

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP

Departamento de Engenharia Eletrônica

BT/PEE/94-12

**Tudo que se Precisa Saber sobre a
Teoria da FFT - Transformada Rápida
de Fourier**

**Fábio Luís Romão
Reinaldo Silveira
Rogério Casagrande
Euvaldo Cabral Jr.**

São Paulo - 1994

Tudo que se precisa saber sobre a teoria da FFT :
transformada rápida de Fourier / F.L. Romão ...
|et al.| ... São Paulo : EPUSP, 1994.
33p. -- (Boletim Técnico da Escola Politécnica
da USP, Departamento de Engenharia Eletrônica,
BT/PEE/94-12)

1. Transformadas de Fourier 2. Sinais - Proces-
samento digital 3. Transformadas I. Romão, Fábio
Luís II. Universidade de São Paulo. Escola Politéc-
nica. Departamento de Engenharia Eletrônica III. Tí-
tulo IV. Série

CDU 517.44
621.391
517.44

TUDO QUE SE PRECISA SABER SOBRE A TEORIA DA FFT - TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Rogério Casagrande

Reinaldo Silveira

Fábio Luís Romão

Lab. de Sistemas Integrados (LSI), DEE, Escola Politécnica - USP

CAIXA POSTAL : 61548 CEP 05424-970 - São Paulo - SP

e-mail: romao@lsi.usp.br ou silveira@lsi.usp.br

Euvaldo Cabral Jr.

Lab. de Comunicações e Sinais (LCS), DEE, Escola Politécnica - USP

CAIXA POSTAL : 61548 CEP 05424-970 - São Paulo - SP

e-mail: euvaldo@lcs.usp.br

TEMA : Processamento Digital de Sinais

Sumário

Neste trabalho são apresentados os principais aspectos relacionados a *FFT*. Inicialmente é feita uma introdução sobre a transformada, mostrando as diferentes formas de implementação. Logo a seguir, são apresentados alguns algoritmos. O desempenho de cada um é mostrado numa comparação com a função de *FFT* do MATLAB.

1.Introdução

1.1 Resumo Histórico

Em algum momento nós já utilizamos algum tipo de transformação (ou transformada), a fim de simplificar um cálculo ou análise matemática. Este recurso tem sido utilizado ao longo dos anos pois tem se mostrado de grande valia para matemáticos, físicos e engenheiros.

A transformada de Fourier é uma destas transformações matemáticas que facilitou o trabalho de muitos estudiosos e cientistas, devido à grande variedade de aplicações a que ela se presta. Não era de se admirar que com o advento do computador digital, métodos numéricos fossem concebidos para se calcular estas transformadas. Entretanto foi somente em 1965 que foi publicado um algoritmo que permitia este cálculo de forma bastante eficiente.

Durante uma reunião do "President's Scientific Advisory Committee", Richard L. Garwin, pesquisador da IBM, notou que John W. Tukey tinha uma boa experiência em transformada de Fourier. Como em sua pesquisa Garwin precisava desesperadamente de um algoritmo que calculasse de modo eficiente esta transformada, perguntou a Tukey que lhe esboçou o que iria se tornar o conhecido algoritmo de Cooley-Tukey[1].

Garwin, assim que pode, voltou para o centro de computação do "IBM Research Center" em Yorktown, onde pretendia ter esta técnica programada. James W. Cooley era um pesquisador recém admitido no centro, e como tal era o único disponível para desenvolver o tal programa. Sob insistência de Garwin, Cooley trabalhou no programa, concluindo-o rapidamente com a esperança de ter cumprido o seu trabalho. Entretanto, tamanho foi o sucesso do programa, que cartas foram se acumulando pedindo basicamente informações sobre o algoritmo bem como cópias do programa. Cooley foi então convidado a publicar um artigo sobre o algoritmo. Em 1965 Cooley e Tukey publicaram o famoso "An Algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier Series" no *Mathematics of Computation*. [3]

Depois do trabalho de Cooley e Tukey, muitos outros autores reportaram a utilização de técnicas parecidas, inspiradas em trabalhos das mais diversas áreas do conhecimento. Entretanto foi a partir do trabalho de Cooley-Tukey que tais técnicas tomaram notoriedade a passaram a ser conhecidas como "Fast Fourier Transforms" (FFTs).

A fim de podermos ter uma idéia bem clara do que é uma Transformada Discreta de Fourier e consequentemente de como calculamos uma FFT, devemos dar uma rápida relembração nos conceitos básicos de Integral de Fourier, Convolução e outros procedimentos matemáticos.

1.2. Integral de Fourier

A integral de Fourier é definida pela seguinte expressão:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.1)$$

t é tempo e f é frequência. A transformada de Fourier de uma função do tempo será representada pela letra maiúscula correspondente função da frequência. Em geral Transformada é uma função complexa da forma:

$$H(f) = R(f) + jI(f) = |H(f)|e^{j\theta(f)} \quad (1.2)$$

onde $R(f)$ é a parte real da transformada e $I(f)$ é a parte imaginária.

A transformação inversa é definida da seguinte forma:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft} df \quad (1.3)$$

Alternativamente a transformada de Fourier pode ser definida como:

$$H(\omega) = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt, \quad \omega = 2\pi f \quad (1.4)$$

$$h(t) = a_2 \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.5)$$

onde os coeficientes a_1 e a_2 assumem diferentes valores dependendo da preferência do usuário. Alguns dos valores comumente encontrados na literatura são:

$a_1 = 1$, e $a_2 = 1/2\pi$; ou $a_1 = a_2 = 1/\sqrt{2\pi}$; ou ainda $a_1 = 1/2\pi$, e $a_2 = 1$. As equações 1.4 e

1.5, impõem como única restrição $a_1 a_2 = 1/2\pi$.

Vários autores costumam definir estes coeficientes de acordo com conveniências específicas, por exemplo:

1) Se levarmos em consideração que a energia total computada no domínio do tempo tem que ser igual a energia total computada no domínio da frequência angular, neste caso então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = 2\pi a_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega, \text{ e portanto } a_1 = 1/\sqrt{2\pi}.$$

2) Se, por outro lado, considerarmos a transformada de Fourier como um caso particular da transformada de Laplace, onde a parte real de s é zero, temos:

$$L[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-(\alpha + j\omega)t} dt, \text{ e portanto } a_2 = 1 \text{ e } a_1 = 1/2\pi.$$

A fim de evitarmos estes tipos de discussões, que podem dar muita margem a dúvidas, Brigham [1] sugere a adoção das definições 1.1 e 1.3 pois estas são consistentes com os dois exemplos anteriores.

A tabela abaixo resume algumas propriedades da Transformada de Fourier.

Propriedades	Domínio do tempo	Domínio da Frequência
Linearidade	$x(t)+y(t)$	$X(f)+Y(f)$
Simetria	$H(t)$	$h(-f)$
Escalamento no Tempo	$h(kt)$	$\frac{1}{ k } H\left(\frac{f}{k}\right)$
Escalamento na Frequência	$\frac{1}{ k } h\left(\frac{t}{k}\right)$	$H(kf)$
Modulação no Tempo	$h(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$H(f-f_0)$
	$h(t)$ -par-	$H(f) = R(f)$ -real-
	$h(t)$ -impar-	$H(f) = jI(f)$ -imaginário-
	$h(t)$ -real-	$H(f) = R(f)+jI(f)$ -par/imp-
	$h(t)$ -imaginário-	$H(f) = R(f)+jI(f)$ -imp/par-

1.3 Integral de Convolução

Uma outra integral importante para o entendimento da Transformada Discreta de Fourier é a integral de convolução, definida da seguinte forma:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t), \quad (1.6)$$

a interpretação gráfica desta integral, como todos já conhecemos, corresponde àquele processo de obtenção da imagem de $h(t)$ 'espelhada' em relação ao eixo das ordenadas, efetuar um deslocamento deste novo $h(-\tau)$ de uma quantidade t , multiplicando $h(t-\tau)$ por $x(\tau)$ e finalmente a área sob o produto $h(t-\tau)x(\tau)$ é o valor da convolução para o tempo t .

1.3.1 Teorema da Convolução no Tempo

Este teorema diz que uma convolução no domínio do tempo corresponde a uma multiplicação no domínio da frequência, ou seja:

$$h(t) * x(t) \Leftrightarrow H(f)X(f), \quad (1.7)$$

Para verificarmos este resultado, basta tomarmos a transformada da equação 1.6 em ambos os lados.

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt, \quad (1.8)$$

trocando-se a ordem de integração, e expressão pode ser reescrita como:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau, \quad (1.9)$$

substituindo $\sigma=t-\tau$, a integral entre colchetes reduz-se a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{-j2\pi f(\sigma+\tau)} d\sigma = e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{-j2\pi f\sigma} d\sigma = e^{-j2\pi f\tau} H(f), \quad (1.10)$$

que substituindo em 1.9, temos:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} H(f) d\tau = H(f) X(f) \quad (1.11)$$

1.3.2 Teorema da Convolução na Frequência

Analogamente ao teorema anterior, este diz que uma multiplicação no domínio do tempo corresponde a uma convolução no domínio da frequência, ou seja:

$$h(t)x(t) \Leftrightarrow H(f) * X(f), \quad (1.12)$$

a relação pode ser facilmente demonstrada, substituindo a equação 1.7 na relação de simetria da tabela do item 1.2.

As figuras 1.1 e 1.2 ilustram a importância destes dois teoremas:

1.4 Séries de Fourier

Uma função periódica qualquer $y(t)$ de período T_0 pode ser expressa por uma série de senos e cossenos, da forma:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)], \quad (1.13)$$

onde f_0 é a frequência fundamental igual a $1/T_0$. Os coeficientes das somatórias são dados pelas expressões:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.14)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (1.15)$$

Alternativamente, a série de Fourier pode ser definida em termos de coeficientes complexos, quando consideramos uma somatória de funções exponenciais.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n f_0 t}, \quad \text{onde } \alpha_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n) \text{ e } n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.16)$$

