

Cálculo do módulo de elasticidade em vigas de madeira: método alternativo

André Luis Christoforo, Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Engenharia Civil, São Carlos, SP. e-mail: alchristoforo@yahoo.com.br

Luciano Donizeti Varanda, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Materiais, São Carlos, SP. e-mail: lu.varanda@hotmail.com

Sérgio Luiz Moni Ribeiro Filho, Universidade Federal de São João del-Rei, Departamento de Engenharia Mecânica, São João del-Rei, MG. e-mail: sergiolmrf@gmail.com

Diego Henrique de Almeida, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, São Carlos, SP. e-mail: diegoestruturas@gmail.com

Amós Magalhães de Souza, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Materiais, São Carlos, SP. e-mail: amosmag@gmail.com

Julio Cesar Molina, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Itapeva, Faculdade de Engenharia, Itapeva, SP. e-mail: molina@itapeva.unesp.br

Francisco Antonio Rocco Lahr, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, São Carlos, SP. e-mail: frocco@sc.usp.br

Resumo: Este trabalho propõe uma metodologia alternativa de cálculo fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados para a determinação do módulo de elasticidade na flexão em vigas de madeira serrada. A equação desenvolvida possibilita o uso de vários valores em forças e deslocamentos medidos durante a experimentação, conferindo maior confiabilidade sobre a variável resposta investigada. As espécies de madeiras utilizadas para o cálculo dos módulos de elasticidade são o *Pinus caribea* e o *Eucalyptus grandis*. Dez valores em forças e deslocamentos foram utilizados para o cálculo dos módulos de elasticidade, intitulados efetivos, conduzindo a nove módulos por corpo de prova. Em conjunto, os módulos de elasticidade foram obtidos também pelo emprego da metodologia de cálculo contida na norma brasileira ABNT NBR 7190:1997⁽¹⁾, permitindo-se a comparação entre ambas. Os módulos de elasticidade efetivos obtidos por corpo de prova gradativamente apresentaram uma sequência de valores convergente, conduzindo a um valor único. Os resultados do teste de hipótese entre os módulos de elasticidade efetivos com os advindos da norma apresentaram equivalência estatística, justificando-se o emprego da presente metodologia.

Palavras-chave: madeira serrada, método dos mínimos quadrados.

Calculation of module of elasticity in lumber beams: alternative method

Abstract: This paper proposes an alternative method of calculation based on the least squares method to determine the bending modulus of elasticity in lumber beams. The equation developed enables the use of multiple values of loads and displacements measured during the experiment, giving greater reliability on the response variable investigated. The *Pinus caribea* and *Eucalyptus grandis* wood was used to determine the elastic modulus. Ten forces and displacements values were used to calculate the modulus of elasticity, entitled effective, resulting in nine modulus for specimen. Together, the modulus of elasticity was also obtained by the methodology of calculation contained in the Brazilian standard ABNT NBR 7190:1997⁽¹⁾, allowing a comparison between them. The effective modulus of elasticity obtained shows a gradually converging sequence of values, leading to a single value. The results of the hypothesis test between the effective elastic modulus with the coming of the standard had similar statistics, justifying the use of this methodology.

Keywords: lumber, least squares method.

1. Introdução

Dentre os materiais de uso comum na construção civil e rural destaca-se a madeira, que do ponto de vista ambiental constitui-se como recurso renovável, requerendo baixo consumo energético para a sua produção (Soriano e Mascia, (2009)⁽²⁾; Christoforo *et al.*, (2011)⁽³⁾).

O projeto de estruturas de madeira, assim como o de outros materiais, requer o conhecimento de algumas variáveis, dentre elas, o módulo de elasticidade, obtido por intermédio de ensaios experimentais preconizados por documentos normativos nacionais e internacionais, podendo ser destrutivos ou não.

A norma brasileira ABNT NBR 7190:1997⁽¹⁾ preconiza o ensaio de flexão estática a três pontos na determinação do módulo de elasticidade (eq. 1), obtido para corpos de prova de pequenas dimensões e isentos de defeitos.

$$E_M = \frac{(F_{50\%} - F_{10\%}) \cdot L^3}{4 \cdot (\delta_{50\%} - \delta_{10\%}) \cdot b \cdot h^3} \quad (1)$$

onde:

E_M = módulo de elasticidade na flexão;

$F_{50\%}$ e $F_{10\%}$ = forças correspondentes a 10 e 50% da carga máxima aplicada ao corpo de prova;

$\delta_{50\%}$ e $\delta_{10\%}$ = os deslocamentos correspondentes a 10 e 50% da carga máxima;

b e h = correspondem respectivamente à largura e à altura da seção transversal do corpo de prova;

L = vão entre apoios.

