente. Em geral, b varia com a temperatura e idade.

Conclusão: Na análise dos possíveis autovalores do sistema, é razoável considerar ω_n constante e ζ como variável.

18.5 Gráficos

Os comportamentos de t_p e M_p (definidos no parágrafo 18.3) em função de ζ são antagônicos, enquanto t_p cresce com ζ , M_p decresce, ver Figura.



18.6 Critério Empírico (Ogata página 171)

Ogata, na página 171, propõe (ver texto em anexo) o seguinte critério empírico para a escolha de ζ :

$$0.4 < \zeta < 0.8$$

Usando que (ver parágrafo 18.3)

$$\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{t_p}{T}$$

o critério empírico implica:

•

$$1.4 < \frac{t_p}{T} < 4.2$$

• Usando que $T = \frac{1}{\nu}$ e $t_p = \frac{\pi}{\omega}$, temos

$$0.44 < \frac{\nu}{\omega} < 1.33$$

Observação: $\frac{\nu}{\omega}$ é da ordem de 1 e

$$\frac{\nu}{\omega} = 1 \Rightarrow M_p = e^{-\frac{\nu}{\omega} \pi} = e^{-\pi} \approx 0.043$$

Observação sobre ω : Note que

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

onde ω_n é conhecido da análise do sistema sem dissipação.

Para

$$0.4 < \zeta < 0.8$$

temos

$$0.6 \omega_n < \omega < 0.92 \omega_n$$

onde $\zeta = 0.8$ corresponde a $0.6 \omega_n$ e $\zeta = 0.4$ corresponde a $0.92 \omega_n$.

Capítulo 19

Elementos de Controle Ótimo.

1) Problema:

Dados:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r$$

e um funcional de desempenho (ou custo):

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$$

onde:

- $S(x(t_f), t_f)$: Custo associado ao estado terminal
- $\int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t) dt$: Custo associado ao controle

Encontrar $u : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^r$ que minimize J sujeito aos vínculos:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

e todas as demais condições iniciais e finais ($x(t_0)$, $x(t_f)$) que forem especificadas.

(Ver W. Brogan, cap. 14)

2) Exemplos:

(a) $S = 0$ e $L = 1$, $J = t_f - t_0$: problema do *tempo mínimo*.

(b) $S = 0$ e $L = u^\top u = \langle u, u \rangle$:

J é aquele que usamos para obter a matriz de controlabilidade (aula 7).

(c) $S = 0$, $L = L(x, u, t)$, $\dot{x} = f(x, u) = u$:

J é a “ação” da mecânica Lagrangiana.

(d) $S = \langle x(t_f) - x_d, x(t_f) - x_d \rangle$ e $L = 0$: *problema de erro terminal mínimo* (estado final desejado).

(e) $S = 0$, $L = \langle x(t) - y(t), x(t) - y(t) \rangle$: *problema de erro mínimo em relação à trajetória desejada*.

3) Observação (usada por Bellman):

Uma trajetória minimizadora

$$\hat{x} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \hat{u} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^r$$

possui partes que também são minimizadoras:

$$(\hat{x}(t_0), \hat{u}(t_0)) \rightarrow (\hat{x}(t_1), \hat{u}(t_1)) \rightarrow \dots \rightarrow (\hat{x}(t_f), \hat{u}(t_f))$$

4) Definição:

O “custo mínimo” de levar o sistema do estado $(t, x(t))$ para o estado $(t_f, x(t_f))$ é:

$$g(x(t), t_f - t) := \min_u \left\{ S(x(t_f), t_f) + \int_t^{t_f} L(x(s), u(s), s) ds \right\},$$

onde:

- $x : [t, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$
- $u : [t, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^r$

5) Equação de Bellman

$$g(x(t), t_f - t) = \min_u \left\{ \underbrace{S(x(t_f), t_f) + \int_{t+\delta}^{t_f} L(x, u, s) ds}_{g(x(t+\delta), t_f - (t+\delta))} + \int_t^{t+\delta} L(x, u, s) ds \right\}.$$

ou

$$g(x(t), t_f - t) = \min_u \left\{ g(x(t+\delta), t_f - t - \delta) + \int_t^{t+\delta} L(x, u, s) ds \right\}.$$

Supondo δ pequeno, expandimos até a primeira ordem em δ :

$$\begin{aligned} g(x(t+\delta), t_f - t - \delta) &= g(x(t), t_f - t) + \nabla_x g(x(t), t_f - t) \dot{x}(t) \delta \\ &\quad - \partial_t g(x(t), t_f - t) \delta + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned}$$

and

$$\int_t^{t+\delta} L(x, u, s) ds = L(x(t), u(t), t) \delta + \mathcal{O}(\delta^2).$$

Com isso

$$\begin{aligned} g(x(t), t_f - t) &= g(x(t), t_f - t) - \partial_t g(x(t), t_f - t) \delta \\ &\quad + \min_u \{ \nabla_x g(x(t), t_f - t) \dot{x}(t) \delta + L(x(t), u(t), t) \delta \} + \mathcal{O}(\delta^2). \end{aligned}$$

Definindo

$$t_r = t_f - t,$$

usando o vínculo

$$\dot{x} = f(x, u),$$

dividindo por δ e tomando o limite $\delta \rightarrow 0$, obtemos **Equação de Bellman**:

$$\boxed{\partial_{t_r} g(x, t_r) = \min_{u(t) \in \mathbb{R}^r} \{ \nabla_x g(x, t_r) \cdot f(x, u(t)) + L(x, u(t), t) \}}$$

6) Observação:

Uma condição necessária para que $u = u(t)$ minimize:

$$\min_{u \in \mathbb{R}^r} \{ \nabla_x g(x, t_r) \cdot f(x, u, t) + L(x, u, t) \},$$

onde $t_r = t_f - t$ com t_f fixado, é:

$$\nabla_u \{ \nabla_x g(x, t_r) \cdot f(x, u, t) + L(x, u, t) \} = 0.$$

Ou, em coordenadas:

$$\frac{\partial L(x, u, t)}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g(x, t_r)}{\partial x_j} \frac{\partial f_j(x, u, t)}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

A solução de u é da forma $u = u(x, t, \nabla g)$.

7) Observações:

De (6) e (5), obtemos que a equação de Bellman é, em geral, uma equação a derivada parcial não linear em g (devido a (6)).

Em geral, é um problema difícil.

Note:

$$g(x(t_f), t_r) \Big|_{t_r=0} = g(x(t_f), t_f) = S(x(t_f), t_f) \quad \text{em } t = t_f.$$

Isso representa uma condição de contorno para a equação de Bellman.