esta forma,

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.17)$$

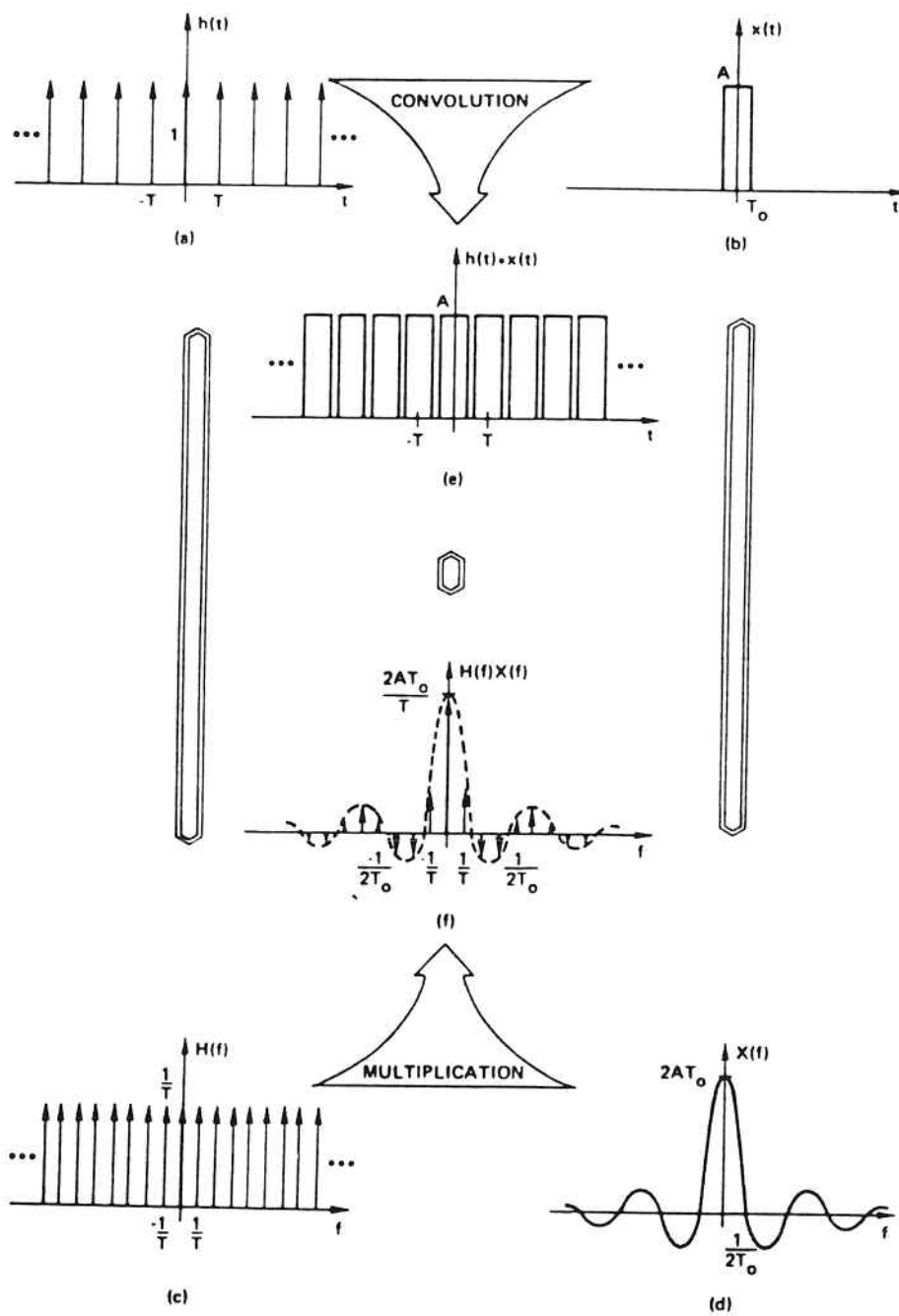


Figura 1.1: Representação gráfica da convolução no tempo

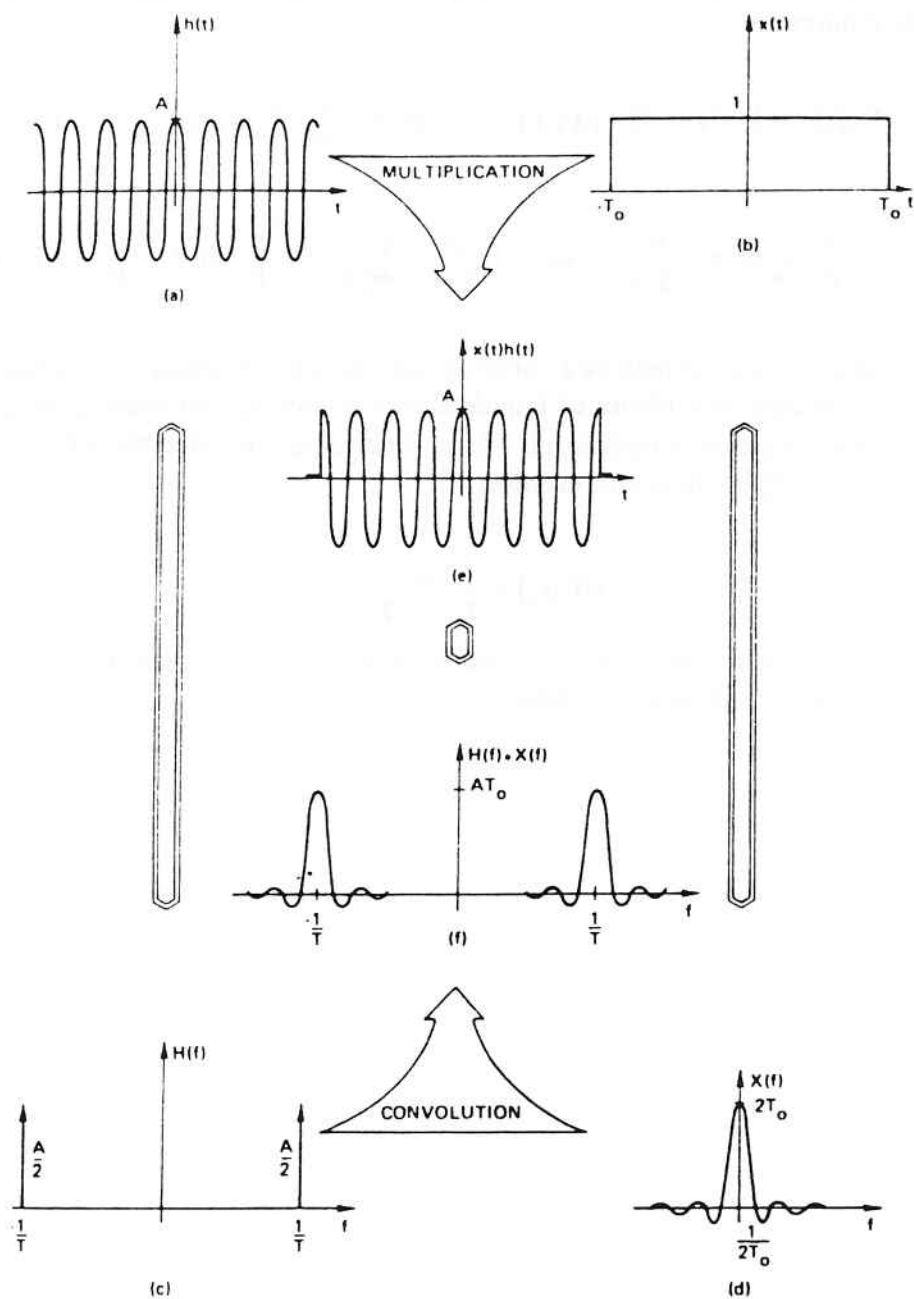


Figura 1.2: Representação gráfica da convolução na frequência

1.4.1 Séries de Fourier, um caso especial da Transformada de Fourier

Consideremos uma função definida no intervalo $-T_o/2 \leq t < T_o/2$, por exemplo a função triangular $h(t)$ ilustrada na figura 1-3. A função periódica $y(t)$ pode ser obtida a partir de $h(t)$

através da convolução de $h(t)$ pela somatória $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_o)$, conforme a figura 1-3(a), (b), e (e). Sabemos, entretanto, que a convolução no tempo corresponde a multiplicação na frequência, e portanto:

$$y(t) = h(t) * x(t) \Leftrightarrow Y(f) = H(f)X(f), \quad e \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_o) \quad (1-18)$$

$$Y(f) = H(f) \frac{1}{T_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_o}\right), \quad ou \quad Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_o} H\left(\frac{n}{T_o}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_o}\right) \quad (1-19)$$

Portanto a transformada de Fourier de uma função periódica é um conjunto de infinitas senoides (i.e, um conjunto infinito de impulsos no domínio f), com amplitudes iguais a $H(n/T_o)$. Lembrando que, segundo a equação 1-17, α_n é calculada no intervalo $-T_o/2 \leq t < T_o/2$ e que neste intervalo $h(t)=y(t)$, podemos escrever:

$$\alpha_n = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} h(t) e^{-j2\pi n f_o t} dt = \frac{1}{T_o} H(n f_o) = \frac{1}{T_o} H\left(\frac{n}{T_o}\right) \quad (1-20)$$

Os coeficientes derivados da Transformada de Fourier para funções periódicas são, portanto, os mesmos calculados da série de Fourier.

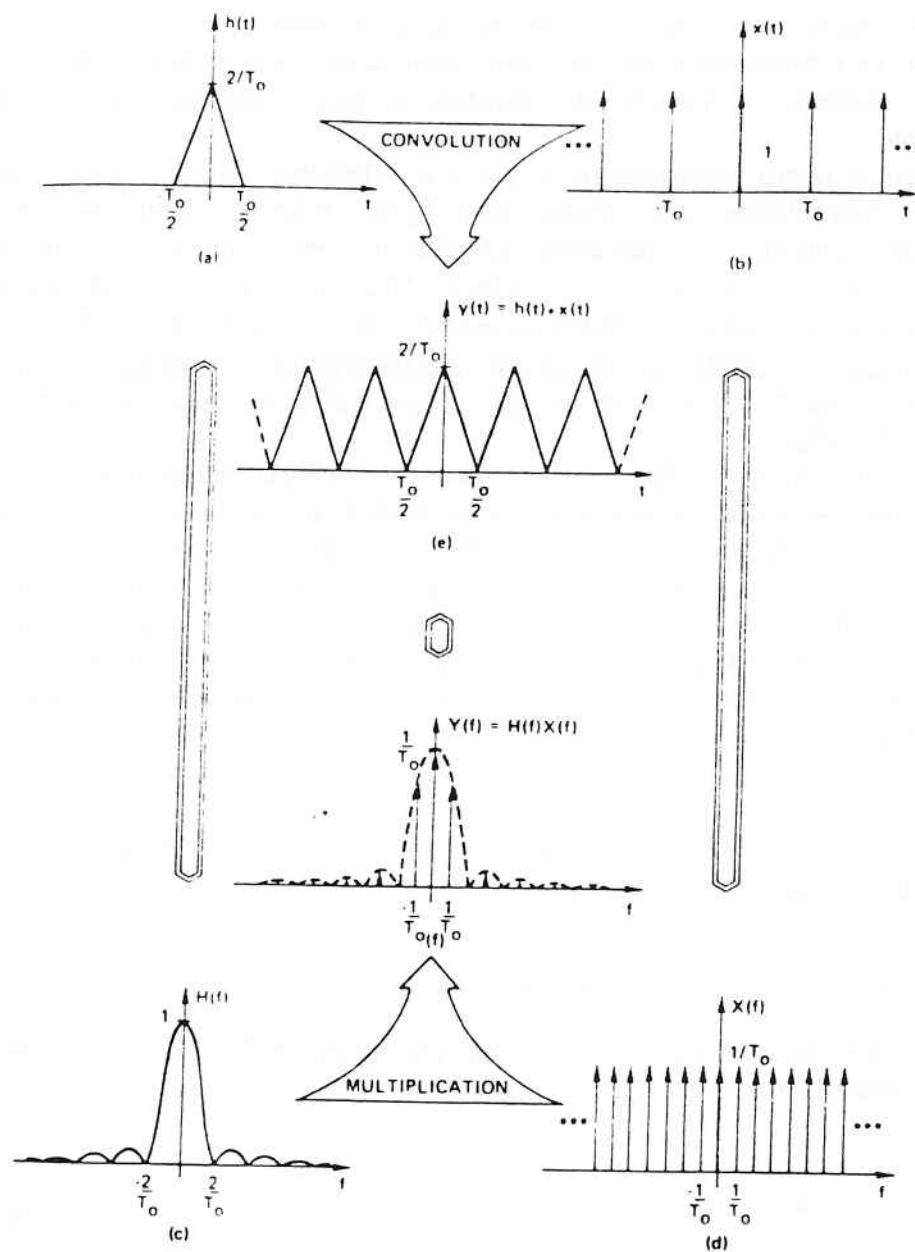


Figura 1.3: Série de Fourier como um caso especial da transformada, demonstração gráfica através do teorema da convolução.

2. Discrete Fourier Transform (DFT - transformada discreta de Fourier)

O processamento digital de sinais trabalha intrinsecamente num domínio de tempo discreto, ou seja, as grandezas físicas (sinais) são invariavelmente amostradas e discretizadas a fim de poderem ser processadas convenientemente. Por exemplo, dada uma função $h(t)$, cuja transformada é $H(f)$, a amostragem corresponde a multiplicação de $h(t)$ por um trem de impulsos equidistantes de um tempo T (chamado de período de amostragem). Lembrando o teorema da convolução, sabemos que esta multiplicação no tempo corresponderá a uma convolução na frequência (vide figura 2-1(a), (b) e (c)). Observando as figuras podemos notar duas inconveniências das funções obtidas: a primeira refere-se a pequena distorção observada na transformada do sinal amostrado em função da superposição de espectros em razão da convolução, este problema pode ser minimizado diminuindo-se o período de amostragem, porém isto aumenta o número de amostras a serem consideradas o que também é inconveniente.

O outro ponto inconveniente é que a transformada obtida é uma função contínua, também não conveniente para a manipulação digital. A fim de diminuirmos o problema de subposição (aliasing), consideramos somente o certo número de amostras do sinal amostrados, isto corresponde a multiplicarmos o sinal amostrado por uma 'janela' retangular, cujo espectro também será convoluido ao espectro anteriormente obtido (figura 2-1(d) e (e)). Quanto maior for a 'janela' retangular, tanto mais próximo do impulso unitário será a sua transformada ($\text{sen}f/f$), portanto menor será a sua influência sobre a transformada original depois da convolução.

A transformada da figura 2-1(e) ainda não é aceitável pois através dos métodos computacionais somente valores amostrados podem ser obtidos. Desta forma, devemos considerar uma amostragem do sinal no domínio da frequência, que desta vez corresponde a uma convolução do sinal amostrado no tempo por um novo trem de impulsos (figura 2-1(f) e (g)). Esta última forma é bastante conveniente pois ambas as funções (no tempo e na frequência) são representadas por valores discretos. Note também que a amostragem no tempo correspondeu a uma função periódica na frequência, e que a amostragem na frequência correspondeu a uma função periódica no tempo. A transformada discreta de Fourier, portanto, requer que ambas as funções (de tempo e frequência) seja modificadas de forma a se tornarem periódicas.