A norma americana ASTM D 198:1997⁽⁴⁾ preconiza o ensaio de flexão estática a quatro pontos na determinação do módulo de elasticidade na flexão (E_m), expresso pela eq. 2.

$$E_m = \frac{F \cdot a \cdot (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot \delta} \quad (2)$$

onde:

F = força aplicada no limite de proporcionalidade;

a = distância entre as forças aplicadas;

δ = flecha obtida no meio do vão.

A norma americana ASTM D 3043:1995⁽⁵⁾ emprega o modelo estrutural de flexão estática a quatro pontos na determinação das propriedades de resistência e rigidez em chapas de madeira, indicando para tanto a posição de menor inércia da peça. O módulo de elasticidade calculado por esta norma, intitulado aparente (E_a), é obtido pela eq. 3.

$$E_a = \frac{a \cdot (3 \cdot L^2 - 4 \cdot a^2)}{2 \cdot b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{F_{50\%} - F_{10\%}}{\delta_{50\%} - \delta_{10\%}} \right) \quad (3)$$

onde:

$\delta_{50\%}$ e $\delta_{10\%}$ = deslocamentos correspondentes a 50 e 10% da carga máxima.

A norma americana ASTM D 4761:1996⁽⁶⁾ utiliza o ensaio de flexão estática a três pontos na obtenção do módulo elasticidade aparente (eq. 4) em chapas na posição vertical.

$$E_a = \frac{L^3}{48 \cdot I_z} \cdot \left(\frac{F_{50\%} - F_{10\%}}{\delta_{50\%} - \delta_{10\%}} \right) \quad (4)$$

onde:

I_z = momento de inércia em relação ao eixo de maior inércia "z".

Os dois métodos de cálculo propostos pelas normas ASTM D 3043:1995⁽⁵⁾ e ASTM D 4761:1996⁽⁶⁾ podem fornecer valores diferentes para o módulo de elasticidade, justificados pela intensidade e amplitude dos esforços cortantes, conduzindo a valores aparentes para os módulos de elasticidade na flexão, uma vez que o modelo de vigas utilizado no desenvolvimento das equações não contempla a parcela dos esforços cortantes (Guitard, 1987⁽⁷⁾).

Entretanto, Bodig e Jayne (1992)⁽⁸⁾ afirmam que quão maior for a relação comprimento da viga (L) pela altura da seção transversal (h), menor é a contribuição do esforço cortante no cálculo dos deslocamentos. Para relações L/h iguais ou superiores a 21 esta contribuição é praticamente desprezível (Rocco Lahr, 1983⁽⁹⁾).

A norma americana ASTM D 4761:1996⁽⁶⁾, que adota o ensaio de flexão a três pontos, preconiza que a relação L/h para o ensaio de chapas na posição vertical deve estar situada entre 17 e 21. Nestes casos, o módulo de elasticidade aparente (E_a) se aproxima do módulo de elasticidade na flexão (E_m).

A norma europeia EN 789:1995⁽¹⁰⁾ preconiza o ensaio de flexão a quatro pontos segundo o método da curvatura, registrando o deslocamento vertical no meio do vão, porém, relativo a outro ponto situado entre os de atuação do carregamento, sendo preferível um mais afastado possível do meio do vão. A interpretação dos resultados é feita a partir do registro da variação da curvatura em função das cargas aplicadas. Neste caso, obtém-se o módulo de elasticidade à flexão baseado exclusivamente na deformação por momento fletor. A eq. 5 expressa o módulo de elasticidade na flexão.

$$E_m = \left(\frac{F_{40\%} - F_{10\%}}{\delta_{40\%} - \delta_{10\%}} \right) \cdot \frac{L_1^2 \cdot L_2}{16 \cdot I_z} \quad (5)$$

onde:

L_1 = distância de referência para medição do deslocamento no vão central;

L_2 = metade do comprimento da zona de cisalhamento.

