

MECOM 89

X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre
MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA

II Encontro Nacional de MECÂNICA COMPUTACIONAL

vol. 1

PORTO, PORTUGAL

Setembro 25 - 27, 1989

ASSOCIAÇÃO PLANA DE PÓRTICO E PAREDE

Rosane A.G. Battistelle

Faculdade de Engenharia e Tecnologia Civil
UNESP - Campus de Bauru
Bauru. SP. Brasil

E. Mancini

Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São
Paulo
São Carlos. SP. Brasil

RESUMO

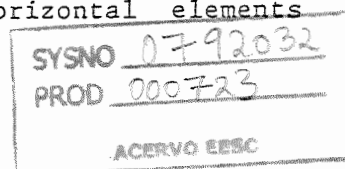
Neste trabalho, apresenta-se um estudo da influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico, em painéis constituído de parede e pórtico associados por barras bi-articuladas, quando sujeitos à carga lateral.

Na análise estrutural, utiliza-se a Técnica do Meio Contínuo, que consiste basicamente em considerarem-se os elementos de conexão horizontais, distribuídos ao longo da altura do edifício.

ABSTRACT

This work presents a study about the influence of the axial displacements of the frame-columns in panels constituted of shear wall and frame, when they are associated by hinged bars and subject to lateral loading.

In structural analysis, it was utilized the Continuous Medium Technique which consists of considering the connection horizontal elements distributed through the height of the building.



1. INTRODUÇÃO

O contínuo processo de verticalização de estruturas urbanas, como decorrência do aumento populacional, maior urbanização e escassez de espaço físico, gerou um maior interesse nos estudos de estabilidade e segurança de tais construções.

Vários trabalhos têm contribuído para o aprimoramento das técnicas de cálculo de estruturas de edifícios altos, como por exemplo os de STAMATO [5], MANCINI [3] e BATHAUS [2].

Com base nos estudos acima citados, pretende-se neste trabalho de terminar os esforços e deslocamentos laterais em painéis constituídos de parede e pórtico, associados por barras bi-articuladas, figura 1.a, quando sujeitos à ação de cargas laterais uniformemente distribuídas ao longo da altura dos mesmos. O comportamento deste modelo estrutural, utilizando a Técnica do Meio Contínuo, expressa-se através de uma equação diferencial de quarta ordem nos deslocamentos laterais da estrutura.

2. CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS LATERAIS

2.1 - Desenvolvimento da equação diferencial

O modelo utilizado para a determinação dos deslocamentos laterais é mostrado na figura 1.a, onde as lajes são representadas por barras bi-articuladas ligando continuamente os painéis-parede e pórtico - ao longo da altura. Admite-se que os pilares e vigas possuam características geométricas constantes ao longo da altura.

O carregamento externo consiste de uma carga horizontal p , uniformemente distribuída ao longo da altura H do painel e uma carga concentrada F agindo no topo. Usam-se o índice w na identificação dos esforços e deslocamentos relativos à parede, e o índice f para esforços e deslocamentos do pórtico.

Como as barras de ligação são consideradas de rigidez infinita no seu plano, os deslocamentos horizontais da parede (u_w) e do pórtico (u_f) podem ser considerados únicos; portanto, as linhas elásticas coincidem, isto é $u_w = u_f = u$ (Fig. 1.b).

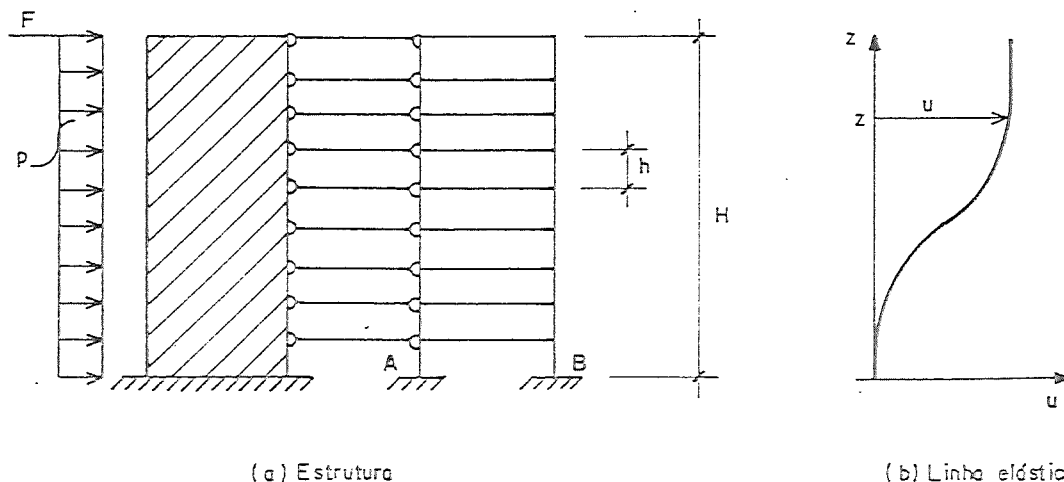


Fig. 1 - ASSOCIAÇÃO DE PAREDE E PÓRTICO POR BARRAS BI-ARTICULADAS

A equação da linha elástica do pórtico, considerando-se os deslocamentos axiais dos pilares, expressa-se conforme BATHAUS [2] por:

$$u_f = u_{f_v} + u_{f_m} \quad (1)$$

onde u_f é o deslocamento total do pórtico.

O deslocamento do pórtico u_{f_v} , pela deformabilidade à força cortante, é dado, conforme STAMATO [5] por:

$$u_{f_v}' = \frac{V_f}{s_f} \quad (2)$$

onde s_f representa a rigidez do pórtico à força cortante.

No cálculo de s_f utiliza-se a seguinte expressão, STAMATO [5]

$$s_f = \frac{12E}{h} \sum_{n.a} \left[\begin{array}{c} \sum k \\ k_{p.n} \frac{v.n}{\sum k} \\ b.n \end{array} \right] \quad (3)$$

onde

k - relação $\frac{I}{l}$ do tramo de viga ou pilar considerado.