Matematicamente podemos seguir o mesmo procedimento para termos a expressão da transformada discreta de Fourier.

$$h(t)\Delta_o(t) = h(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)\delta(t - kT) \quad (2-1)$$

O resultado da multiplicação pode ser conferido na figura 2-1(c), considerando agora uma janela de amostragem retangular definida como:

$$x(t) = 1 \quad \frac{-T}{2} < t < T_o - \frac{T}{2}, \quad (2-2) \\ = 0 \quad \text{otherwise}$$

temos portanto:

$$h(t)\Delta_o(t)x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT) \quad (2-3)$$

O último passo é fazer a amostragem no domínio da frequência, para isto basta efetuarmos a convolução da função no domínio do tempo. Supondo que a amostra acima possua N valores, então a função de convolução será um trem de impulsos com espaçamento igual a T_o ($T_o=NT$)

$$\tilde{h}(t) = [h(t)\Delta_o(t)x(t)] * \Delta_1(t) = T_o \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT - rT_o) \right] \quad (2-4)$$

A transformada discreta de Fourier pode ser obtida calculando a transformada de $\tilde{h}(t)$. Devemos lembrar que $\tilde{h}(t)$ é apenas uma aproximação de $h(t)$, e pelo fato de ser periódica a sua transformada por ser calculada pela expressão 1-19 (série de Fourier).

$$\tilde{H}\left(\frac{n}{T_o}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(f - nf_o) \quad f_o = \frac{1}{T_o} \quad (2-5)$$

onde,

$$\alpha_n = \frac{1}{T_o} \int_{-T/2}^{T_o-T/2} \tilde{h}(t) e^{-j2\pi nt/T_o} dt, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (2-6)$$

substituindo, temos:

$$\alpha_n = \frac{1}{T_o} \int_{-T/2}^{T_o-T/2} T_o \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT - rT_o) e^{-j2\pi nt/T_o} dt = \sum h(kT) e^{-j2\pi kn/N} \quad (2-7)$$

$$\tilde{H}\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-j2\pi kn/N} \quad (2-8)$$

Como a transformada é periódica, esta pode ser representada pela expressão:

$$G\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} g(kT) e^{-j2\pi nk/N}, \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-9)$$

analogamente a anti-transformada será dada pela expressão:

$$g(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G\left(\frac{n}{NT}\right) e^{j2\pi nk/N}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2-10)$$

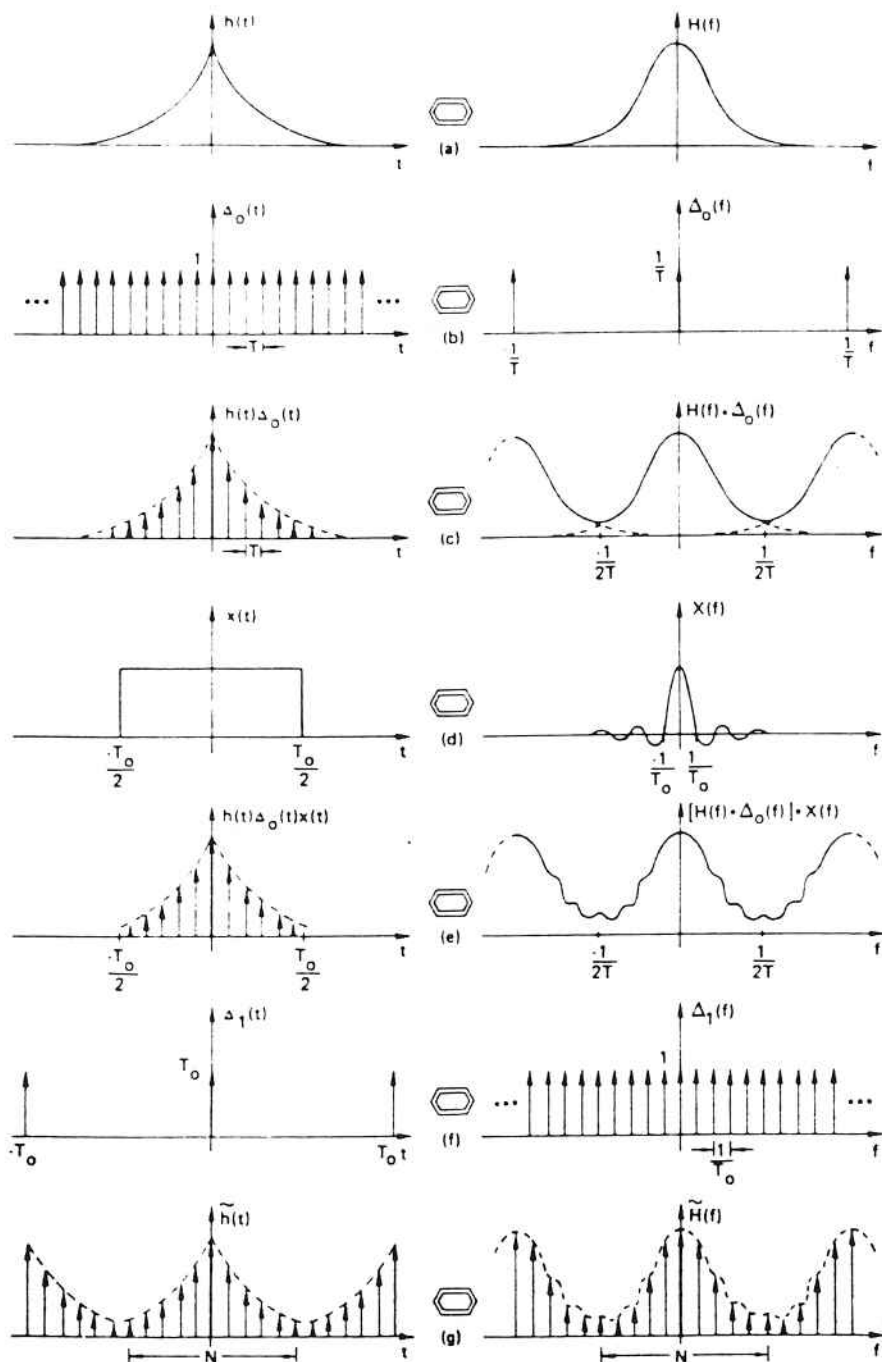


Figura 2.1: Desenvolvimento gráfico da transformada discreta de Fourier

3. A Transformada Rápida de Fourier

3.1 Introdução

A transformada de Fourier converte informação do domínio do tempo para o domínio da frequência. Consiste em uma importante ferramenta matemática para as mais diferentes áreas: acústica, ótica, telecomunicações, "speech", processamento de sinais, processamento de imagens, entre outros. Em sistemas de tempo discreto, a Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform) é utilizada, ao invés da transformada contínua de Fourier. Devido ao fato da DFT requerer um número muito grande de operações matemáticas, ela não pode ser largamente empregada, limitando-se a um número relativamente pequeno de aplicações, mesmo com os computadores mais modernos.

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform) vem contornar esse problema, tornando factível o cálculo da DFT para grandes amostras e em curto espaço de tempo. A FFT, apesar do nome, não consiste em uma outra transformada, mas sim em um nome dado a uma classe genérica de algoritmos computacionalmente eficientes que implementam a DFT e são amplamente utilizados na área de Processamento Digital de Sinais.

Na FFT, "N" é um número fatorável que permite que uma N-point DFT seja decomposta em transformadas menores. O tamanho da menor transformada é conhecido como raiz (RADIX) do algoritmo FFT. Portanto, para uma radix-2 FFT (N é potência de dois), a menor transformada (BUTTERFLY) usada é uma 2-point DFT.

3.2. Desenvolvimento teórico da FFT

Nesta seção será demonstrada a dedução da FFT a partir da expressão da DFT de uma sequência de comprimento N. Esta dedução tem o objetivo didático de mostrar e justificar, de forma clara e simples, como o aproveitamento das propriedades de simetria e periodicidade da função exponencial podem reduzir drasticamente o total de cálculos envolvidos no cálculo da DFT.

A fim de tornar mais simples esta dedução, é conveniente adotarmos o comprimento N como sendo $N=2^Y$, onde Y é um número inteiro. Apesar da aparente limitação, a FFT base 2, ou Radix-2, como é chamado este tipo de FFT, é amplamente utilizada, dada a sua simplificada implementação e rápida execução. De fato, em muitos casos podemos ajustar o comprimento das amostras de forma a atender esta limitação.

Seja a DFT da amostra $x[n]$, $n=0, 1, 2, \dots, N-1$:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N} \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (3.1)$$

Fazendo $W_N = e^{-j2\pi/N}$, temos a expressão:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (3.2)$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (3.3)$$

Nas expressões acima notamos que tanto $x[n]$, como W_N podem ser números complexos. Dessa forma, pode ser facilmente verificado [2] que o cálculo da DFT diretamente pela expressão (3.1) ou (3.3) envolve N^2 multiplicações e $N(N-1)$ somas de números complexos, ou, para efeito de computação, $4N^2$ multiplicações e $N(4N-2)$ somas de números reais.

Assim, a decomposição sucessiva da expressão (3.3) em DFT menores, propriedade garantida pela escolha conveniente de N Radix-2, associada as características simétricas e periódicas de W_N , proporcionam uma redução eficiente dos cálculos envolvidos na determinação da DFT de $x[n]$. A redução de operações matemáticas pela decomposição do cálculo da DFT pode ser intuitivamente demonstrado através da relação:

	multiplicações reais	somas reais
Cálculo de 1 DFT de N ptos:	$4N^2$	$N(4N-2)$
Cálculo de 2 DFT de $N/2$ ptos:	$N+2*4(N/2)^2 = N+2N^2$	$N+N(2N-2)$
Redução de operações:	$\sim 50\% (N \text{ grande})$	$\sim 50\% (N \text{ grande})$

Quando a decomposição do cálculo da DFT é baseada na decomposição da sequência $x[n]$ têm-se os *algoritmos de decimação no tempo* (DIT-FFT). Por outro lado, quando o cálculo da DFT é baseado na decomposição da sequência de saída $X[k]$, têm-se os *algoritmos de decimação em frequência* (DIF-FFT). Nas seções seguintes será mostrado as deduções de cada um destes tipos de algoritmos de FFT.

3.2.1 Decimação em frequência.

Consideremos o caso particular onde $N=8$, com amostras temporais dadas por $x[0]$, $x[1]$, ..., $x[7]$. De (3.3) vem:

$$X[k] = \sum_{n=0}^7 x[n] W_8^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, 7. \quad (3.4)$$

que pode ser expandido (abreviando W_8 por W):

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) * W^{0+x(1)} * W^{0+x(2)} * W^{0+x(3)} * W^{0+x(4)} * W^{0+x(5)} * W^{0+x(6)} * W^{0+x(7)} * W^0 \\ X(1) &= x(0) * W^{0+x(1)} * W^{1+x(2)} * W^{2+x(3)} * W^{3+x(4)} * W^{4+x(5)} * W^{5+x(6)} * W^{6+x(7)} * W^7 \\ X(2) &= x(0) * W^{0+x(1)} * W^{2+x(2)} * W^{4+x(3)} * W^{6+x(4)} * W^{8+x(5)} * W^{10+x(6)} * W^{12+x(7)} * W^{14} \\ X(3) &= x(0) * W^{0+x(1)} * W^{3+x(2)} * W^{6+x(3)} * W^{9+x(4)} * W^{12+x(5)} * W^{15+x(6)} * W^{18+x(7)} * W^{21} \\ X(4) &= x(0) * W^{0+x(1)} * W^{4+x(2)} * W^{8+x(3)} * W^{12+x(4)} * W^{16+x(5)} * W^{20+x(6)} * W^{24+x(7)} * W^{28} \\ X(5) &= x(0) * W^{0+x(1)} * W^{5+x(2)} * W^{10+x(3)} * W^{15+x(4)} * W^{20+x(5)} * W^{25+x(6)} * W^{30+x(7)} * W^{35} \\ X(6) &= x(0) * W^{0+x(1)} * W^{6+x(2)} * W^{12+x(3)} * W^{18+x(4)} * W^{24+x(5)} * W^{30+x(6)} * W^{36+x(7)} * W^{42} \\ X(7) &= x(0) * W^{0+x(1)} * W^{7+x(2)} * W^{14+x(3)} * W^{21+x(4)} * W^{28+x(5)} * W^{35+x(6)} * W^{42+x(7)} * W^{49} \end{aligned}$$

A periodicidade e simetria dos W (também chamados de "Twiddle Factors") para $N=8$ pode ver melhor compreendida através da figura 3.1 abaixo, e verificado pela tabela 3.1.

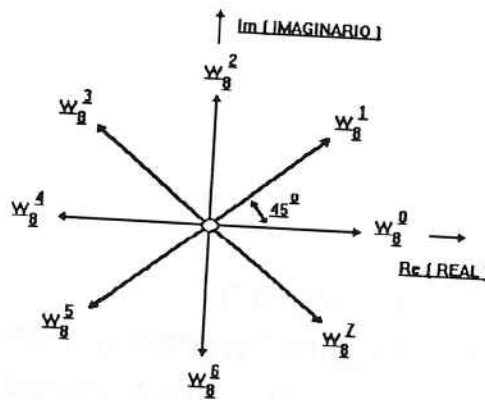


Figura 3.1: Simetria e Periodicidade dos "Twiddle Factors" para 8 pontos.

Tabela 3.1 - Valores Numéricos dos "Twiddle Factors" para 8 pontos .