Vários são as pesquisas desenvolvidas como intuito da caracterização da madeira na flexão, quer por intermédio de ensaios destrutivos (Pigozzo; Pletz e Rocco Lahr (2000)⁽¹¹⁾; Fiorelli (2005)⁽¹²⁾; Miotto e Dias (2009)⁽¹³⁾) ou dos ensaios não destrutivos (Ross; Brashaw e Pellerin (1998)⁽¹⁴⁾; Burdzik e Nkwera (2002)⁽¹⁵⁾; Oliveira e Sales (2002)⁽¹⁶⁾; Miná *et al.* (2004)⁽¹⁷⁾; Dong e Hai (2011)⁽¹⁸⁾). Entretanto, os ensaios não destrutivos ainda são mais interessantes para o caso de peças de dimensões estruturais, permitindo o emprego da mesma depois de calculados os seus respectivos parâmetros elásticos.

Os trabalhos que contemplam o emprego da abordagem de ensaio destrutivo na caracterização da madeira, possibilitando além do cálculo dos parâmetros elásticos também os de resistência, seguem as premissas de cálculo contidas em documentos normativos, tais como os apresentados e discutidos anteriormente. Entretanto, os modelos matemáticos de cálculo destes códigos são desprovidos de metodologia baseada em critérios de otimização.

Este trabalho propõe uma metodologia analítica de cálculo fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados e no ensaio de flexão estática a três pontos para a determinação do módulo de elasticidade à flexão em corpos de prova ou peças de madeira serrada de dimensões estruturais. O emprego da abordagem analítica é feito para madeiras da espécie *Pinus caribea* e *Eucalyptus grandis*, sendo os resultados dos módulos de elasticidade obtidos comparados com os advindos da norma brasileira ABNT NBR 7190:1997⁽¹⁾, permitindo-se verificar as diferenças entre ambos.

2. Materiais e métodos

A metodologia alternativa para o cálculo do módulo de elasticidade efetivo (E_{ef}) possibilita o emprego de vários níveis consecutivos de força (F) e deslocamentos (δ) medidos durante a experimentação, sendo o melhor módulo de elasticidade ajustado de acordo com o método dos mínimos quadrados, cujo somatório dos desvios entre a nuvem de pontos e a curva a ser ajustada é o menor possível. Os desvios são constituídos pelas diferenças entre os deslocamentos experimentais com os teóricos (analíticos), advindos da resistência dos materiais, tendo o módulo de elasticidade como variável dependente. Dessa forma, elegendo-se um número finito de resultados em forças e deslocamentos da experimentação, o módulo de elasticidade da presente metodologia se ajusta a este conjunto de dados de forma única, resultando em módulos mais confiáveis à medida que o número de pontos amostrais aumenta.

A metodologia proposta emprega o ensaio estrutural de flexão estática a três pontos considerando geometria retangular para a seção transversal das peças, assim como ilustrado na fig. 1.

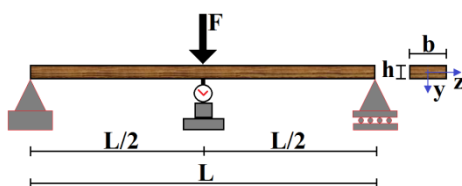


Figura 1 - Flexão estática a três pontos.

A equação para o cálculo do módulo de elasticidade efetivo (E_{ef}) é aqui apresentada para dois níveis de força e deslocamentos obtidos da experimentação, sendo generalizada posteriormente para três ou mais níveis.

Da mecânica dos sólidos, o deslocamento (δ) no ponto médio da viga do modelo estrutural ilustrado na fig. 1 é expresso pela eq. 6.

$$\delta = \frac{F \cdot L^3}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3} \quad (6)$$

onde:

E = módulo de elasticidade longitudinal ou de Young.

Definindo-se as duas medidas sucessivas de força F_1 e F_2 relacionadas aos deslocamentos δ_1 e δ_2 obtidos experimentalmente, os deslocamentos analíticos para as forças F_1 e F_2 ficam expressos pelas eqs. 7 e 8, respectivamente, escritos como função do módulo de elasticidade.

$$\delta_1(E) = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_1 \cdot L^3}{4 \cdot b \cdot h^3} \quad (7)$$

$$\delta_2(E) = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_2 \cdot L^3}{4 \cdot b \cdot h^3} \quad (8)$$

A presente metodologia fundamenta-se na ideia de mínimos quadrados (eq. 9), objetivando-se determinar o valor do módulo de elasticidade para que o resíduo gerado entre os valores dos deslocamentos analíticos ($\delta(E)_i$) e experimentais (δ_i) seja o menor possível.