$n.a$ - somatória estendida a todos os nós do andar considerado.

$k_{p.n}$ - relação $\frac{I}{l}$ do tramo do pilar abaixo do nó considerado.

$v.n$ - somatória estendida aos tramos de viga que concorrem no nó (1 ou 2 tramos).

$b.n$ - somatória estendida a todas as barras (2, 3 ou 4 barras) que concorrem no nó.

O deslocamento devido à ação do momento, u_{f_m} , que ocorre pela consideração dos deslocamentos axiais dos pilares, satisfaz:

$$u_{f_m}'' = \frac{M_f}{j_f} \quad (4)$$

onde

M_f é o momento fletor total atuando no pórtico considerado.

j_f é o produto da rigidez à flexão, EI_f .

Substituindo-se as equações (2) e (4) na equação (1), resulta:

$$u_f = \int_0^z \frac{V_f}{s_f} dz + \int_0^z \int_0^z \frac{M_f}{j_f} dz^2 \quad (5)$$

Sabe-se que:

$$V = V_w + V_f \quad (6)$$

$$M = M_w + M_f \quad (7)$$

onde

V - força cortante no painel, em uma cota distante z da base, devido ao carregamento externo.

M - momento fletor no painel, em uma cota distante z da base, devido ao carregamento externo.

A equação da linha elástica da parede, desprezando a deformação por força cortante, é dada por:

$$u_w'' = \frac{M_w}{j_w} \quad (8)$$

onde j_w é o produto de rigidez à flexão da parede EI_w .

Derivando a equação (8) e substituindo em (6) obtêm-se:

$$V_f = V + j_w u_w''' \quad (9)$$

Substituindo-se a equação (8) na equação (7), tem-se que:

$$M_f = M - j_w u_w'' \quad (10)$$

Como $u_w = u_f = u$, substituindo-se as equações (9) e (10) em (5), resulta em:

$$u = \int_0^z \frac{(V + j_w u''')}{s_f} dz + \int_0^z \int_0^z \frac{(M - j_w u'')}{j_f} dz^2 \quad (11)$$

Derivando duas vezes a equação (11), obtêm-se:

$$\frac{j_w}{s_f} u^{IV} - \left(1 + \frac{j_w}{j_f}\right) u'' = -\frac{V'}{s_f} - \frac{M}{j_f} \quad (12)$$

Determinando-se os esforços V e M da equação (12), tem-se:

$$V = p(H-z) + F \quad (13)$$

$$M = \frac{p}{2} (H-z)^2 + F(H-z) \quad (14)$$

Derivando a equação (13) e substituindo, juntamente com a equação (14) na equação (12), obtêm-se:

$$\frac{j_w}{s_f} u^{IV} - \left(1 + \frac{j_w}{j_f}\right) u'' = \frac{p}{s_f} - \frac{1}{j_f} \left[\frac{p}{2} (H-z)^2 + F(H-z) \right] \quad (15)$$

Rearranjando a equação (15), escreve-se:

$$u^{IV} - K^2 u'' = az^2 + bz + c \quad (16)$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} K^2 &= \left(\frac{s_f}{j_w} + \frac{s_f}{j_f} \right) \\ a &= - \frac{s_f}{2j_f j_w} p \\ b &= \frac{s_f}{j_f j_w} (pH + F) \\ c &= \frac{1}{j_w} \left(-p + \frac{s_f H^2}{2j_f} p + \frac{s_f}{j_f} FH \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

2.2 - Resolução da equação diferencial

A equação (16) é uma equação diferencial de quarta ordem, cuja solução envolve a soma da solução geral da homogênea (u_h) e uma solução particular da completa (u_p):

$$u = u_h + u_p \quad (18)$$

Resolvendo a parcela homogênea da equação (16), tem-se que a solução é do tipo $u = C e^{\lambda z}$, conforme ALGER [1] e QUINET [4]. Substituindo as raízes λ_i , resulta:

$$u_h = C_1 + C_2 z + C_3 e^{Kz} + C_4 e^{-Kz} \quad (19)$$

Uma solução particular da equação completa é dada por:

$$u_p = Az^2 + Bz^3 + Cz^4 \quad (20)$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{-c}{2K^2} - \frac{a}{K^4} \\ B &= \frac{-b}{6K^2} \\ C &= \frac{-a}{12K^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Substituindo-se os valores das equações (17) nas equações (21), tem-se:

$$\left. \begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2j_w K^2} \left[p \left(\frac{s_f H^2}{2j_f} + \frac{s_f}{K^2 j_f} - 1 \right) + \frac{s_f}{j_f} F \cdot H \right] \\
 B &= - \frac{s_f}{6K^2 j_f j_w} (pH + F) \\
 C &= \frac{s_f p}{24j_f j_w K^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Finalmente, levando as equações (19) e (20) na equação (18), obtêm-se a equação geral que rege o problema:

$$u = C_1 + C_2 z + C_3 e^{Kz} + C_4 e^{-Kz} + Az^2 + Bz^3 + Cz^4 \quad (23)$$

2.3 - Condições de contorno da equação diferencial

na base - $z = 0$

$$a) u(0) = 0 \quad (24)$$

$$b) u'(0) = 0 \quad (25)$$

no topo - $z = H$

$$c) u''(H) = 0 \quad (26)$$

$$d) V_w(H) + V_f(H) = F \quad (27)$$

Na equação (27) os valores de V_w e V_f são obtidos por MANCINI [3] e BATHAUS [2], respectivamente:

$$V_w(H) = -j_w u''' \quad (28)$$

e

$$V_f = s_1 u' - r_1 (v_A - v_B)$$

onde:

$$\left. \begin{aligned}
 s_1 &= r_1 \cdot \ell_1 = \frac{24EK_p K_v}{h(2K_p + K_v)} \\
 v_A - v_B &= \frac{1}{E} \left(\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \int_0^z \frac{(M - j_w u'')}{\ell_1} dz
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Substituindo-se as equações (28) e (29) na equação (27), a quarta condição de contorno fica definida como:

$$-j_w u'''(H) + s_1 u'(H) - \frac{r_1}{E\ell_1} \left(\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \int_0^H (M - j_w u'') dz = F \quad (30)$$

