Responsáveis
Maria Elisa E. L. Galvão e Renate Watanabe
Envie suas perguntas para RPM - O Leitor Pergunta
IME/USP - Cidade Universitária
Rua do Matão, 1010, bloco B, sala 105
05508-090 - São Paulo, SP
ou para rpm@ime.usp.br

O Leitor Pergunta

Um "chute educado" que deu certo

Escreve um leitor de São Paulo: Gostaria de dar uma outra solução para o problema publicado na RPM 76, página 55, na seção *O Leitor Pergunta*, pois acho ser um grande desafio conseguir fatorar certas expressões. O problema consiste em resolver a equação $\sqrt{5-\sqrt{5-x}} = x$, com $0 < x < 5$. Elevando-se ambos os lados ao quadrado, vem

$$5-\sqrt{5-x} = x^2 \quad \text{ou} \quad 5-x^2 = \sqrt{5-x}.$$

Elevando-se novamente ambos os lados ao quadrado, vem

$$\left(5-x^2\right)^2 = 5-x \quad \text{ou} \quad x^4 - 10x^2 + x + 20 = 0.$$

Quando vi essa equação polinomial de quarto grau, pensei em verificar quais seriam os possíveis polinômios de segundo grau, com coeficientes inteiros, que multiplicados chegariam ao polinômio da equação. Escolhi o coeficiente do termo de segundo grau igual a 1, pois o termo de quarto grau tem coeficiente 1. (*)

Como não se tem o termo de terceiro grau, então uma das possibilidades é que um dos polinômios do segundo grau tenha o termo de primeiro grau igual a x e o outro polinômio tenha o termo de primeiro grau igual $-x$. (**)

Assim, fiquei com o seguinte produto

$$(x^2 + x + r)(x^2 - x + s) = x^4 + (s - 1 + r)x^2 + (s - r)x + rs.$$

E aqui me perguntei: será que, fazendo $s - 1 + r = -10$, $s - r = 1$ e $rs = 20$, obtém-se um sistema compatível? A resposta foi sim. Encontrei $r = -5$ e $s = -4$.

Então, $x^4 - 10x^2 + x + 20 = (x^2 + x - 5)(x^2 - x - 4) = 0$. E, agora, basta resolver duas equações do segundo grau e analisar as possíveis raízes, como foi feito na RPM 76.

RPM

O leitor certamente identificou em (*) e (**) os "chutes educados" que deram certo.

Precisão *versus* elegância

Um leitor de Maceió escreveu: No livro *A Matemática do Ensino Médio*, vol.1, publicado na SBM, na página 77, a questão 8 está redigida assim: O número 0,123456789101112131415... é racional ou irracional? Pergunto: esse enunciado está impreciso? Já fiz essa pergunta a vários professores e venho recebendo diferentes respostas.

RPM

Ao pé da letra, a pergunta é imprecisa, pois, embora esteja **implícito**, não está explícito, quais são os algarismos após o 15. Os autores do livro, admitindo estar implícito que depois da vírgula está a sequência de números naturais (e, no contexto, quem duvidaria?), entre elegância de enunciado e uma precisão julgada desnecessária, optaram pela elegância. Ou talvez quisessem provocar uma discussão.

Uma pergunta que pode ocorrer ao leitor é como se pode saber que o número acima, com a sequência dos números naturais após a vírgula, é irracional. Uma resposta simples é que a expansão decimal desse número não termina e não pode ser periódica, pois contém, por exemplo, sequências consecutivas de zeros tão longas quanto se queira (e qualquer período teria um número finito e determinado de zeros consecutivos).

Contagem, de novo

Pergunta uma leitora do Rio de Janeiro: De quantas formas podemos representar o número 15 como soma de números naturais não nulos?

RPM

É melhor começar com um problema mais simples: De quantas maneiras é possível escrever 4 como soma de naturais não nulos?

O número 4 pode ser representado por quatro barras: $|\ \ |\ \ |\ \ |$.

Quatro barras representam três caixas: $|\_|\_|\_|$.

Para escrever 4 como soma de duas parcelas, basta jogar um sinal $+$ numa das caixas:

$|+|\ |\ |$ $(1+3)$ ou $|\ |+|\ |$ $(2+2)$ ou $|\ |\ |+|$ $(3+1)$.

Isto é, das três caixas basta escolher uma para jogar o $+$. Isso poder ser feito de $C_{3,1}=3$ maneiras.

Para escrever 4 como soma de três parcelas, escolhem-se duas das três caixas e, em cada uma, joga-se um $+$:

$|+|+|\ |$ $(1+1+2)$ ou $|+|\ |+|$ $(1+2+1)$ ou $|\ |+|+|$ $(2+1+1)$.

Isso poder ser feito de $C_{3,2}=3$ maneiras.

Finalmente, para escrever 4 como soma de quatro parcelas, joga-se um sinal $+$ em cada uma das três caixas $|+|+|+|$ $(1+1+1+1)$.

O número total de maneiras de escrever 4 como soma de naturais não nulos é: $C_{3,1}+C_{3,2}+C_{3,3}=2^3-1=7$.

Para essa última passagem, é preciso lembrar o desenvolvimento de $(1+1)^3$ usando o binômio de Newton.

Agora é só fazer a mesma coisa para 15. O número 15 pode ser representado por 15 barras que representam 14 caixas.

Para escrever 15 como soma de duas parcelas, basta jogar um sinal $+$ numa das caixas, isto é, das 14 caixas basta escolher uma para jogar o $+$. Isso poder ser feito de $C_{14,1}=14$ maneiras.

Para escrever 15 como soma de três parcelas, basta escolher duas das 14 caixas e, em cada uma, jogar um $+$. Isso poder ser feito de $C_{14,2}$ maneiras. E assim por diante.

O número total de maneiras de escrever 15 como soma de naturais não nulos é: $C_{14,1}+C_{14,2}+C_{14,3}+\ldots+C_{14,14}=2^{14}-1$, lembrando o desenvolvimento de $(1+1)^n$ usando o binômio de Newton:

$$(1+1)^n=C_{n,1}+C_{n,2}+C_{n,3}+\ldots+C_{n,n}=2^n-1.$$

Malabarismos trigonométricos

De um leitor de São Bernardo: Como simplificar a expressão

$$\frac{\sum_{k=1}^{8}\operatorname{sen}(k10^\circ)}{\operatorname{sen}70^\circ\operatorname{sen}80^\circ\operatorname{sen}85^\circ}?$$