

Título em Português:	Efeitos da esparsidade e heterogeneidade de graus na distribuição de autovalores da matriz de conexão de redes neurais
Título em Inglês:	Effect of sparsity and degree heterogeneity in the distribution of eigenvalues of the connection matrix of neuronal networks.
Autor:	Leonardo Vaz Ferreira
Instituição:	Universidade de São Paulo
Unidade:	Instituto de Física de São Carlos
Orientador:	Gonzalo Travieso
Área de Pesquisa / SubÁrea:	Física Geral
Agência Financiadora:	USP - Programa Unificado de Bolsas

EFEITOS DA ESPARSIDADE E HETEROGENEIDADE DE GRAUS NA DISTRIBUIÇÃO DE AUTOVALORES DA MATRIZ DE CONEXÃO DE REDES NEURAIS

Leonardo Vaz Ferreira

Gonzalo Travieso

Universidade de São Paulo

ferreira.leov@gmail.com

Objetivos

O objetivo deste trabalho é estudar, através de simulações numéricas, o efeito da esparsidade e heterogeneidade de graus da distribuição de autovalores da matriz de conexão de redes neurais que satisfazem a Lei de Dale e as condições de balanço de inibição e excitação. Outros estudos anteriores abordam de diferentes maneiras essas interações, podendo não ser considerada a Lei de Dale, que determina que neurônios são exclusivamente excitatórios ou inibitórios. Este estudo visa analisar numericamente o comportamento da esparsidade e heterogeneidade das conexões na distribuição de autovalores dessa matriz.

Métodos e Procedimentos

O trabalho foi desenvolvido em três etapas:

Fase I: Estudo de redes neurais densas, sem e com a lei de Dale. Nesta parte, o enfoque é a comparação com resultados da literatura e a verificação de efeitos de tamanho finito.

Fase II: Estudo de redes esparsas homogêneas. Aqui, as redes são esparsas, com cada possível sinapse existindo ou não com uma probabilidade p . Variando p em $[0,1]$

podemos ajustar o grau de esparsidade da rede neural e verificar seu efeito. As conexões existentes apresentam intensidade aleatória com distribuições normais e seguindo a lei de Dale.

Fase III: Estudo de redes heterogêneas. Nesta fase, ao invés de usar uma probabilidade fixa para a existência de cada sinapse, uma matriz de conexão será gerada na qual o grau de entrada ou de saída ou ambos de cada neurônio tem distribuição livre de escala, gerando grande heterogeneidade de grau. Novamente, a intensidade das conexões existentes terá distribuição normal e seguirá a lei de Dale.

Resultados

Com a variação do parâmetro p , como mostrado na Fig.1, podemos notar que os valores para $p = 0.1$ e $p = 0.9$ resultam em distribuições de autovalores semelhantes, assim como ocorre para outros pares simétricos em torno de $p = 0.5$. Esse comportamento sugere que o raio espectral dos autovalores cresce à medida que p se aproxima de 0.5, atingindo um valor máximo, e depois decresce conforme p se afasta desse ponto. Dessa maneira, podemos observar uma relação quadrática da variância e, por isso, apresenta esse comportamento. Podemos observar que, para alguns valores centrais de p , como $p=0.5$, o raio espectral aumenta e a

densidade de probabilidade diminui, deixando assim uma distribuição mais homogênea ao longo do plano complexo.

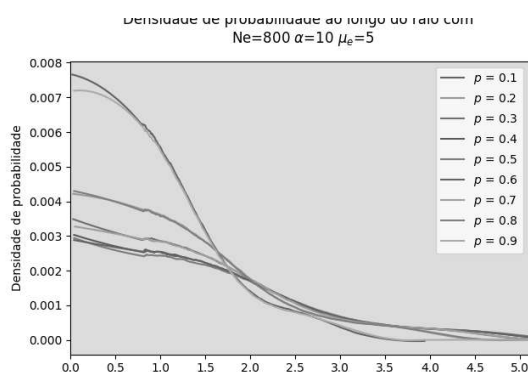


Figura 1: Densidade de probabilidade ao longo do raio do plano complexo com a variação do parâmetro p (pontos dos valores descartados para facilitar a visualização) com $N_e = 1000$ $\sigma_e = 0.22$ e $\sigma_i = 2.2$

Já com respeito a variação de μ_e , representada na Fig.2, podemos observar uma concentração maior de autovalores próximo à origem para valores menores de μ_e e, juntamente com isso, podemos observar que ele também influencia no aumento do raio espectral.