As condições de contorno (24), (25), (26) e (30) estabelecem as seguintes equações:

$$a) C_1 + C_3 + C_4 = 0$$

$$b) C_2 + KC_3 - KC_4 = 0$$

$$c) E_p C_3 + E_n C_4 = -G$$

com:

$$E_p = K^2 e^{KH}$$

$$E_n = K^2 e^{-KH}$$

$$G = 2A + 6BH + 12CH^2$$

$$d) TC_3 + NC_4 + s_1 C_2 = R$$

onde:

$$T = -j_w K^3 e^{KH} + s_1 K e^{KH} - Xj_w K e^{KH} + Xj_w K$$

$$N = j_w K^3 e^{-KH} - s_1 K e^{-KH} + Xj_w K e^{-KH} - Xj_w K$$

$$R = F + j_w (6B + 24CH + 2XAH + 3XBH^2 + 4XCH^3) - s_1 (2AH + 3BH^2 + 4CH^3) - \frac{XH^3}{6} p - \frac{XH^2}{2} F$$

$$X = \frac{-r_1}{E l_1} \left(\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right)$$

Resolvendo este sistema, encontram-se os seguintes valores para C_1 , C_2 , C_3 e C_4 :

$$C_1 = - (C_3 + C_4)$$

$$C_2 = K(C_4 - C_3)$$

$$C_3 = \frac{R}{(-s_1 K + T)} - \frac{(s_1 K + N)}{(-s_1 K + T)} \left[\frac{-G(-s_1 K + T)}{E_n (-s_1 K + T) - E_p (s_1 K + N)} - \frac{E_p R}{E_n (-s_1 K + T) - E_p (s_1 K + N)} \right]$$

$$C_4 = \frac{-G(-s_1 K + T)}{E_n (-s_1 K + T) - E_p (s_1 K + N)} - \frac{E_p R}{E_n (-s_1 K + T) - E_p (s_1 K + N)} \quad (31)$$

Com os valores de A, B e C da equação (22), e das constantes C_1 , C_2 , C_3 e C_4 obtêm-se os deslocamentos horizontais do painel, expressões pela equação (23).

3. OBTENÇÃO DOS ESFORÇOS

3.1 - Esforços na parede

Utilizando-se a equação (8) e substituindo-se a segunda derivada da equação geral (23), determina-se o valor do momento fletor na parede.

$$M_w = j_w (K^2 C_3 e^{Kz} + K^2 C_4 e^{-Kz} + 2A + 6Bz + 12Cz^2) \quad (32)$$

como

$$V_w = -j_w u'''$$

tem-se:

$$V_w = -j_w (K^3 C_3 e^{Kz} - K^3 C_4 e^{-Kz} + 6B + 24Cz) \quad (33)$$

e de

$$q_w = -V_w'$$

obtem-se

$$q_w = j_w (K^4 C_3 e^{Kz} + K^4 C_4 e^{-Kz} + 24C) \quad (34)$$

onde q_w é o quinhão de carga absorvido pela parede.

3.2 - Esforços no pórtico

Através da equação (29):

$$V_f = s_1 u' - \frac{r_1}{E l_1} \left(\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right) \int_0^z (M - j_w u'') dz \quad (29)$$

Considerando $X = \frac{-r_1}{E l_1} \left(\frac{1}{S_A} + \frac{1}{S_B} \right)$; substituindo as derivadas da equação geral (23) na equação (29) e rearranjando-a, determina-se o valor do esforço cortante no pórtico:

$$V_f = s_1 (C_2 + K C_3 e^{Kz} - K C_4 e^{-Kz} + 2Az + 3Bz^2 + 4Cz^3) + X \left[\frac{P}{2} H^2 z - \frac{P}{2} H z^2 + \frac{P}{6} z^3 + FHz - \frac{F}{2} z^2 - j_w (K C_3 e^{Kz} - K C_4 e^{-Kz} + 2Az + 3Bz^2 + 4Cz^3 - K C_3 + K C_4) \right] \quad (35)$$

Como $q_f = -\frac{dV_f}{dz}$, onde q_f é o quinhão de carga absorvido pelo pórtico, tem-se:

$$q_f = -s_1 (K^2 C_3 e^{Kz} + K^2 C_4 e^{-Kz} + 2A + 6Bz + 12Cz^2) - X \left[\frac{P}{2} H^2 - PHz + \frac{P}{2} z^2 + FH - Fz - j_w (K^2 C_3 e^{Kz} + K^2 C_4 e^{-Kz} + 2A + 6Bz + 12Cz^2) \right] \quad (36)$$

como

$$\frac{dM_f}{dz} = -V_f$$

tem-se

$$\begin{aligned} M_f = & s_1 (C_2 H + C_3 e^{KH} + C_4 e^{-KH} + A H^2 + B H^3 + C H^4 - C_2 z - C_3 e^{Kz} - C_4 e^{-Kz} - A z^2 - B z^3 - C z^4) + \\ & + X \left[\frac{p H^4}{8} + \frac{F H^3}{3} - j_w (C_3 e^{KH} + C_4 e^{-KH} + A H^2 + B H^3 + C H^4 - K C_3 H + K C_4 H) \right] - \\ & - X \left[\frac{p}{24} z^4 - \left(\frac{p H}{6} + \frac{F}{6} \right) z^3 + \left(\frac{p}{4} H^2 + \frac{F H}{2} \right) z^2 - j_w (C_3 e^{Kz} + C_4 e^{-Kz} + A z^2 + \right. \\ & \left. + B z^3 + C z^4 - K C_3 z + K C_4 z) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