TWIDDLE FACTOR	VALOR
W_8^0	1
$W_8^1 = e^{-j\pi/4}$	$0.7071 - j0.7071$
$W_8^2 = e^{-j\pi/2}$	$-j$
$W_8^3 = e^{-j3\pi/4}$	$-0.7071 - j0.7071$
$W_8^4 = e^{-j\pi} = -W_8^0$	-1
$W_8^5 = e^{-j5\pi/4} = -W_8^1$	$-0.7071 + j0.7071$
$W_8^6 = e^{-j3\pi/2} = W_8^2$	j
$W_8^7 = e^{-j7\pi/4} = -W_8^3$	$0.7071 + j0.7071$

Devido a periodicidade de W podemos escrever:

$$W^0 = W^8 = W^{16} = W^{24} = W^{32} = W^{40} = W^{48} = W^{56}$$

$$W^1 = W^9 = W^{17} = W^{25} = W^{33} = W^{41} = W^{49} = W^{57}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$W^7 = W^{15} = W^{23} = W^{31} = W^{39} = W^{47} = W^{55} = W^{63}$$

Devido a simetria:

$$W^0 = -W^4$$

$$W^1 = -W^5$$

$$W^2 = -W^6$$

$$W^3 = -W^7$$

Logo vem:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0)+x(4)+x(2)+x(6)+x(1)+x(5)+x(3)+x(7) \\ X(4) &= x(0)*W^{0+x(4)}*W^{0+x(2)}*W^{0+x(6)}*W^{0-x(1)}*W^{0-x(5)}*W^{0-x(3)}*W^{0-x(7)}*W^0 \\ X(2) &= x(0)*W^{0+x(4)}*W^{0-x(2)}*W^{0-x(6)}*W^{0+x(1)}*W^{2+x(5)}*W^{2-x(3)}*W^{2-x(7)}*W^2 \\ X(6) &= x(0)*W^{0+x(4)}*W^{0-x(2)}*W^{0-x(6)}*W^{0-x(1)}*W^{2-x(5)}*W^{2+x(3)}*W^{2+x(7)}*W^2 \\ X(1) &= x(0)*W^{0-x(4)}*W^{0+x(2)}*W^{2-x(6)}*W^{2+x(1)}*W^{1-x(5)}*W^{1+x(3)}*W^{3-x(7)}*W^3 \\ X(5) &= x(0)*W^{0-x(4)}*W^{0+x(2)}*W^{2-x(6)}*W^{2-x(1)}*W^{1+x(5)}*W^{1-x(3)}*W^{3+x(7)}*W^3 \\ X(3) &= x(0)*W^{0-x(4)}*W^{0-x(2)}*W^{2+x(6)}*W^{2+x(1)}*W^{3-x(5)}*W^{3+x(3)}*W^{1-x(7)}*W^1 \\ X(7) &= x(0)*W^{0-x(4)}*W^{0-x(2)}*W^{2+x(6)}*W^{2-x(1)}*W^{3+x(5)}*W^{3-x(3)}*W^{1+x(7)}*W^1 \end{aligned}$$

Obtem-se:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0)+x(4)+x(2)+x(6)+x(1)+x(5)+x(3)+x(7) \\ X(4) &= [x(0)+x(4)+x(2)+x(6)-x(1)-x(5)-x(3)-x(7)]*W^0 \\ X(2) &= [x(0)+x(4)]*W^0+[-x(2)-x(6)]*W^0+[x(1)+x(5)]*W^2+[-x(3)-x(7)]*W^2 \\ X(6) &= [x(0)+x(4)]*W^0+[-x(2)-x(6)]*W^0+[-x(1)-x(5)]*W^2+[x(3)+x(7)]*W^2 \\ X(1) &= [x(0)-x(4)]*W^0+[x(2)-x(6)]*W^2+[x(1)-x(5)]*W^1+[x(3)-x(7)]*W^3 \\ X(5) &= [x(0)-x(4)]*W^0+[x(2)-x(6)]*W^2+[-x(1)+x(5)]*W^1+[-x(3)+x(7)]*W^3 \\ X(3) &= [x(0)-x(4)]*W^0+[-x(2)+x(6)]*W^2+[x(1)-x(5)]*W^3+[x(3)-x(7)]*W^1 \\ X(7) &= [x(0)-x(4)]*W^0+[-x(2)+x(6)]*W^2+[-x(1)+x(5)]*W^3+[-x(3)+x(7)]*W^1 \end{aligned}$$

Rearranjando obtemos:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0)+x(4)+x(2)+x(6)+x(1)+x(5)+x(3)+x(7) \\ X(4) &= x(0)+x(4)+x(2)+x(6)-[x(1)+x(5)+x(3)+x(7)]*W^0 \\ X(2) &= [x(0)+x(4)-x(2)-x(6)]*W^0+[x(1)+x(5)-x(3)-x(7)]*W^2 \\ X(6) &= [[x(0)+x(4)-x(2)-x(6)]*W^0-[x(1)+x(5)-x(3)-x(7)]*W^2]*W^0 \\ X(1) &= [x(0)-x(4)]*W^0+[x(2)-x(6)]*W^2+[x(1)-x(5)]*W^1+[x(3)-x(7)]*W^3 \\ X(5) &= [[x(0)-x(4)]*W^0+[x(2)-x(6)]*W^2-[x(1)-x(5)]*W^1-[x(3)-x(7)]*W^3]*W^0 \\ X(3) &= [[x(0)-x(4)]*W^0-[x(2)-x(6)]*W^2]*W^0+[[x(1)-x(5)]*W^1-[x(3)-x(7)]*W^3]*W^2 \\ X(7) &= [[[x(0)-x(4)]*W^0-[x(2)-x(6)]*W^2]*W^0-[[x(1)-x(5)]*W^1-[x(3)-x(7)]*W^3]*W^2]*W^0 \end{aligned}$$

A partir das expressões acima chega-se ao diagrama da figura 3.2.

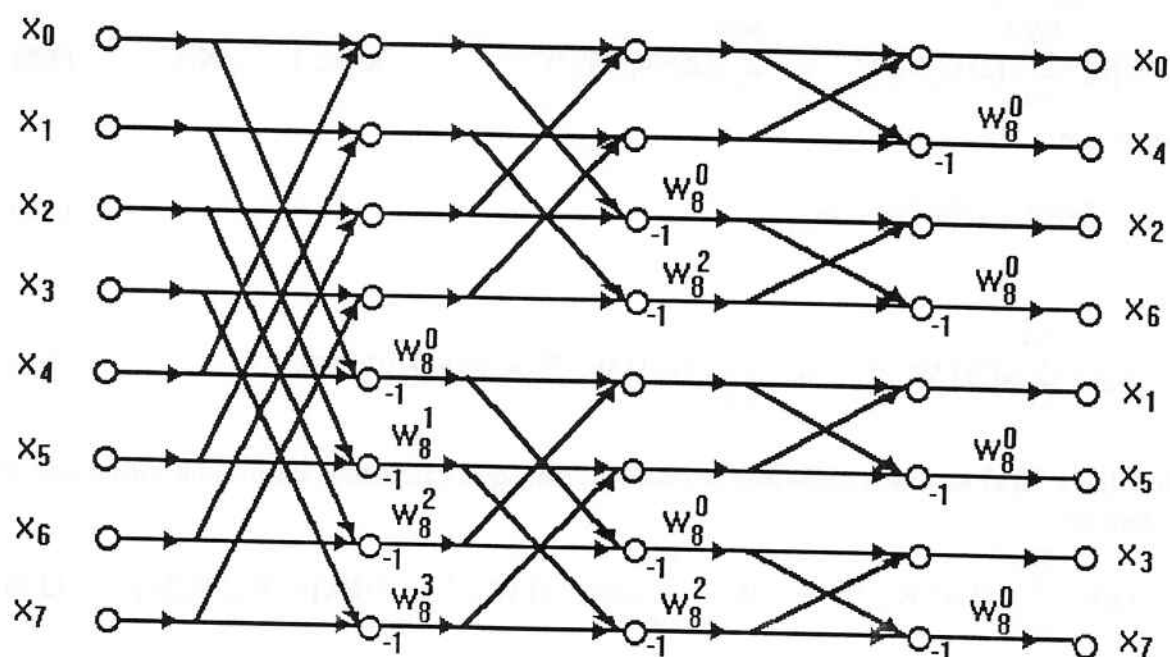


Figura 3.2: Diagrama da DIF-FFT para N=8.

O diagrama da figura 3.2 indica uma forma sistemática de calcular a FFT de uma sequência de 8 pontos. Pode-se observar que unidade elementar de computação que aparece neste grafo em três estágios (note que $8=2^3$) é a estrutura *Butterfly*, representada na figura 3.3.

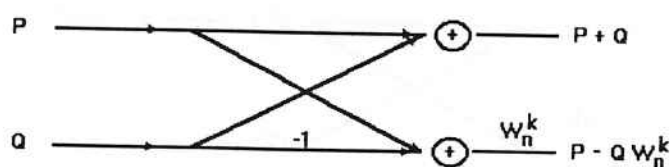


Figura 3.3: Fluxograma de uma estrutura *Butterfly* Radix-2 para DIF-FFT

3.2.2. Decimação no tempo.

Vamos fazer agora a dedução analítica do algoritmo FFT de decimação no tempo, Radix-2.

Diretamente de (3.3), separando os pontos pares e ímpares, a fim de decompor a DFT pelas amostras temporais, vem:

$$X[k] = \sum_{n \text{ par}} x[n] W_N^{nk} + \sum_{n \text{ impar}} x[n] W_N^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.5)$$

ou melhor (introduzindo a variável r):

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] (W_N^2)^{rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] (W_N^2)^{rk} \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (3.6)$$

sabendo que:

$$W_N^2 = e^{-j2\pi/N} = e^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2} \quad (3.7)$$

vem:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk} = G[k] + W_N^k H[k] \quad (3.8)$$

onde $G[k]$ e $H[k]$ são as transformadas decompostas, que calculadas da mesma forma que $X[k]$ resultam em:

$$G[k] = \sum_{r=0}^{N/4-1} g1[2r] W_{N/4}^{rk} + W_{N/2}^k \sum_{r=0}^{N/4-1} g2[2r+1] W_{N/4}^{rk} = G1[k] + W_{N/2}^k G2[k] \quad (3.9)$$

$$H[k] = \sum_{r=0}^{N/4-1} h1[2r] W_{N/4}^{rk} + W_{N/2}^k \sum_{r=0}^{N/4-1} h2[2r+1] W_{N/4}^{rk} = H1[k] + W_{N/2}^k H2[k] \quad (3.10)$$

de onde se conclui que a expressão da DFT de decompõe sucessivamente seguindo a estrutura *Butterfly* dada pela figura 3.4 abaixo:

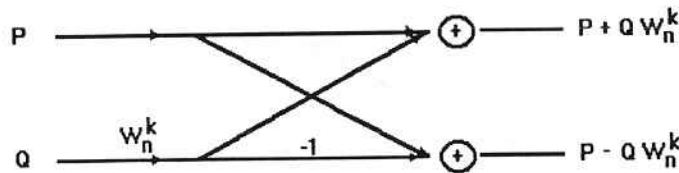


Figura 3.4: Estrutura *Butterfly* Radix-2 para DIT-FFT

O diagrama da DIT-FFT pode ser dado pela figura 3.5 abaixo.

Tanto a decimação em frequência como a decimação no tempo requerem $(N/2)\log_2 N$ multiplicações complexas e $N\log_2 N$ somas complexas.

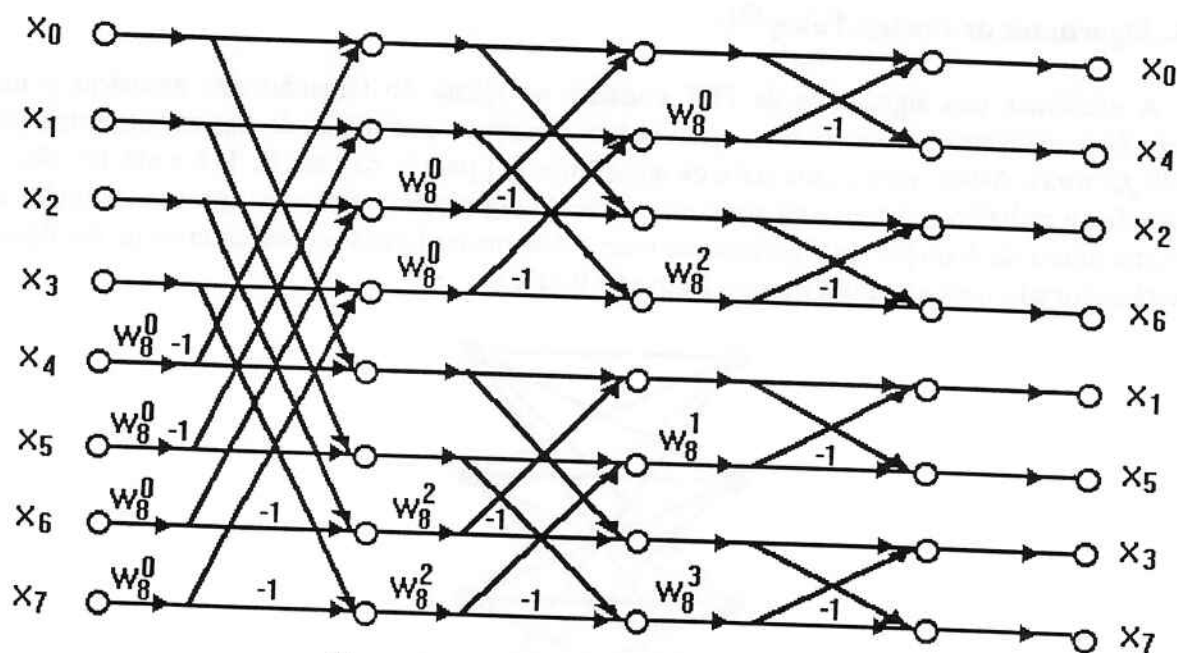


Figura 3.5: Diagrama da DIT-FFT para N=8.

3.2.3. Bits na ordem reversa.

Nas figuras 3.2 e 3.5 pode-se observar que a ordem dos $X[k]$ de saída não corresponde a mesma ordem dos $x[n]$ de entrada. Geralmente quando as amostras de entrada são fornecidas na ordem normal ($x[0], x[1], \dots, x[N-1]$), a sequência de saída é gerada na ordem reversa dos bits do índice k . O ordem reversa dos bits pode ser melhor compreendida com o auxílio da tabela 3.2, onde aparecem todos os índices na ordem reversa para $N=8$. Observe que a coluna BIT-REV. INDEX fornece a ordem dos $X[k]$ de saída.