$$f(E) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (\delta(E)_i - \delta_i)^2 \quad (9)$$

Substituindo-se as eqs. 7 e 8 na eq. 9 e derivando-se esta última e igualando-a a zero, chega-se ao valor do módulo de elasticidade (E_{ef}) que minimiza as diferenças entre os deslocamentos analíticos e experimentais (eq. 10), comprovando ser este ponto de mínimo global pelo critério da derivada segunda.

$$E_{ef,2} = \frac{(F_1^2 + F_2^2) \cdot L^3}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot (F_1 \cdot \delta_1 + F_2 \cdot \delta_2)} \quad (10)$$

O módulo de elasticidade para três e quatro níveis de forças e deslocamentos sucessivos medidos experimentalmente são expressos pelas eqs. 11 e 12.

$$E_{ef,3} = \frac{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2) \cdot L^3}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot (F_1 \cdot \delta_1 + F_2 \cdot \delta_2 + F_3 \cdot \delta_3)} \quad (11)$$

$$E_{ef,4} = \frac{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2) \cdot L^3}{4 \cdot b \cdot h^3 \cdot (F_1 \cdot \delta_1 + F_2 \cdot \delta_2 + F_3 \cdot \delta_3 + F_4 \cdot \delta_4)} \quad (12)$$

Para um conjunto de n forças e deslocamentos sucessivos obtidos experimentalmente, o módulo de elasticidade fica obtido pela eq. 13.

$$E_{o,n} = \frac{L^3}{4 \cdot b \cdot h^3} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (F_i^2)}{\sum_{i=1}^n (\delta_i \cdot F_i)} \quad (13)$$

As madeiras utilizadas para o cálculo dos módulos de elasticidade são o *Pinus caribea* e o *Eucalyptus grandis*, sendo avaliados oito corpos de prova para cada espécie, com dimensões médias de 5×5×110cm, respeitando-se a relação $L/h \geq 21$ definida no trabalho de Rocco Lahr (1983)⁽⁹⁾, permitindo desprezar o efeito das forças cortantes no cálculo dos deslocamentos.

Para o cálculo dos módulos de elasticidade, em cada corpo de prova ensaiado foram determinadas as forças máximas aplicadas ($F_{máx}$), sendo utilizados os valores de forças e deslocamentos respectivamente iguais a 10%, 20%, 30%, ..., 80%, 90% e 100% de $F_{máx}$, dando origem a dez valores de força (F_1 a F_{10}) e dez valores em deslocamentos (δ_1 a δ_{10}), respectivamente.

Os módulos de elasticidade foram obtidos utilizando-se os dois primeiros valores em forças (F_1 e F_2) e deslocamentos (δ_1 e δ_2) sucessivos, originando o módulo de elasticidade $E_{o,2}$, os três primeiros valores em forças e deslocamentos ($E_{o,3}$), os quatro primeiros valores em forças e deslocamentos ($E_{o,4}$) e assim sucessivamente, chegando-se ao último valor de elasticidade ($E_{o,10}$), obtido pelo emprego das dez medidas em forças e deslocamentos

escolhidos. Em conjunto, para cada corpo de prova foram também determinados os valores dos módulos de elasticidade (E_M) segundo a norma brasileira ABNT NBR 7190:1997⁽¹⁾ (eq. 1), permitindo-se a comparação entre ambos.

Ressalta-se que a madeira é um material de característica frágil, apresentando uma pequena região de comportamento não linear entre tensões e deformações antes da ruptura. Apenas com o intuito de se verificar o comportamento e as diferenças entre os valores dos módulos de elasticidade por ambas as metodologias de cálculo, foram utilizados também os valores das forças máximas e dos respectivos deslocamentos (F_{10} e δ_{10}) obtidos dos ensaios de flexão.

3. Resultados

As tabs. 1 e 2 fornecem os valores dos módulos de elasticidade efetivos (E_{ef}) para cada um dos oito corpos de prova (CP) das madeiras *Pinus caribea* e *Eucalyptus grandis*, respectivamente, sendo apresentados também os valores de elasticidade obtidos pelo emprego da norma ABNT NBR 7190:1997⁽¹⁾ (E_M).

Tabela 1 - Módulos de elasticidade para a madeira de *Pinus caribea* (MPa).