4. ENGASTAMENTO ELÁSTICO NA PAREDE

Com a finalidade de analisar a influência do engastamento elástico na parede, utilizou-se a equação desenvolvida por STAMATO [5] para painéis constituídos de parede e pórtico, associados por barras bi-articuladas, sem considerar os deslocamentos axiais nos pilares do pórtico.

$$u = \frac{1}{k^4 j_w} (C_1 + C_2 k z + C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz} - \frac{p}{2} k^2 z^2) \quad (38)$$

onde

$$k^2 = \frac{s_f}{j_w}$$

Introduzindo-se o engastamento elástico na parede, estabelecem-se as seguintes condições de contorno:

na base - $z = 0$

$$a) u(0) = 0 \quad (39)$$

$$b) u'(0) = \frac{j_w}{g} u''(0), \text{ segundo MANCINI [3]} \quad (40)$$

no topo - $z = H$

$$c) u''(H) = 0 \quad (41)$$

$$d) V_f(H) + V_w(H) = F \quad (42)$$

As condições de contorno descritas acima, substituídas a equação (38) e as suas derivadas, definem as seguintes equações:

$$a) C_1 + C_3 + C_4 = 0$$

$$b) C_2 + \left(1 - \frac{j_w}{g} k\right) C_3 - \left(1 + \frac{j_w}{g} k\right) C_4 = -\frac{j_w}{g} p k$$

$$c) e^{kH} C_3 + e^{-kH} C_4 = p$$

$$d) s_f C_2 + (s_f e^{kH} - j_w k^2 e^{kH}) C_3 + (-s_f e^{-kH} + j_w k^2 e^{-kH}) C_4 = \frac{F}{A_e k} + s_f k H p \quad (43)$$

onde

$$A_e = \frac{1}{k^4 j_w} \quad (44)$$

Definindo:

$$\left. \begin{aligned} B_e &= (1 - \frac{j_w}{g} k) \\ C_e &= (1 + \frac{j_w}{g} k) \\ D_e &= -\frac{j_w}{g} k \cdot p \\ F_e &= (s_f e^{kH} - j_w k^2 e^{kH}) \\ G_e &= (-s_f e^{kH} + j_w k^2 e^{-kH}) \\ H_e &= \frac{F}{A_e k} + s_f k H p \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Resolvendo-se este sistema, determinam-se os novos valores das constantes:

$$\left. \begin{aligned} C_4 &= \frac{\frac{p}{e^{kH}} (s_f B_e - F_e) + H_e - s_f D_e}{\left[\frac{e^{-kH}}{e^{kH}} (s_f B_e - F_e) + G_e + s_f C_e \right]} \\ C_3 &= \frac{p}{e^{kH}} - \frac{e^{-kH}}{e^{kH}} C_4 \\ C_2 &= D_e - \frac{B_e}{e^{kH}} p + \left(\frac{e^{-kH}}{e^{kH}} B_e + C_e \right) C_4 \\ C_1 &= -C_3 - C_4 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Substituindo-se os valores das constantes das equações (46) de forma análoga ao item 3, obtêm-se os esforços da parede e do pórtico para engastamento elástico da base na parede.

5. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Os resultados obtidos referem-se ao exemplo apresentado na figura 2, tendo sido utilizado um programa para computador, desenvolvido em linguagem FORTRAN, para o cálculo dos esforços e deslocamentos laterais.

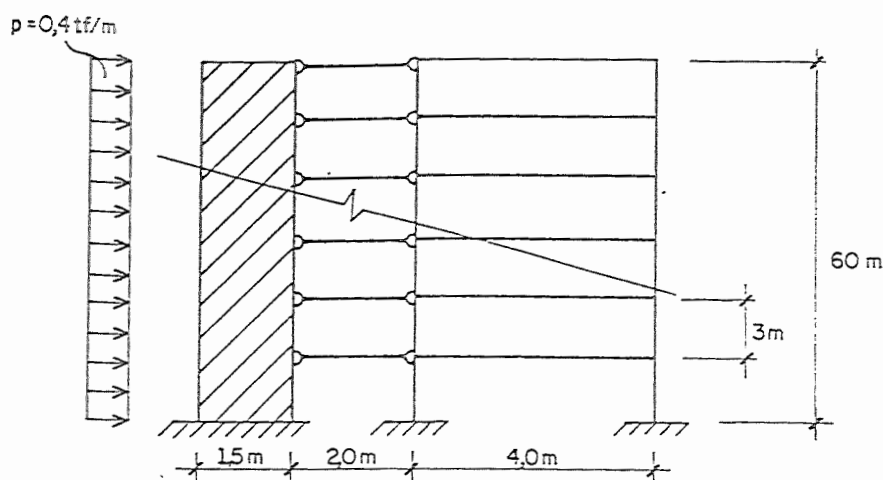


Fig. 2 — EXEMPLO DE ASSOCIAÇÃO DE PAREDE E PÓRTICO

A estrutura apresentada é constituída de uma parede de $1,5\text{m} \times 0,2\text{m}$ e os pilares e vigas do pórtico têm dimensões de $0,4\text{m} \times 0,4\text{m}$ e $0,2\text{m} \times 0,4\text{m}$, respectivamente. Todos os elementos citados possuem seção transversal constante. O valor do módulo de elasticidade é $E = 2,0 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$.

O carregamento externo atuante na estrutura consiste de uma carga lateral uniformemente distribuída de valor $p = 0,4 \text{ tf/m}$.

Os resultados fornecidos pelas equações são representados nos gráficos das figuras 3 a 9, que fornecem uma comparação entre os seguintes casos:

- Caso (1) - Parede e pórtico associados por barras bi-articuladas, com base rígida, considerando-se a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico.
- Caso (2) - Parede e pórtico associados por barras bi-articuladas, com base rígida, sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico.
- Caso (3) - Parede e pórtico associados por barras bi-articuladas, com engastamento elástico na base da parede, sem considerar a influência dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico.