Tabela 3.2: BIT - REVERSO para uma 8-Point Radix-2 FFT

INDEX	BIT PATERN	BIT-REV.PATERN	BIT-REV. INDEX
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Dessa forma algoritmo de FFT deve dispor também de um algoritmo de rearranjo das amostras na ordem reversa dos bits.

3.2.4. Algoritmos de Cooley-Tukey[3].

A eficiência dos algoritmos de FFT consiste no ajuste do tamanho das amostras a um número N conveniente, de tal forma a aproveitar a simetria e periodicidade das exponenciais (os *twiddle factors*). Assim, existe uma série de algoritmos [1] para N na base 2, 4, 8 e até 16. Não é escopo deste trabalho mostrar aqui toda esta série de algoritmos, uma vez que sua dedução se aproxima muito da dedução do algoritmo de base 2 demonstrado nas seções anteriores. Na figura 3.6 está esboçado uma estrutura do tipo *Butterfly* Radix-4.

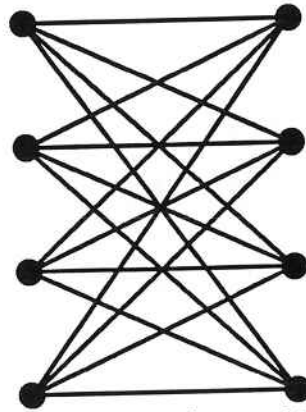


Figura 3.6: Esquema da estrutura Butterfly para Radix-4 (sem os coeficientes)

Convém, no entanto, demonstrar rapidamente a dedução da FFT para o caso de $N=N_1N_2$.

Sejam:

$$n = N_2n_1 + n_2, \quad 0 \leq n_1 \leq N_1-1 \text{ e } 0 \leq n_2 \leq N_2-1 \quad (\text{portanto } 0 \leq n \leq N-1) \quad (3.11)$$

$$k = k_1 + N_1k_2, \quad 0 \leq k_1 \leq N_1-1 \text{ e } 0 \leq k_2 \leq N_2-1 \quad (\text{portanto } 0 \leq k \leq N-1) \quad (3.12)$$

Assim:

$$X[k] = X[k_1 + N_1k_2] = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[N_2n_1 + n_2] W_N^{N_2k_1n_1} W_N^{k_1n_2} W_N^{N_1k_2n_2} W_N^{N_1N_2k_2n_1} \quad (3.13)$$

A tabela 3.3 abaixo ajuda a compreender melhor a expressão (3.13)

Tabela 3.3: Mapeamento bidimensional de uma sequência $x[n]$, $n=0, 1, \dots, N_1N_2-1$

$n_2 \setminus n_1$	0	...	N_1-1
0	$x[0]$	...	$x[(N_1-1)N_2]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N_2-1	$x[N_2-1]$	...	$x[N_1N_2-1]$

Sendo: $W_N^{N_2k_1n_1} = W_N^{k_1n_1}$, $W_N^{N_1k_2n_2} = W_N^{k_2n_2}$ e $W_N^{N_1N_2k_2n_1} = 1$ a expressão (3.13) pode ser escrita:

$$X[k_1 + N_1k_2] = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \dots \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[N_2n_1 + n_2] W_N^{k_1n_1} \cdot W_N^{k_1n_2} \cdot W_N^{k_2n_2} \quad (3.14)$$

$$\text{sendo } G[n_2, k_1] = W_N^{k_1 n_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[N_2 n_1 + n_2] W_{N_1}^{k_1 n_1} \quad 0 \leq k_1 \leq N_1-1 \text{ e } 0 \leq n_2 \leq N_2-1 \quad (3.15)$$

Temos também:

$$X[k_1 + N_1 k_2] = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} G[n_2, k_1] W_{N_2}^{k_2 n_2} \quad 0 \leq k_1 \leq N_1-1 \text{ e } 0 \leq k_2 \leq N_2-1 \quad (3.16)$$

O cálculo de $G[n_2, k_1]$ segue o mesmo procedimento demonstrado e tem-se assim recursivamente a expressão completa do cálculo da DFT.

Na tabela 3.4 abaixo é mostrado o número de operações matemáticas envolvidas em vários casos no cálculo da FFT.

Tabela 3.4: Operações requeridas no cálculo da FFT em diferentes bases, com $N=4096$ (2^{12})

ALGORITMO N = 4096	NUMERO DE MULTIPLICAÇÕES	NUMERO DE ADIÇÕES
RADIX - 2	81.924	139.266
RADIX - 4	57.348	126.978
RADIX - 8	49.156	126.978
RADIX - 16	48.132	125.442
DFT direto	67.108.864	67.100.672

- FFT para N fatorável

Quando o número de amostras N pode ser decomposto em fatores quaisquer, pode ser utilizado algum algoritmo de FFT. A eficiência e praticidade deste algoritmo vai depender do número de fatores e de seus valores.

Pelo que já foi exposto, pode-se deduzir que um DFT de N pontos pode ser subdividida sucessivamente um número de vezes igual ao número de fatores que formam N . Em cada uma destas subdivisões, a estrutura *Butterfly* pode ser diferente, pois vai possuir o número de ramificações igual ao valor do fator. Assim, em muitos casos os coeficientes W não serão simétricos e/ou periódicos em alguns níveis, ou mesmo em todos. Todavia, podem ocorrer algumas simplificações que possam diminuir consideravelmente o número de operações envolvidas. Cada fatoração de N pode resultar em algoritmos diferentes. De fato qualquer número N que possa ser fatorado em pelo menos dois números primos (diferentes de 1) proporciona um algoritmo de FFT com menos cálculos que a DFT direta.

3.3.5. Implementação da FFT utilizando escalonamento (Scaling)

Para o cálculo da FFT, se faz necessário um escalonamento dos resultados intermediários para prevenção de possíveis "overflows". Um processador da família TMS320, por exemplo, possui algumas características otimizadas para o processamento digital de sinais. Uma delas seria a disponibilidade de "on-chip shifters" para escalonamento. Para evitar a possibilidade de "overflow" a cada estágio da FFT o dado deve ser escalonado (dividido) por dois. Desta forma, se um algoritmo de FFT é constituído de " M " estágios, a saída terá sido escalonada de

$2^M = N$, sendo N o número de pontos da FFT. Isto funciona muito bem quando se trata de dados reais na entrada. Para amostras com componentes complexas, maior cuidado deve ser tomado e um novo escalonamento deve possivelmente ser necessário.

4. FFT: Aplicações e cuidados na implementação

Após definir qual o algoritmo de FFT será utilizado, seja ele do tipo radix-2, 4, 8, com decimação no tempo (DIT) ou frequência (DIF), nos vemos diante de um problema de avaliação dos resultados obtidos. Caberá ao usuário, dentro da necessidade e da aplicação de cada um, avaliar os problemas que certamente serão encontrados e o quanto afetarão determinada aplicação.

Se prepararmos uma sequência de entrada, constituída da somatória de três senóides de igual amplitude, com frequências aleatórias, e com amostragem respeitando o Critério de Nyquist, por que obtemos como resposta do algoritmo de FFT, as três raiais das mesmas senóides, nas frequências corretas, mas com formato e magnitude diferentes? Se observarmos a figura 1, notaremos que quando limitamos a sequência de entrada em um número finito de pontos, o sinal a ser analisado, poderá ou não ter terminado um ciclo completo.

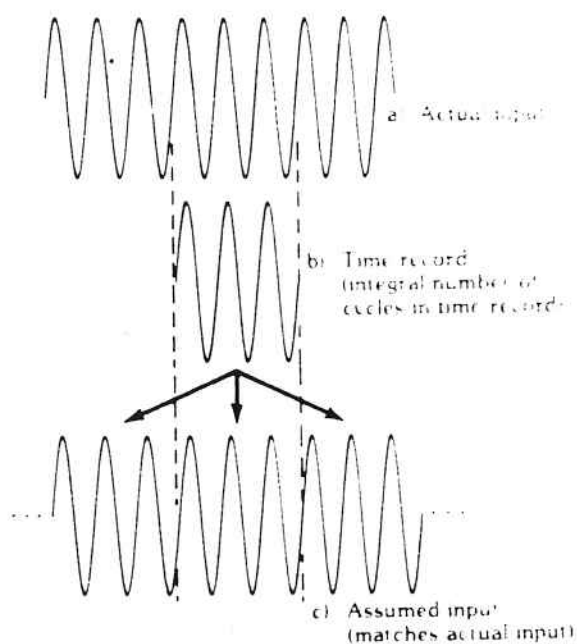


Figura 1.a: Sinal de entrada periódico

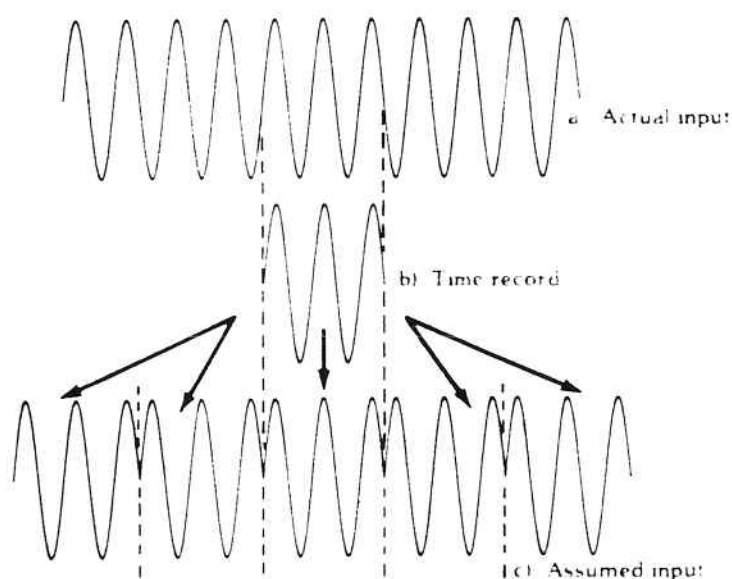


Figura 2.b: Sinal de entrada não-periódico

Quando definimos o número de linhas "N" ($N=128, 256...$) da nossa FFT, definimos o número de raiais distribuídas entre 0 Hz e a frequência de amostragem.

$$df = \frac{F_{sample}}{N} \quad (4.1)$$

A equação acima determina a distância entre uma linha e outra. Caso a frequência de uma componente do sinal a ser analisado seja exatamente um múltiplo de "df", obtém-se o caso da figura 1.a. Obteremos então, um espectro de uma única raia, com magnitude correta (melhor caso). Mas, em contrapartida, se esta frequência não for múltipla de "df", figura 1.b, obtém-se um espectro mais "espalhado", e com uma atenuação, no pior caso (entre um múltiplo e outro), de até 37% (3.9dB), na magnitude. A este "espalhamento" devido a frequência de alguma componente do sinal não ser múltipla de "df", é dado o nome de *leakage*.

Uma forma de melhorar o problema causado pelo *leakage* é a aplicação correta do "janelamento" sobre a sequência de entrada.

4.1. Janelamento (*windowing*)

O efeito do janelamento, no domínio do tempo, pode ser mostrado através da figura 2. Pode-se notar que o problema está nos extremos da parcela amostrada do sinal, e que o centro mostra uma boa onda senoidal. Ao se multiplicar o sinal de entrada (domínio do tempo) por uma função que seja zero nos extremos do período, concentra-se os cálculos da FFT no centro. A este tipo de função dá-se o nome de função janela (*window function*).

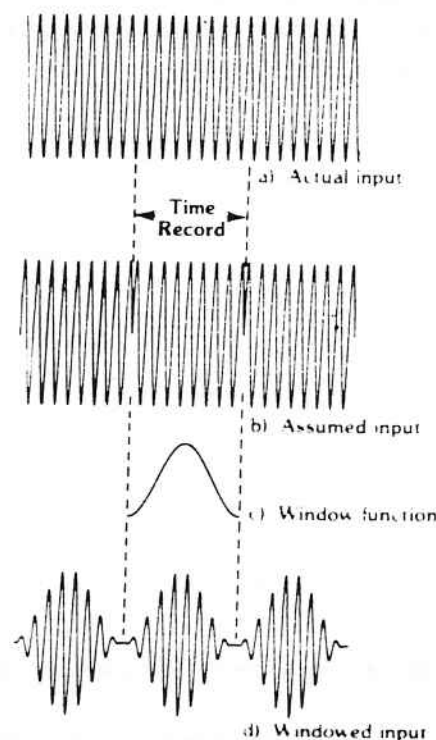


Figura 2: Efeito da janela no domínio do tempo

Uma infinidade de tipos de janela pode ser encontrado. As mais conhecidas são: Uniform (retangular), Hanning, Flattop, Blackman, Kaiser e Bessel. Como ilustração, são apresentadas algumas delas na figura 3.