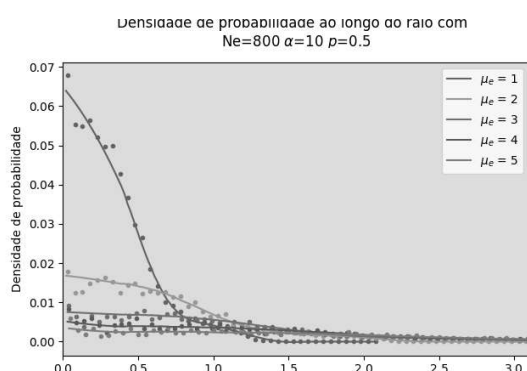


Figura 2: Densidade de probabilidade ao longo do raio do plano complexo com variação do parâmetro μ_e com $N_e = 1000$ $\sigma_e = 0.22$ e $\sigma_i = 2.2$ e $p = 0.5$

Já na Fig.3 onde apresentamos essa mesma variação, agora para redes densas, ou seja,

quando a probabilidade de conexão $p=1$, a variação de μ_e não apresenta alteração da probabilidade dos autovalores ao longo do plano complexo, diferentemente dos casos onde $p < 1$, já que o grande número de conexões dilui o impacto das médias individuais.

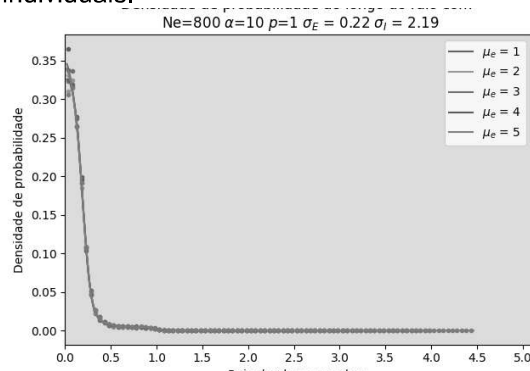


Figura 3: Densidade de probabilidade ao longo do raio do plano complexo com variação do parâmetro μ_e com $N_e = 1000$ $\sigma_e = 0.22$ e $\sigma_i = 2.2$ e $p=1$

Conclusões

O trabalho analisou os efeitos da esparsidade e da heterogeneidade nas redes neurais obedecendo à Lei de Dale, com foco na distribuição dos autovalores da matriz de conexão. Os resultados mostraram que, em redes densas, a variação de parâmetros não altera significativamente o espectro, enquanto em redes esparsas homogêneas a variação de α , da probabilidade de conexão p e de μ_e influencia de forma marcante a densidade espectral e o raio dos autovalores. Assim, foi possível confirmar e ampliar resultados da literatura, evidenciando o papel fundamental da estrutura da rede na definição de suas propriedades espectrais.

Os autores declaram não haver conflito de interesses.

Referências

Sompolinsky, H., A. Crisanti, and H. J. Sommers. "Chaos in Random Neural



Networks." *Physical Review Letters*, 61(3), 1988, pp. 259–62.

Dale, H. "Pharmacology and nerve endings." *Proceedings of the Royal Society of Medicine*, 28(319), 1935, pp. 15–28.

Rajan, K., and L. F. Abbott. "Eigenvalue Spectra of Random Matrices for Neural Networks." *Physical Review Letters*, 97(18), 2006, pp. 2–5.

Ipsen, J. R., and A. D. H. Peterson. "Consequences of Dale's Law on the Stability-Complexity Relationship of Random Neural Networks." *Physical Review E*, 101(5), 2020, pp. 1–9.

Barral, J., and A. D'Reyes. "Synaptic Scaling Rule Preserves Excitatory-Inhibitory Balance and Salient Neuronal Network Dynamics." *Nature Neuroscience*, 19(12), 2016, pp. 1690–96.

Kaiser, M., and C. C. Hilgetag. "Nonoptimal component placement, but short processing paths due to long-distance projections in neural systems." *PLoS Computational Biology*, 2(7), 2006, e95.

Harish, O., and D. Hansel. "Asynchronous Rate Chaos in Spiking Neuronal Circuits." *PLoS Computational Biology*, 11(7), 2015, pp. 1–38.