Analisando a figura 3, observa-se um acréscimo de 71% no caso (1) quando comparado ao caso (2), no deslocamento horizontal do topo da estrutura. Esta diferença é ocasionada apenas pela consideração dos deslocamentos axiais dos pilares do pórtico. Acrescentando-se o apoio elástico na base da parede ocorre um aumento de 11% para o caso (3) quando comparado com o caso (2).

Nota-se que os resultados dos momentos fletores do pórtico, (Fig. 4) são maiores para os casos (2) e (3). Isto ocorre devido à maior deformabilidade do mesmo no caso (1). Espera-se, portanto, um comportamento contrário para os momentos fletores na parede, o que é confirmado na figura 5.

Comparando-se as figuras 6 e 7, percebe-se que na base, a parede está absorvendo totalmente o esforço cortante devido ao seu engastamen

to rígido na base, casos (1) e (2). Isto não ocorre quando se analisa o caso (3), pois a rotação permitida na base da parede, devido ao engastamento elástico, faz com que o pórtico receba força cortante em sua base.

Na figura 8, estão representados os quinhões de carga q_w absorvidos pela parede. A parede elasticamente engastada, caso (3), recebe na base uma carga menor devido a sua maior deformabilidade, quando comparada com os casos (1) e (2). Pelo equilíbrio global, o pórtico comporta-se de forma contrária recebendo uma carga maior no caso (3) (Fig.9).

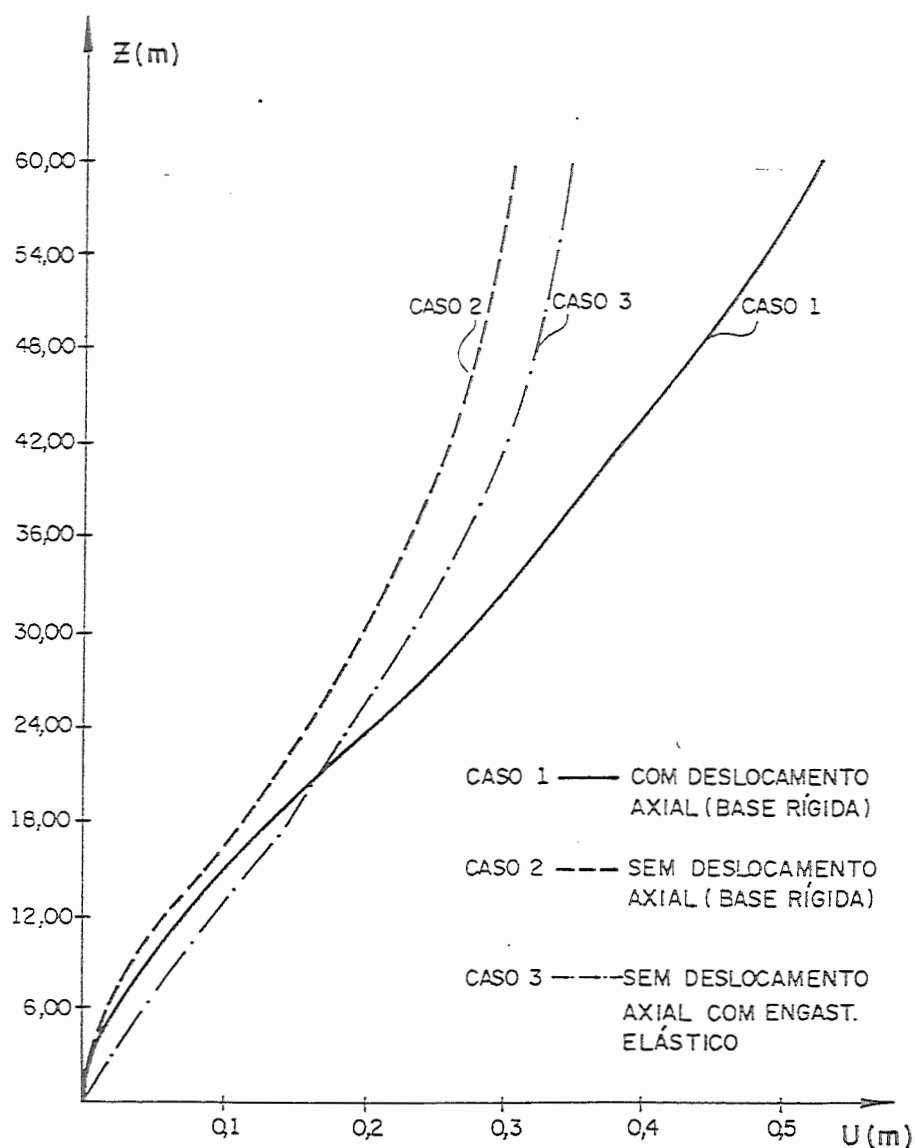


Fig. 3 — DESLOCAMENTOS HORIZONTAIS (m)