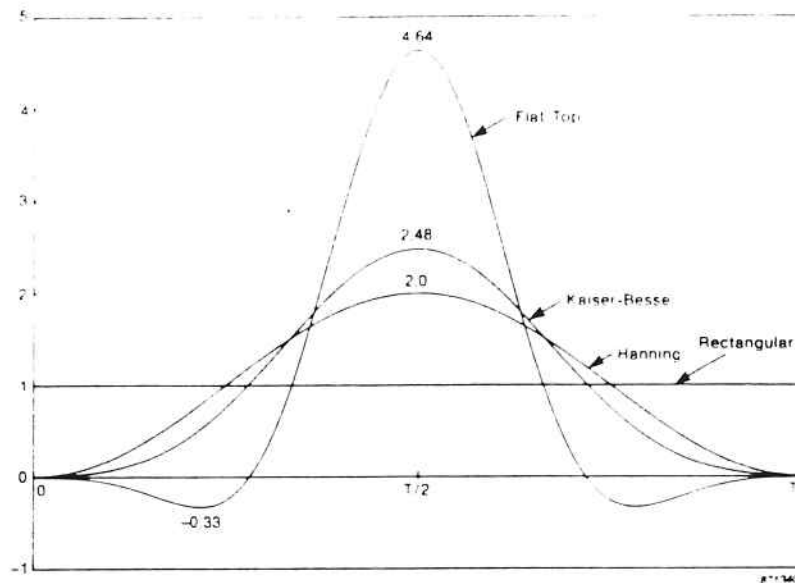


Figura 3: Janelas Retangular, Hanning, Kaiser-Bessel e Flat-Top

Cada uma das janelas possuem suas qualidades e desvantagens. Terão um melhor desempenho dependendo da aplicação. Como exemplo, na análise de sinais transitórios, se for utilizada uma janela do tipo Hanning, nota-se, figura 4, uma grande perda de informação. Neste caso específico, a janela retangular é a mais indicada.

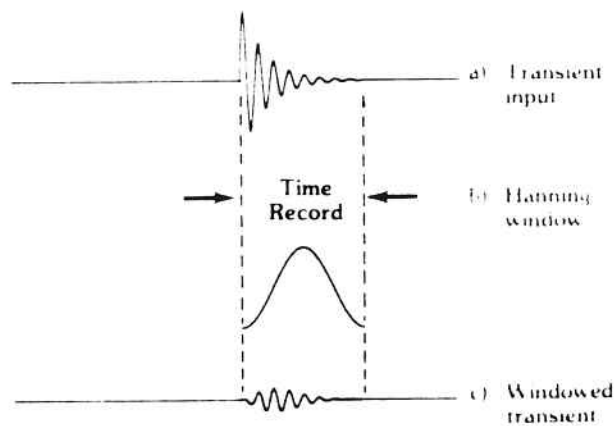


Figura 4: Perda da informação dos eventos transientes pelo janelamento

A análise do desempenho das janelas no caso de entrada senoidal é mostrada a seguir.

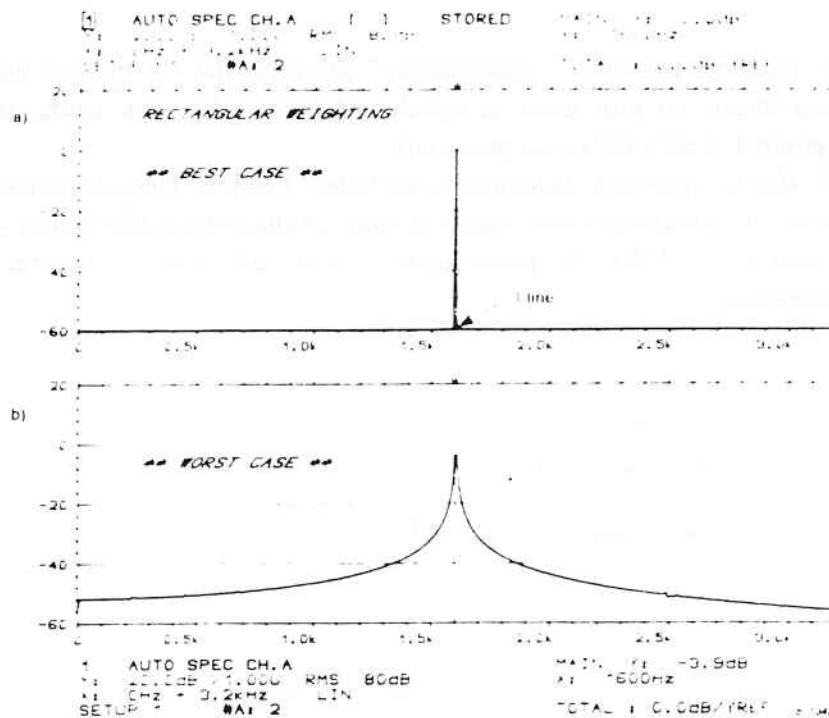


Figura 5: Melhor caso (a) e pior caso (b) da análise de uma senóide usando janela retangular.

Como é mostrado na figura 5 (acima), a janela *retangular* apresenta um ótimo resultado no caso da frequência ser múltipla (melhor caso), mas um problema de *leakage* grande para frequências não múltiplas. Atingindo 3.9 dB (37%) de atenuação e um sensível "espalhamento", no pior caso.

No caso da janela tipo *Hanning*, mostrada logo a seguir (figura 6), nota-se para este caso específico, um desempenho melhor de maneira geral.

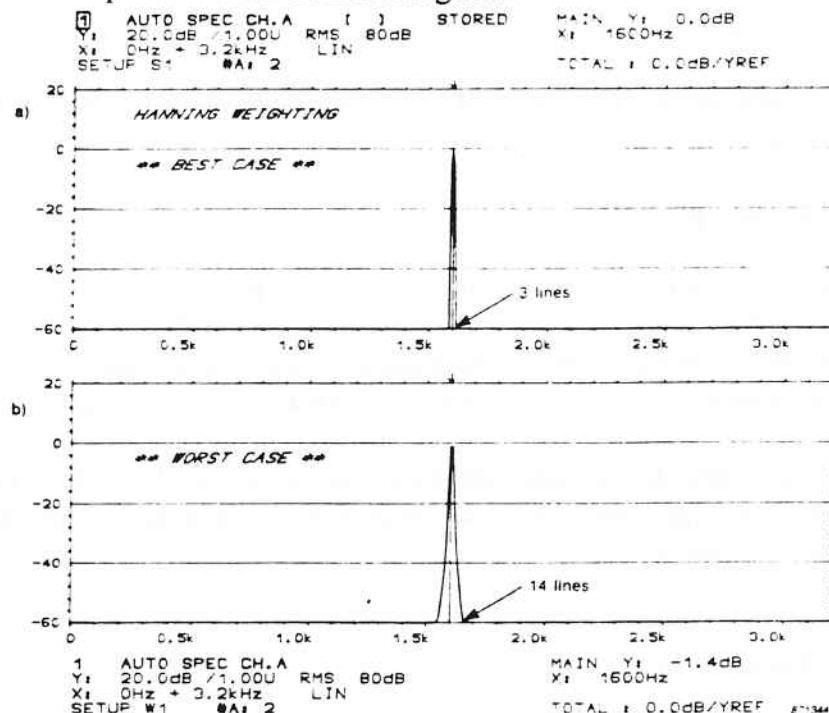


Figura 6: Melhor caso (a) e pior caso (b) da análise de uma senóide usando janela Hanning.

Apesar de notar-se um leve "espalhamento" no espectro no melhor caso, 3 linhas, este quadro não piora muito no pior caso, atingindo 14 linhas. Nota-se ainda, uma atenuação na magnitude, atingindo 1.4 dB (16%), no pior caso.

A figura 7, abaixo, mostra o desempenho da janela *Flattop*. Nota-se que apesar do espectro apresentar cerca de 10 linhas para representar o sinal, praticamente não houve atenuação entre o melhor e o pior caso (< 0.01 dB). Na parte seguinte, será dada uma visão geral das aplicações de cada janela apresentada.

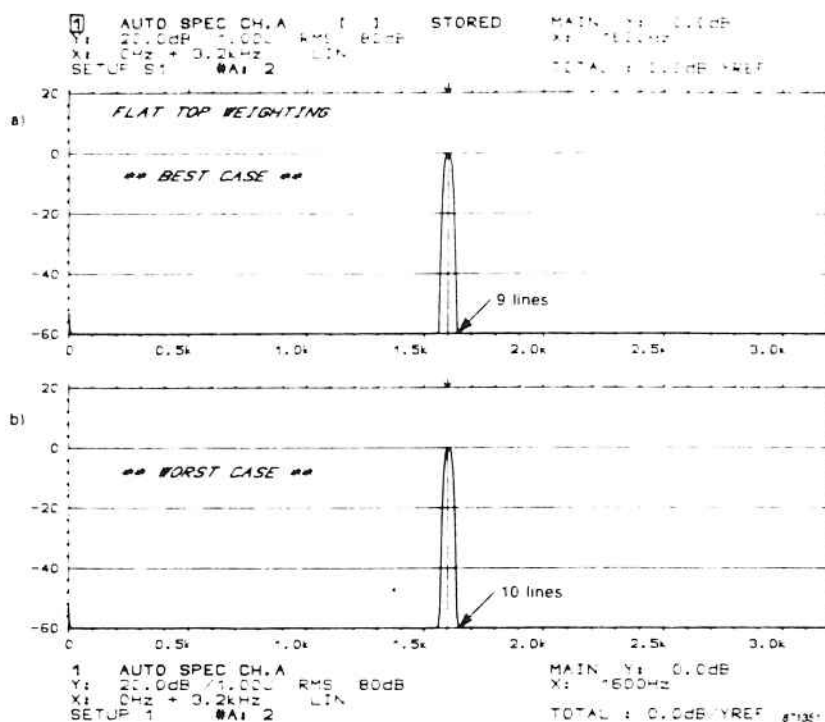


Figura 7: Melhor caso (a) e pior caso (b) da análise de uma senóide usando janela Flat Top.

4.1.1 Janelas - Áreas de aplicação

Após ter sido mostrado que a utilização de cada tipo de janela depende do tipo de aplicação, serão apresentadas as principais áreas que cada uma é utilizada.

Como visto anteriormente, a *janela retangular* é geralmente utilizada para análises de sinais transitórios, e também, de sinais aleatórios de excitação. No caso da *janela de Hanning*, há um campo muito grande de aplicações. Como exemplo, pode ser citado: análise de sinais contínuos, análise de sinais de excitação aleatória, alguns casos de sinais transitórios, entre outros. Para análise de sinais para efeito de calibração e medição de amplitude, utiliza-se principalmente a *janela Flattop*.

4.2 Resolução em Frequência

Ao analisar sinais no domínio da frequência, nos depara-se muitas vezes, com o problema de resolução em frequência. Para melhor ilustrar, é dado o exemplo apresentado a seguir.

Aplicamos a Transformada Discreta de Fourier (FFT), numa sequência constituída da somatória de quatro senóides de frequências $f_1 = 3000$ Hz, $f_2 = 3030$ Hz, $f_3 = 3060$ Hz e $f_4 = 10000$ Hz.

$$x[n] = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \sin(2\pi f_3 t) + \sin(2\pi f_4 t)$$

Sendo a frequência de amostragem 51280 Hz e uma FFT de 2048 linhas, obtém-se:

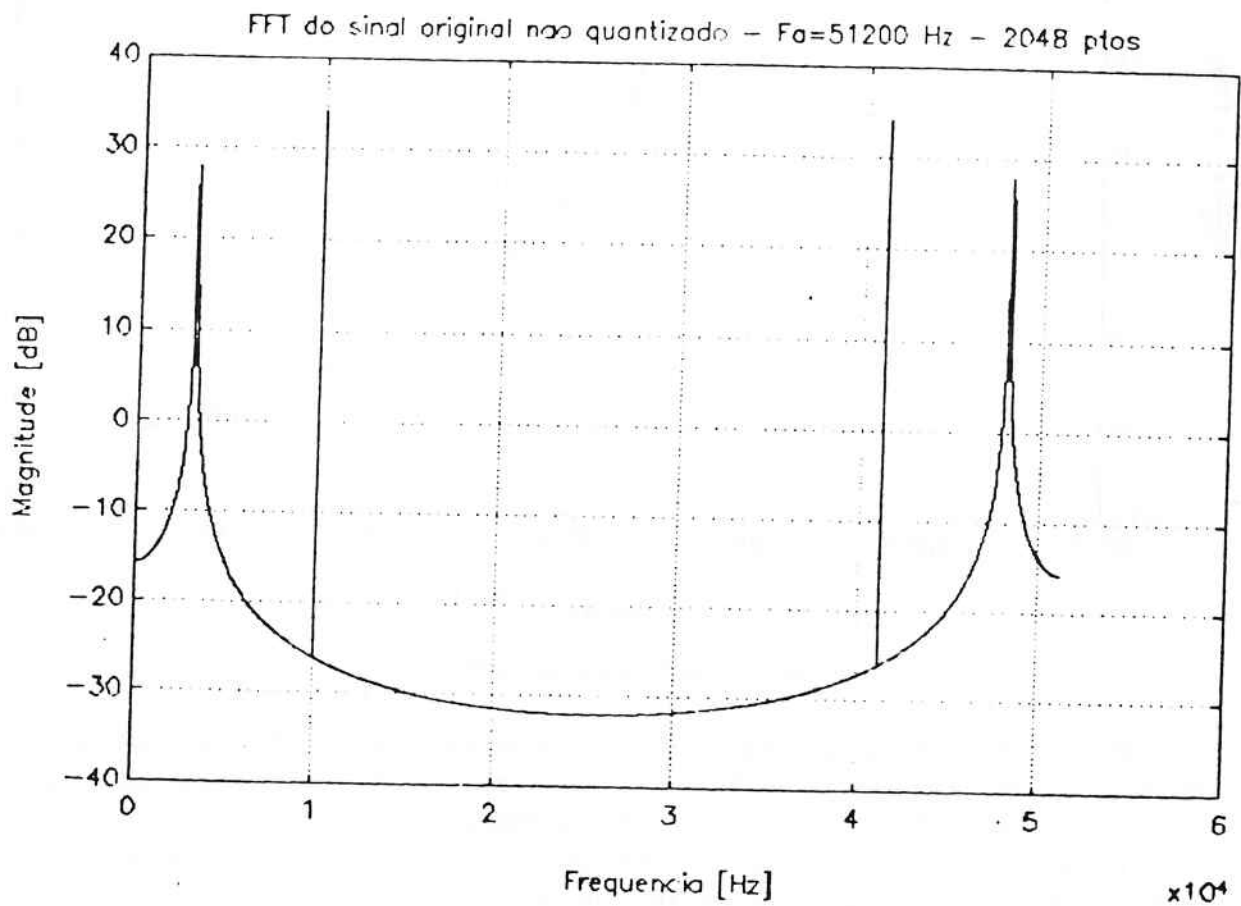


Figura 8: FFT do sinal $x[n] = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \sin(2\pi f_3 t) + \sin(2\pi f_4 t)$.