Kadmon, J., and H. Sompolinsky. "Transition to Chaos in Random Neuronal Networks." *Physical Review X*, 5(4), 2015, pp. 1–28.

Mastrogiuseppe, F., and S. Ostojic. "Intrinsically-Generated Fluctuating Activity in Excitatory-Inhibitory Networks." *PLOS Computational Biology*, 13, 2017.

Harris, I. D., H. Meffin, A. N. Burkitt, and A. D. H. Peterson. "Effect of Sparsity on Network Stability in Random Neural Networks Obeying Dale's Law." *Physical Review Research*, 5(4), 2023, 043132.

Rivkind, A., H. Schreier, N. Brenner, and O. Barak. "Scale Free Topology as an Effective

Feedback System." *PLoS Computational Biology*, 16(5), 2020, pp. 1–24.

EFFECTS OF SPARSITY AND DEGREE HETEROGENEITY ON THE DISTRIBUTION OF EIGENVALUES OF THE CONNECTION MATRIX OF NEURAL NETWORKS

Leonardo Vaz Ferreira

Gonzalo Travieso

Universidade de São Paulo

ferreira.leov@gmail.com

Objectives

The objective of this work is to study, through numerical simulations, the effect of sparsity and degree heterogeneity on the eigenvalue distribution of the connection matrix of neural networks that satisfy Dale's Law and the excitation-inhibition balance conditions. Other previous studies have approached these interactions in different ways, and Dale's Law, which determines whether neurons are exclusively excitatory or inhibitory, may not be considered. This study aims to numerically analyze the behavior of connection sparsity and heterogeneity on the eigenvalue distribution of this matrix.

Methods and Procedures

The work was developed in three stages:
Phase I: Study of dense neural networks, with and without Dale's law. This part focuses on comparing results with literature and verifying finite-size effects.

Phase II: Study of homogeneous sparse networks. Here, the networks are sparse, with each possible synapse existing or not with a probability p . By varying p in $[0,1]$, we can adjust the sparsity of the neural network and verify its effect. The existing connections

present random strengths with normal distributions and follow Dale's law.

Phase III: Study of heterogeneous networks. In this phase, instead of using a fixed probability for the existence of each synapse, a connection matrix will be generated in which the input or output degree, or both, of each neuron has a scale-free distribution, generating significant degree heterogeneity. Again, the strength of the existing connections will be normally distributed and follow Dale's law.

Results

By varying the parameter p , as shown in Fig. 1, we can see that the values for $p = 0.1$ and $p = 0.9$ result in similar eigenvalue distributions, as is the case for other symmetric pairs around $p = 0.5$. This behavior suggests that the spectral radius of the eigenvalues increases as p approaches 0.5, reaching a maximum value, and then decreases as p moves away from this point. Thus, we can observe a quadratic relationship of the variance, and therefore, it presents this behavior. We can observe that, for some central values of p , such as $p = 0.5$, the spectral radius increases and the probability density decreases, thus leaving a more homogeneous distribution along the complex plane.

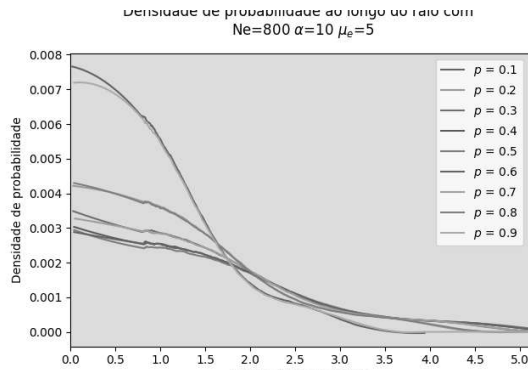


Figure 1: Probability density along the radius of the complex plane with the variation of the parameter p (points of the values discarded to facilitate visualization) with $N_e = 1000$ $\sigma_e = 0.22$ and $\sigma_i = 2.2$

Regarding the variation of μ_e , represented in Fig.2, we can observe a greater concentration of eigenvalues close to the origin for smaller values of μ_e and, together with this, we can observe that it also influences the increase in the spectral radius.