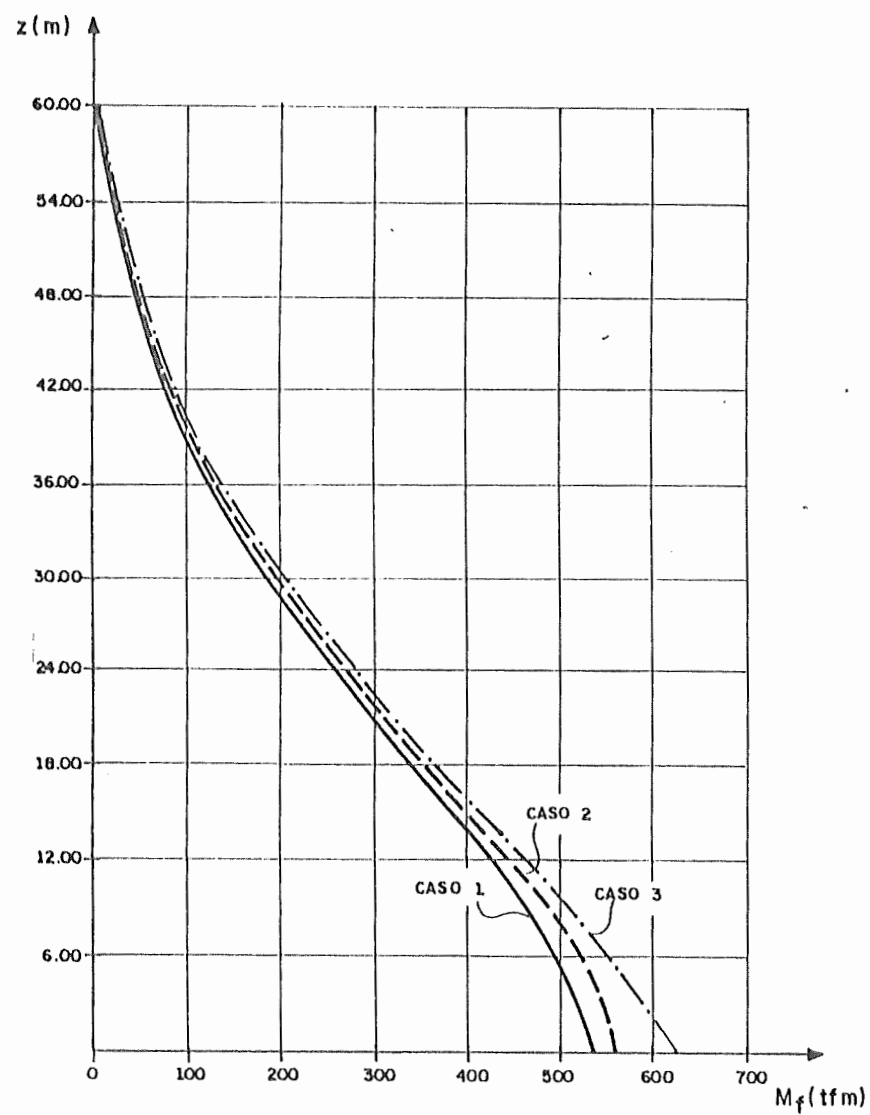


Fig. 4 — MOMENTOS FLETORES NO PÓRTICO

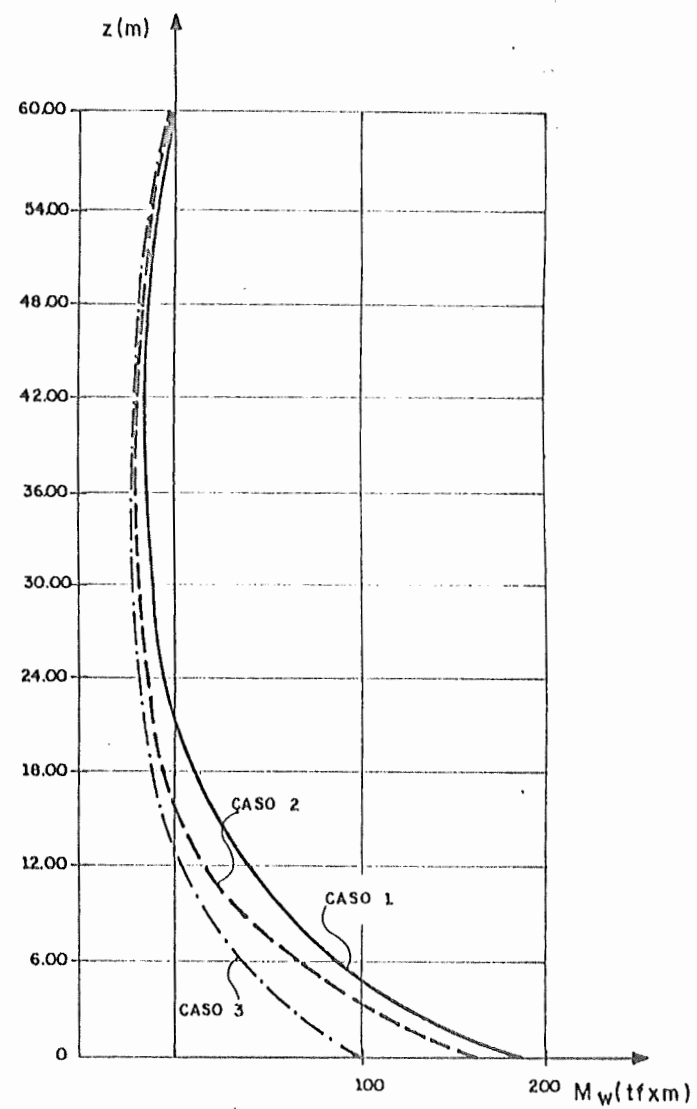


Fig. 5 — MOMENTOS FLETORES NA PAREDE

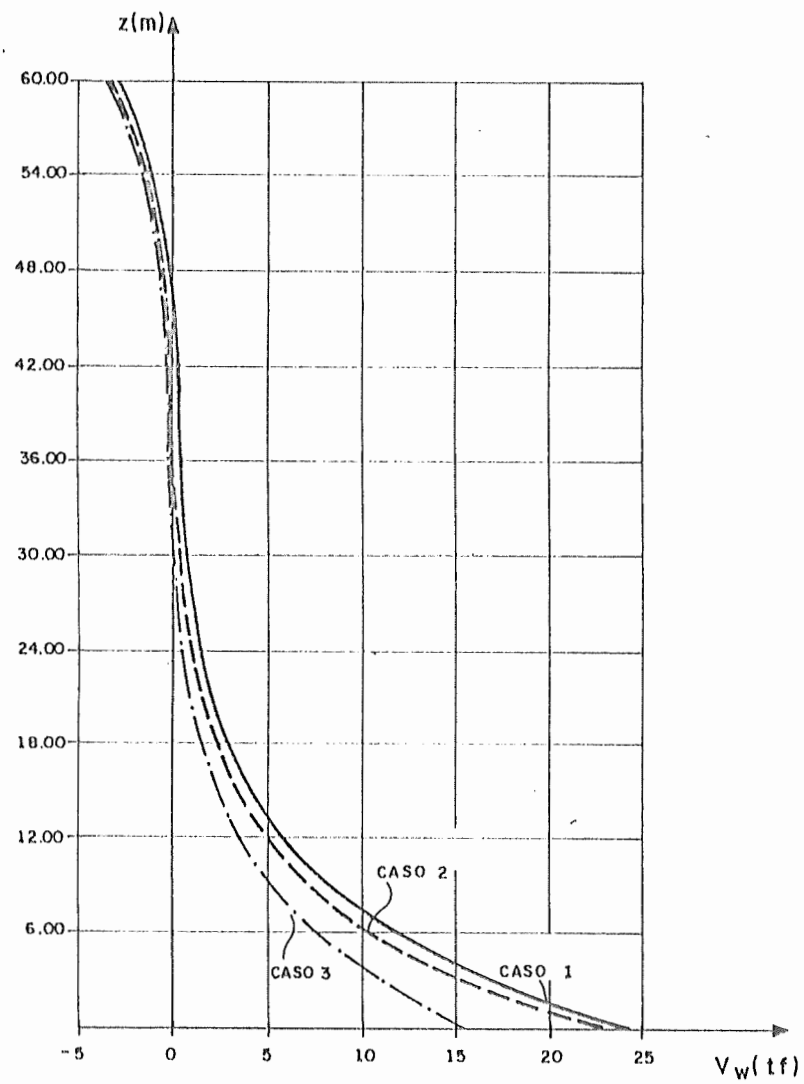


Fig. 6 — FORÇAS CORTANTES NA PAREDE

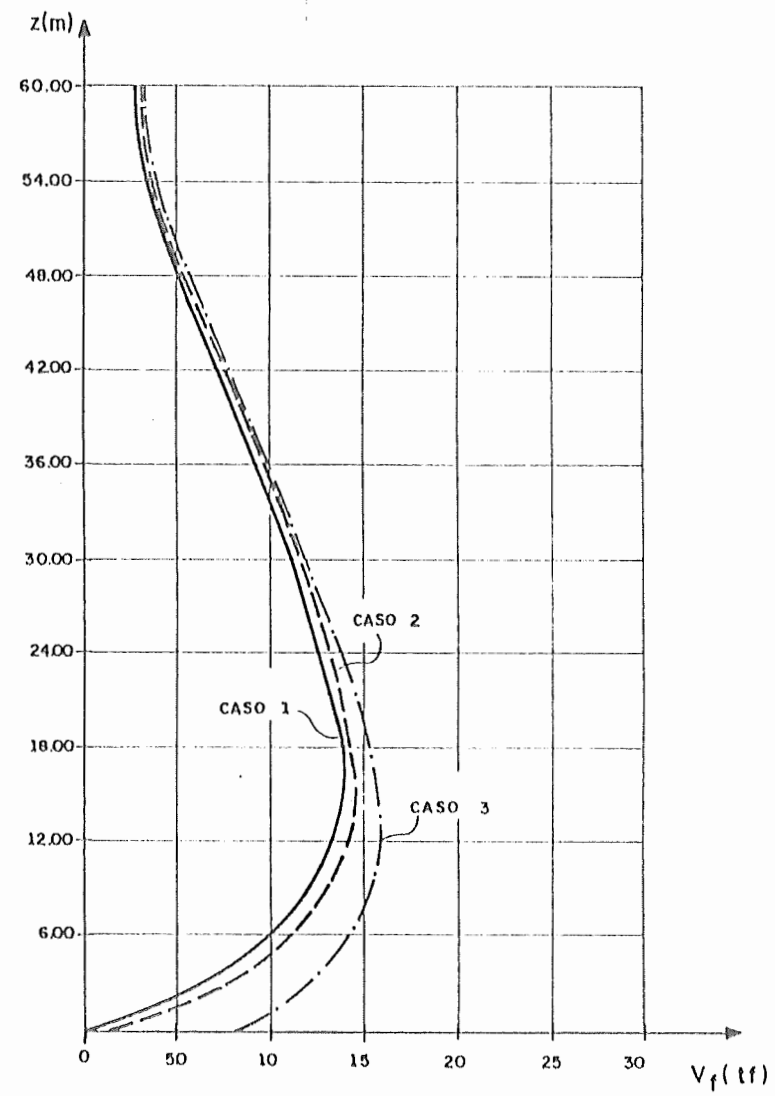


Fig. 7 — FORÇAS CORTANTES NO PÓRTICO

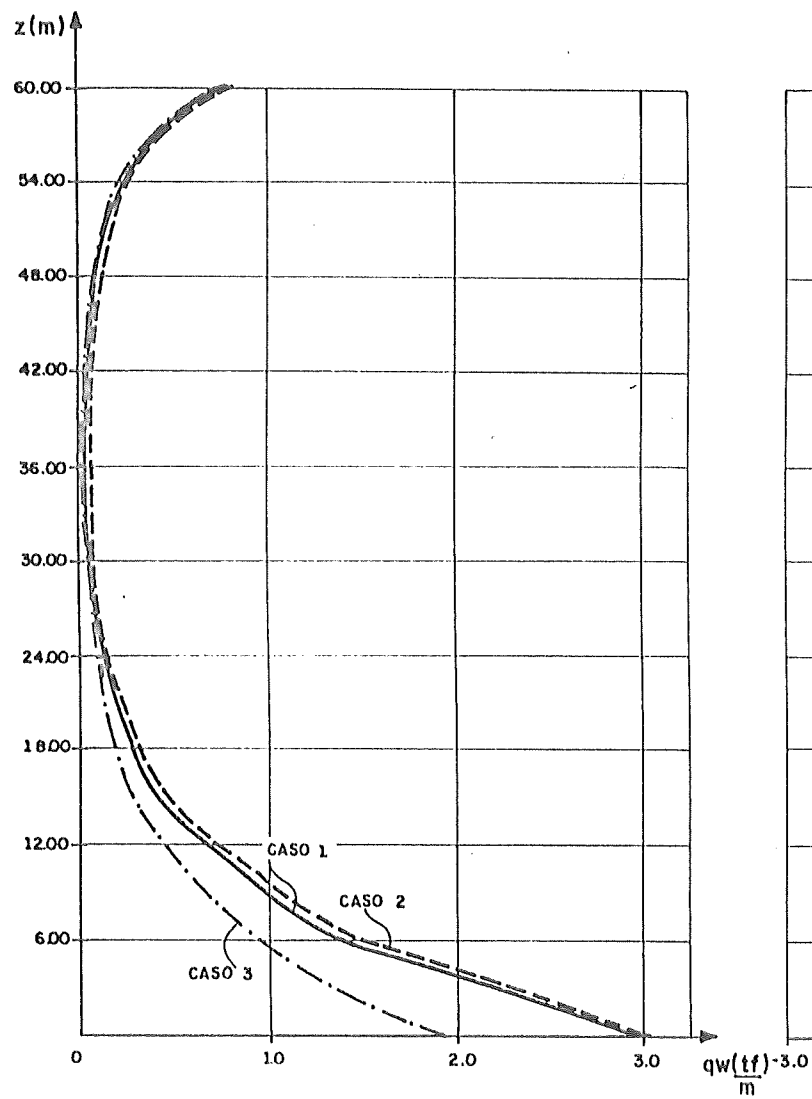


Fig. 8 — CARGA RECEBIDA PELA PAREDE

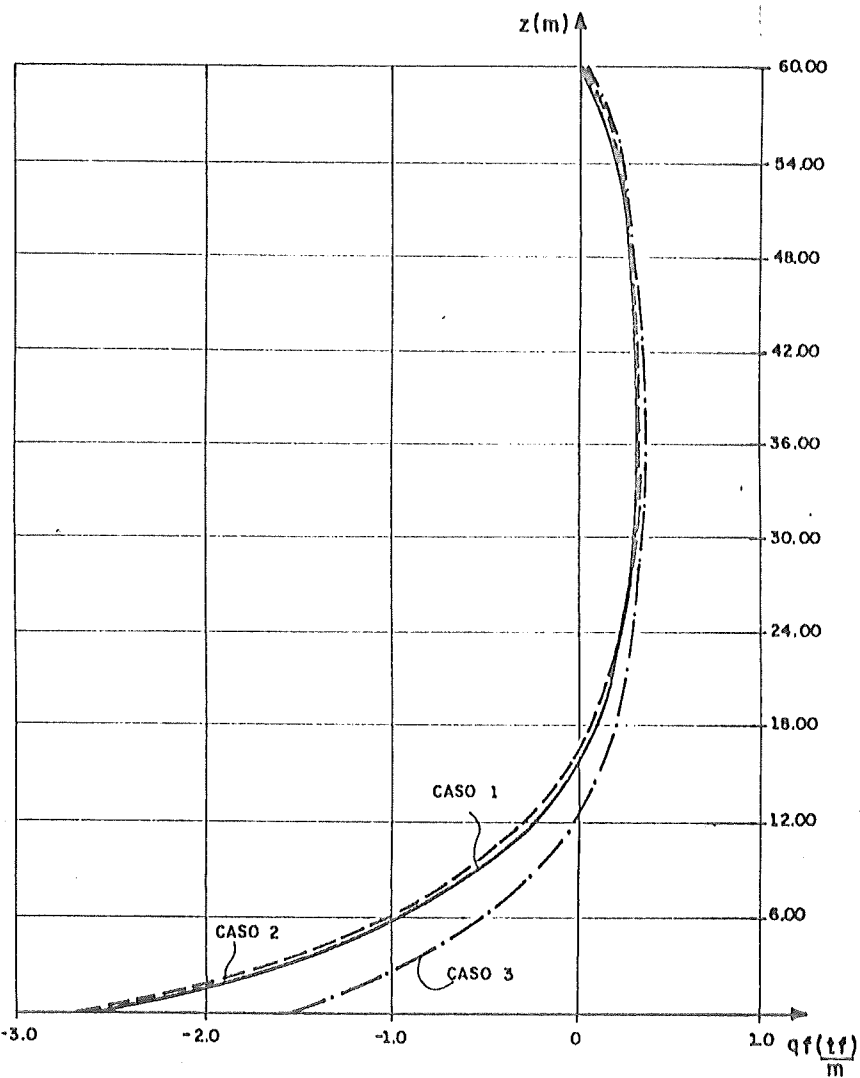


Fig. 9 — CARGA RECEBIDA PELO PÓRTICO

6. NOTAÇÃO

- E - módulo de elasticidade longitudinal da estrutura.