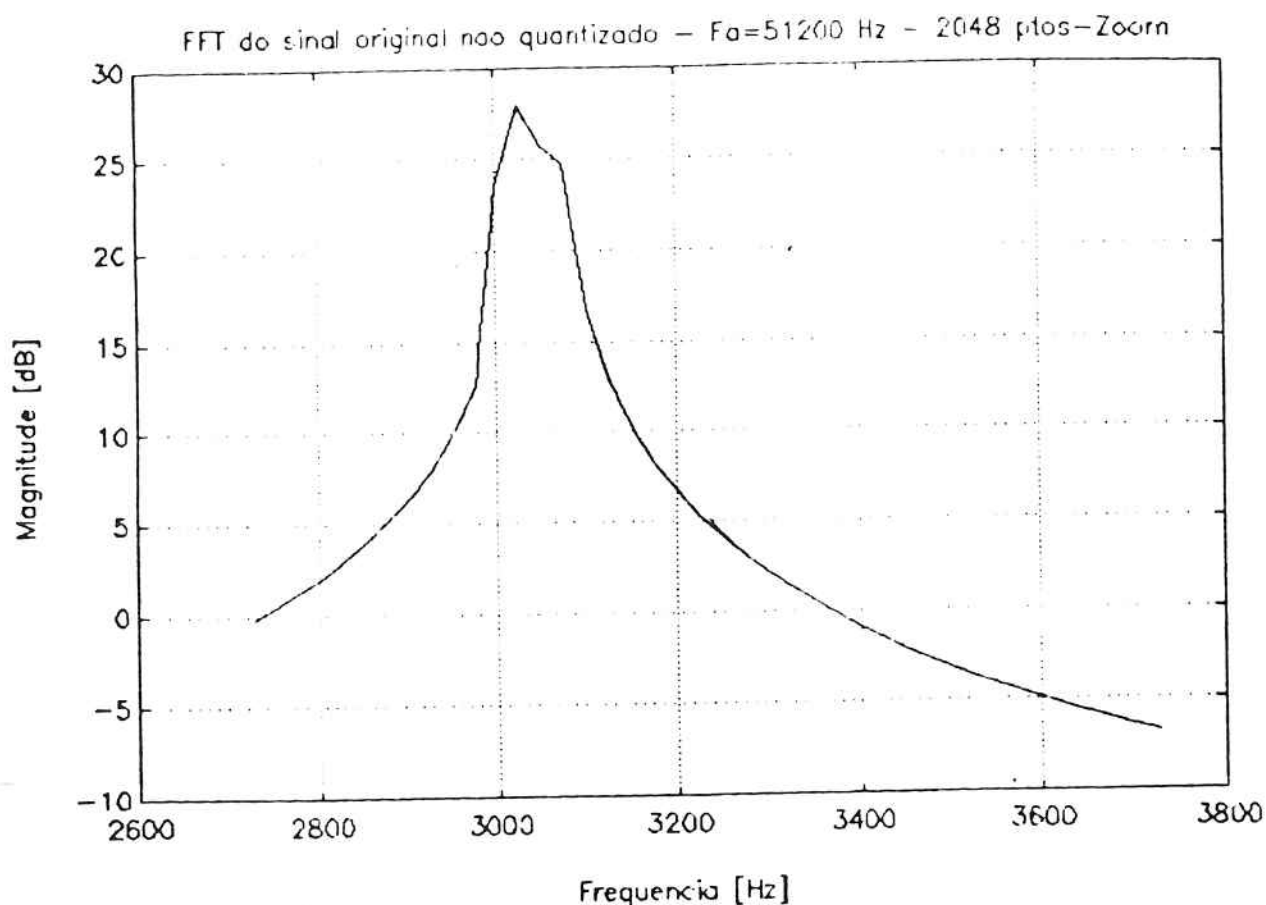


Figura 9: Zoom de trecho do gráfico da figura 8.

Se for dada a atenção num pedaço apenas do espectro (figura 9), observa-se que não se tem definição das frequências próximas. Para aumentar a resolução deste espectro, pode-se aumentar o número de linhas. Com isto, para casos onde se necessita de muita definição, "N" se tornará muito grande, ocupando muito espaço na memória para armazenar os dados, e gastando muito tempo no cálculo. Outra maneira, é reduzir a frequência de amostragem. Ou seja: reduzir a taxa de amostragem do sinal e aumentar o tempo da coleta, de tal modo que o número de pontos coletados seja mantido. É necessário entretanto, fazer uma filtragem anterior à redução da amostragem, evitando assim, o problema de *aliasing*. No espectro apresentado a seguir (figura 10), o problema é mostrado mais claramente.

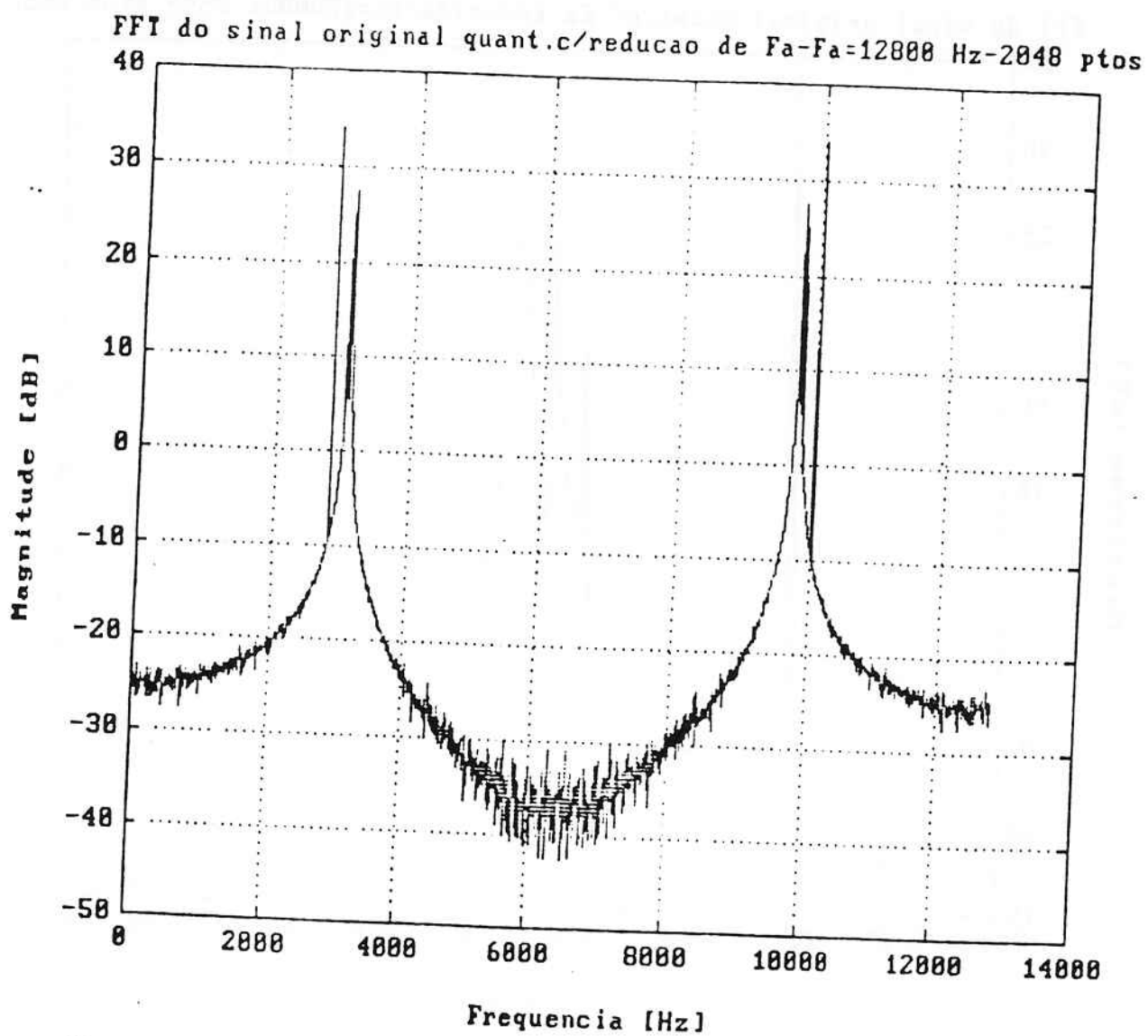


Figura 10: Sinal $x[n] = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \sin(2\pi f_3 t) + \sin(2\pi f_4 t)$ amostrado a 12800Hz.

FFT do sinal original quant.c/ Fa reduzida-Fa=12800Hz-2048 ptos-Zoor

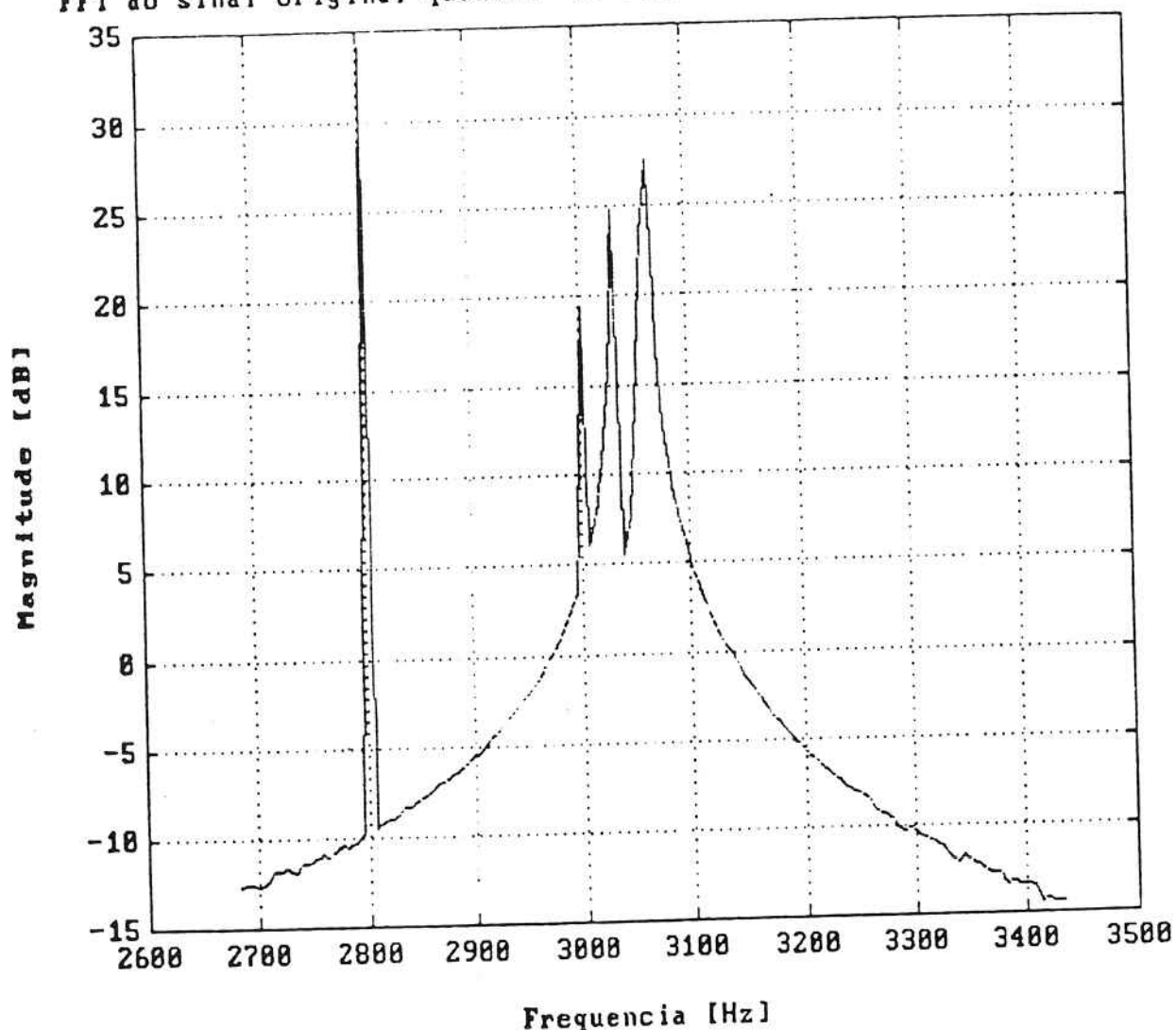


Figura 11: Zoom de um trecho do gráfico da figura 10.