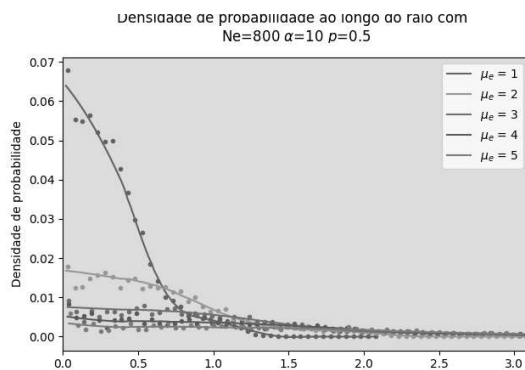


Figure 2: Probability density along the radius of the complex plane with variation of the parameter μ_e with $N_e = 1000$ $\sigma_e = 0.22$ and $\sigma_i = 2.2$ and $p = 0.5$

In Fig. 3, where we present this same variation, now for dense networks, that is, when the connection probability $p=1$, the variation of μ_e does not present a change in the probability of the eigenvalues along the complex plane, unlike the cases where $p<1$, since the large number of connections dilutes the impact of the individual averages.

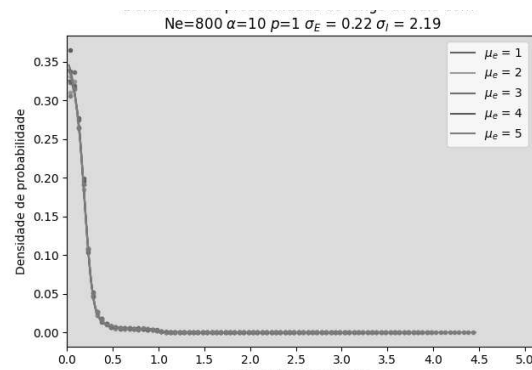


Figure 3: Probability density along the radius of the complex plane with variation of the parameter μ_e with $N_e = 1000$ $\sigma_e = 0.22$ and $\sigma_i = 2.2$ and $p=1$

Conclusions

This study analyzed the effects of sparsity and heterogeneity on neural networks following Dale's Law, focusing on the distribution of the eigenvalues of the connection matrix. The results showed that, in dense networks, parameter variations do not significantly alter the spectrum, while in homogeneous sparse networks, variations in α , the connection probability p , and μ_e significantly influence the spectral density and the eigenvalue radius. Thus, it was possible to confirm and expand upon results from the literature, highlighting the fundamental role of network structure in defining its spectral properties.

The authors declare no conflict of interest.

References

- Sompolinsky, H., A. Crisanti, and H. J. Sommers. "Chaos in Random Neural Networks." *Physical Review Letters*, 61(3), 1988, pp. 259–62.
- Dale, H. "Pharmacology and nerve endings." *Proceedings of the Royal Society of Medicine*, 28(319), 1935, pp. 15–28.



Rajan, K., and L. F. Abbott. "Eigenvalue Spectra of Random Matrices for Neural Networks." *Physical Review Letters*, 97(18), 2006, pp. 2–5.

Ipsen, J. R., and A. D. H. Peterson. "Consequences of Dale's Law on the Stability-Complexity Relationship of Random Neural Networks." *Physical Review E*, 101(5), 2020, pp. 1–9.

Barral, J., and A. D'Reyes. "Synaptic Scaling Rule Preserves Excitatory-Inhibitory Balance and Salient Neuronal Network Dynamics." *Nature Neuroscience*, 19(12), 2016, pp. 1690–96.

Kaiser, M., and C. C. Hilgetag. "Nonoptimal component placement, but short processing paths due to long-distance projections in neural systems." *PLoS Computational Biology*, 2(7), 2006, e95.

Harish, O., and D. Hansel. "Asynchronous Rate Chaos in Spiking Neuronal Circuits." *PLoS Computational Biology*, 11(7), 2015, pp. 1–38.

Kadmon, J., and H. Sompolinsky. "Transition to Chaos in Random Neuronal Networks." *Physical Review X*, 5(4), 2015, pp. 1–28.

Mastrogiuseppe, F., and S. Ostojic. "Intrinsically-Generated Fluctuating Activity in Excitatory-Inhibitory Networks." *PLOS Computational Biology*, 13, 2017.

Harris, I. D., H. Meffin, A. N. Burkitt, and A. D. H. Peterson. "Effect of Sparsity on Network Stability in Random Neural Networks Obeying Dale's Law." *Physical Review Research*, 5(4), 2023, 043132.

Rivkind, A., H. Schreier, N. Brenner, and O. Barak. "Scale Free Topology as an Effective Feedback System." *PLoS Computational Biology*, 16(5), 2020, pp. 1–24.