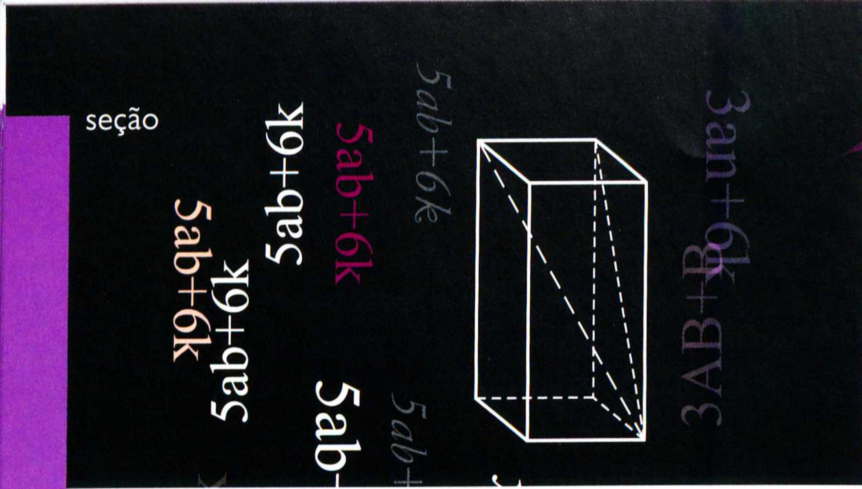
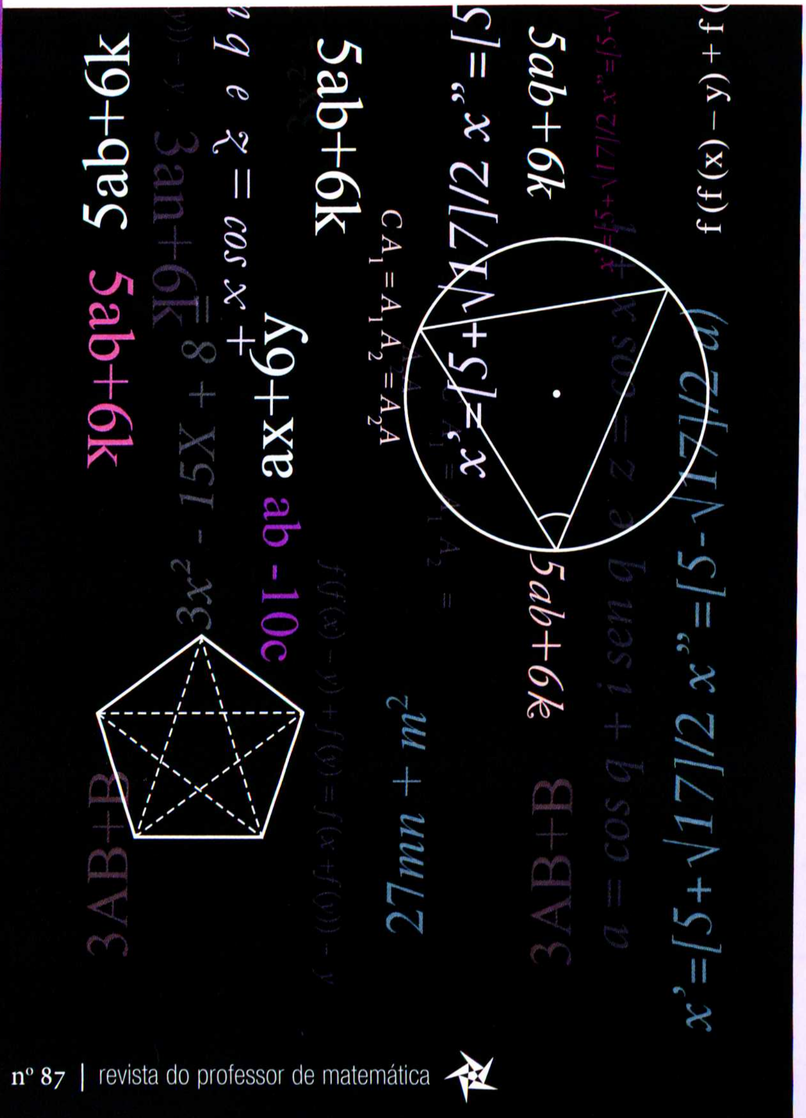
seção



PROBLEMAS

RESPONSÁVEIS
ÉLVIA MUREB SALLUM E
ANTÔNIO DE PÁDUA FRANCO FILHO
ENVIE SUAS SOLUÇÕES PARA RPM – PROBLEMAS
IME/USP – CIDADE UNIVERSITÁRIA
RUA DO MATÃO, 1010, BLOCO B, SALA 105
05508-090 – SÃO PAULO, SP



As soluções dos problemas 381 a 385 serão corrigidas apenas se enviadas até 10 de novembro de 2015.

381

Determinar, justificando, o conjunto dos números complexos z tais que

$$|z-7| + |z-2| = 5.$$

382

Seja ABC um triângulo com ângulo interno em A medindo 120^o. Se as bissetrizes do triângulo são AF, BG e CH, prove que o ângulo $G\hat{F}H$ é reto.

383

Um polinômio $p(x)$ com coeficientes inteiros é tal que $p(2)$ é divisível por 5 e $p(5)$ é divisível por 2. Prove que $p(7)$ é divisível por 10.

384

Seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}^*$ tal que

$f(x+y) \, . \, f(x-y) = [f(x) \, . \, f(y)]^2$ e $f(1) \neq 1$.

Prove que, para todo $x \in \mathbb{Z}$,

$$\log_{f(1)} f(x)$$

é um quadrado perfeito.

385

Considere uma pirâmide cuja base é um polígono regular tal que todos os ângulos (das faces) que incidem no seu vértice são iguais. Mostre que as duas faces adjacentes à menor aresta lateral da pirâmide são congruentes.

PROBLEMINHAS

1. Estamos em uma floresta em que qualquer árvore tem pelo menos uma folha e o número de árvores é maior que o número de folhas de qualquer árvore. Nessas condições, a frase a seguir é falsa ou verdadeira?

Existem pelo menos duas árvores com o mesmo número de folhas.

2. Um fazendeiro tem 600 plantas distribuídas em fileiras. Para melhor irrigação, ele precisa tirar 5 plantas de cada fileira e criar 6 novas fileiras. Quantas plantas havia em cada fileira originalmente?

$

3. Um professor de Matemática, para relaxar, vai às corridas de cavalo. No fim do primeiro páreo, ele havia dobrado seu dinheiro. Ele aposta R$ 30 no segundo páreo e triplica seu dinheiro. Aposta R$ 54 no terceiro páreo e quadriplica seu dinheiro. Aposta R$ 72 no quarto páreo e perde. Para de apostar, mas vai para casa com R$ 48. Quantos reais ele tinha no início?

$ $ $ $ $ $

Respostas na página 22

SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS PROPOSTOS NA RPM 85

371

Mostre que, se m e n são inteiros tais que 1999 divide $m^2 + n^2$, então 1999 divide m e n.

SOLUÇÃO

Inicialmente observamos que, se 1999 divide n, então divide m. De fato, como 1999 divide $m^2 + n^2$, temos $m^2 + n^2 = 1999k$ e, se $n = 1999p$, então

$$m^2 = 1999k - 1999^2p^2 = 1999\,(k - 1999p^2).$$

Assim, basta mostrar que 1999 divide n.

Suponha que 1999 não divide n.

Como 1999 é primo, existe um inteiro n' tal que

$$nn' \equiv 1 (\text{mod } 1999).$$