Nota-se que, apesar de aumentada a resolução, a frequência de 10000 Hz aparece numa posição incorreta, devido ao problema de *aliasing*.

No caso de efetuar-se a pré-filtragem, elimina-se o problema de *aliasing* e obtém-se uma melhor resolução no espectro (figuras 12 e 13).

Quando se faz necessário uma resolução melhor, no caso de altas frequências, pode-se lançar mão de uma das propriedades da transformada, utilizando-se um *shift* em frequência.

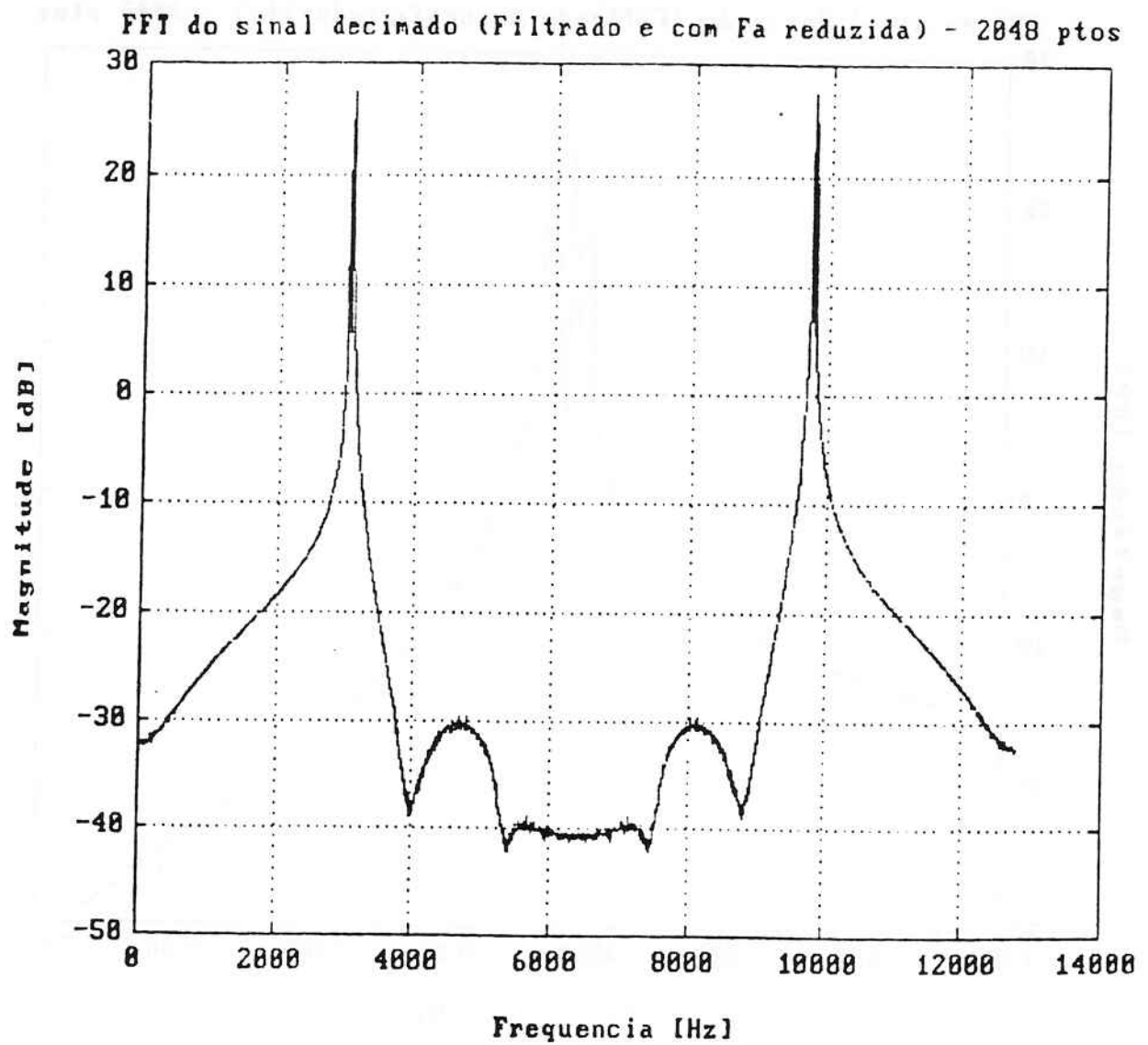


Figura 12: Sinal $x[n] = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t) + \sin(2\pi f_3 t) + \sin(2\pi f_4 t)$ filtrado para eliminar *aliasing* a frequência de amostragem mais baixa.

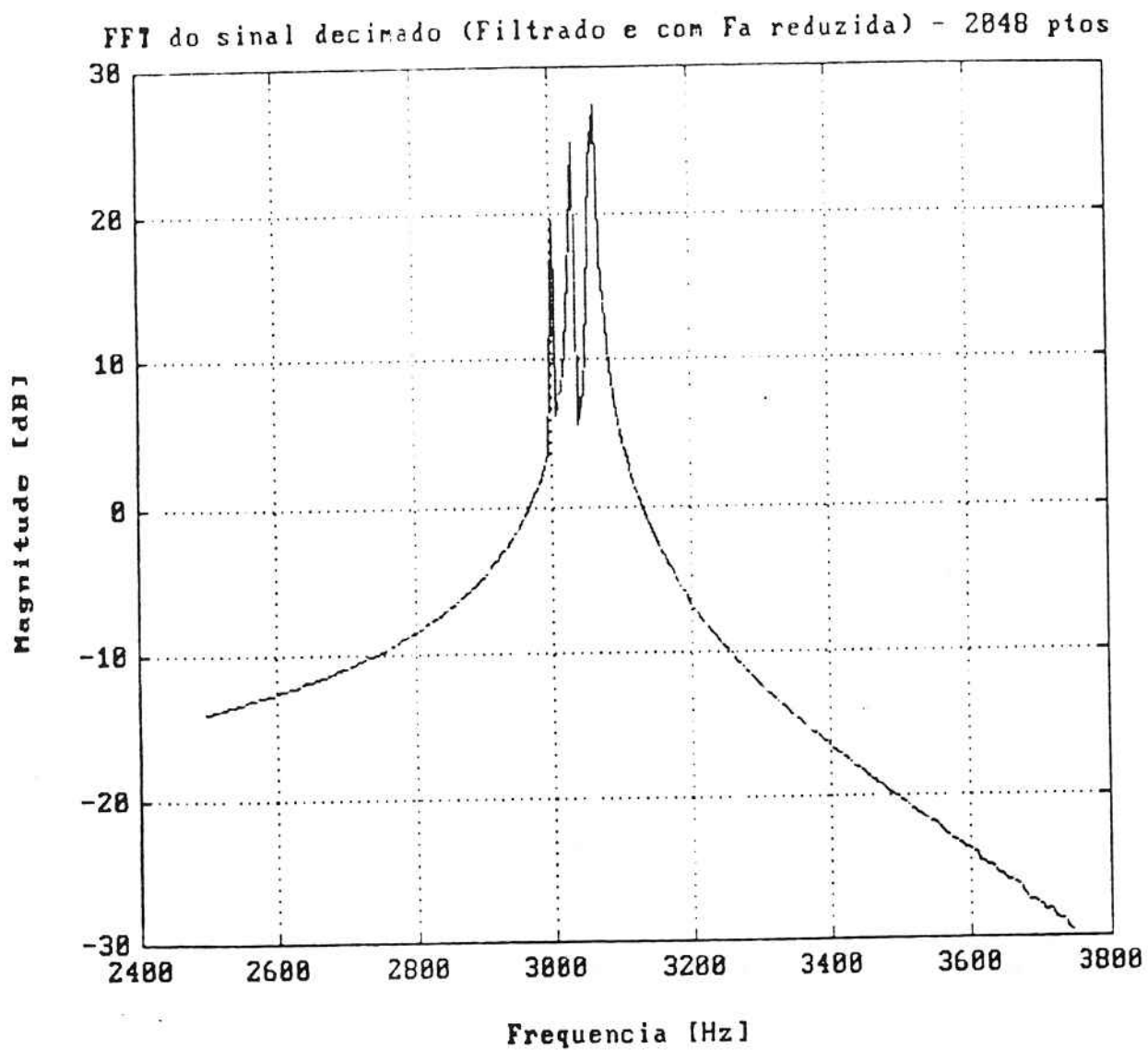


Figura 13: "Zoom" de trecho do gráfico da figura 12.

5. Referências

- [1] E.O. Brigham, *The Fourier Transform*, Prentice-Hall, 1974.
- [2] Oppenheim, A.V.; Schafer, R.W. "Discrete-Time Signal Processing" Englewood Cliffs NJ, Prentice-Hall International, 1989.
- [3] Cooley, J.W. ; Tukey, J.W. "An algorithm for the machine computation of complex Fourier series", *Mathematics of Computation*, 19, pp. 297-301, April 1965.

6. Bibliografia

- Kraniavauskas, P. "A Plain Man's Guide to the FFT", *IEEE Signal Processing Magazine*, April 1994.
- Brüel & Kjær, *Windows to FFT Analysis (part I)*, Technical Review, No. 3, 1987.
- Hewlett Packard, *The Fundamentals of Signal Analysis*, Application Note 243.
- Texas Instruments, *Digital Signal Processing Applications* (TMS320 Family), 1986.
- C.S. Burrus and T.W. Parks, *DFT/FFT and Convolution Algorithms - Theory and Implementation*, John Wiley & Sons, 1985.

BOLETINS TÉCNICOS - TEXTOS PUBLICADOS

- BT/PEE/93-01 - Oscilador a HEMT - 10 GHz - FÁTIMA S. CORRERA, EDMAR CAMARGO
- BT/PEE/93-02 - Representação Senoidal da Voz através dos Polos do Filtro Preditor - MARCELO B. JOAQUIM, NORMONDS ALENS
- BT/PEE/93-03 - Blindagens por Grades Condutoras: Cálculo do Campo Próximo - LUIZ CEZAR TRINTINALIA, ANTONIO ROBERTO PANICALI
- BT/PEE/93-04 - Sistema de Otimização e Controle de Produção em Minas de Pequeno e Médio Porte - TSEN CHUNG KANG, VITOR MARQUES PINTO LEITE
- BT/PEE/94-01 - Determinação das Frases de Aplicação Forense para o projeto NESPER e Tese de Mestrado IME/94, com Base em Estudos Fonéticos - MARCONI DOS REIS BEZERRA, EUVALDO F. CABRAL JUNIOR
- BT/PEE/94-02 - Implementação e Teste de uma Rede Neural Artificial do Tipo KSON (Kohonen Self-Organizing Network) com Entradas Bidimensionais - MARCELO YASSUNORI MATUDA, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PEE/94-03 - Transformada de Walsh e Haar Aplicadas no Processamento de Voz - ALEXANDRE AUGUSTO OTTATI NOGUEIRA, THIAGO ANTONIO GRANDI DE TOLOSA, EUVALDO F. CABRAL JÚNIOR
- BT/PEE/94-04 - Aplicação de Redes Neurais ao Problema de Reconhecimento de Padrões por um Sonar Ativo - ALEXANDRE RIBEIRO MORRONE, CRISTINA COELHO DE ABREU, EDUARDO KOITI KIUKAWA, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PEE/94-05 - Tudo que se Precisa Saber sobre a Prática da FFT - Transformada Rápida de Fourier (Inclui Software) - ROGÉRIO CASAGRANDE, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PEE/94-06 - A Survey on Speech Enhancement Techniques of Interest to Speaker Recognition - CELSO S. KURASHIMA, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PEE/94-07 - Identificação de Pulsos Decádicos em Linhas Telefônicas - ANTONIO P. TIMOSZCZUK, MÁRCIO A. MATHIAS, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PEE/94-08 - Implementação e Teste de Filtros do Tipo Adaptativo e "Notch" para a Remoção de Interferência de 60 Hz em Sinais de Eletrocardiograma - FLÁVIO ANTÔNIO MENEGOLA, JOSÉ AUGUSTO DE MATTOS, JOSÉ GOMES G. FILHO, SIDNEY SILVA VIANA, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PEE/94-09 - Compressão de Sinais de Voz utilizando Transformadas de Karhunen-Loève, Fourier e Hadamard - IVAN LUIS VIEIRA, LUIZ FERNANDO STEIN WETZEL, EUVALDO F. CABRAL JR.
- BT/PEE/94-10 - "Ray Tracing" Paralelo - EDUARDO TOLEDO SANTOS, JOÃO ANTONIO ZUFFO
- BT/PEE/94-11 - Implementação de uma Ferramenta Posicionador para "Gate-Arrays" Tipo Mar de Portas - JORGE W. PERLAZA PRADO, WILHELMUS A. M. VAN NOIJE