- I_f - momento de inércia das seções transversais dos pilares do pórtico em relação ao seu centro de gravidade.
- I_w - momento de inércia à flexão da seção transversal da parede.
- S_A - área da seção transversal do pilar A.
- S_B - área da seção transversal do pilar B.
- K_p - rigidez I_p/h dos pilares.
- K_v - rigidez I_v/ℓ_1 das vigas.
- ℓ_1 - distância de eixo a eixo entre pilares (comprimento da viga).
- g - rigidez à rotação do engastamento elástico da parede.

7. REFERÊNCIAS

- 1 - ALGER, P.L. "Mathematics for science and engineering". New York, McGraw-Hill, 1957.
- 2 - BATHAUS FILHO, M. "Painéis de contraventamento". São Carlos, EESC/USP. (Trabalho de Especialização).
- 3 - MANCINI, E. "Associação contínua tridimensional de pórtico e parede com engastamento elástico". São Carlos, EESC/USP, 1983. (Dissertação de Mestrado).
- 4 - QUINET, J. "Equações diferenciais e aplicações". Trad. de Ruy Pinto da Silva. Porto Alegre, Ed. Globo, 1970. Tomo V.
- 5 - STAMATO, M.C. "Associação contínua de painéis de contraventamento". São Carlos, EESC/USP, 1971. 72 p.