CP	E_M	$E_{ef,2}$	$E_{ef,3}$	$E_{ef,4}$	$E_{ef,5}$	$E_{ef,6}$	$E_{ef,7}$	$E_{ef,8}$	$E_{ef,9}$	$E_{ef,10}$
1	6637	6007	6022	6387	6452	6511	6559	6600	6594	6610
2	9206	8055	8458	8699	8715	8885	9002	9087	9152	9173
3	10167	9719	9843	10013	10153	10221	10226	10257	10297	10304
4	8665	7943	8553	8612	8565	8708	8896	9224	9252	9266
5	16285	8612	8758	8803	9095	9199	9228	9278	9292	9304
6	10402	9222	9456	9527	9556	9741	10025	10159	10192	10195
7	10096	9991	10490	10790	10990	11042	11110	11222	11316	11389
8	11989	8554	8982	9239	9410	9532	9966	9982	10019	10031

Tabela 2 - Módulos de elasticidade para a madeira *Eucalyptus grandis* (MPa).

CP	E_M	$E_{ef,2}$	$E_{ef,3}$	$E_{ef,4}$	$E_{ef,5}$	$E_{ef,6}$	$E_{ef,7}$	$E_{ef,8}$	$E_{ef,9}$	$E_{ef,10}$
1	13597	10401	10604	11486	11544	11700	11868	12027	12169	12239
2	15810	14822	16601	16623	16765	17155	17265	17359	17478	17501
3	19332	17057	17275	17574	18332	18715	18743	18779	18817	18884
4	11708	10485	10518	10779	10945	11060	11100	11109	11132	11136
5	12925	9232	9524	9943	10303	10596	10613	10697	10718	10732
6	13577	10607	12843	13225	13627	13977	14034	14068	14089	14103
7	19021	15454	18414	19521	20000	20235	20363	20386	20405	20422
8	13569	10365	11609	12037	12216	12576	12612	12658	12675	12702

As figs. 2 e 3 ilustram respectivamente os módulos de elasticidade apresentados nas tabs. 1 e 2 referentes às duas espécies de madeira avaliadas, indicando a convergência gradual dos valores à medida que são inseridos mais informações entre forças e deslocamentos do experimento na eq. 13, constatando-se a semelhança nos resultados entre o módulo efetivo $E_{ef,10}$ para com o da norma brasileira ABNT NBR 7190:1997⁽¹⁾.

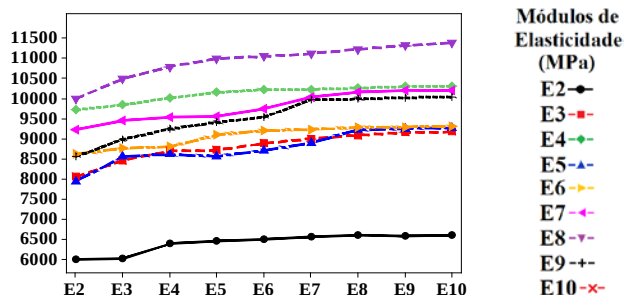


Figura 2 - Módulos de elasticidade efetivos da madeira *Pinus caribea*.

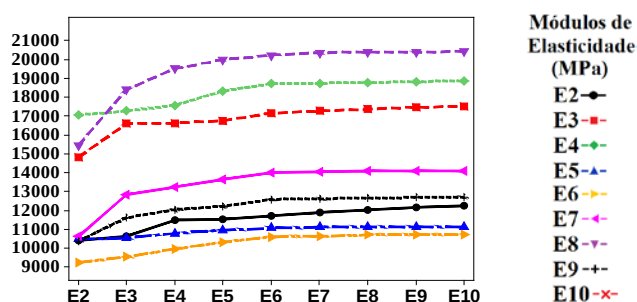


Figura 3 - Módulos de elasticidade efetivos da madeira *Eucalyptus grandis*.

Com o intuito de se verificar a equivalência estatística entre os valores dos módulos de elasticidade efetivos ($E_{ef,2}$ a $E_{ef,10}$) com os advindos da norma ABNT NBR 7190:1997⁽¹⁾ (E_M) para as duas espécies de madeira, foi-se utilizado o teste de hipótese das médias de duas populações independentes, sendo os resultados obtidos apresentados nas tabs. 3 e 4, comprovando equivalência estatística aos P-valores superiores a 0,05 (5% de significância) ou pela pertinência do zero aos intervalos de confiança encontrados (Montgomery, 2005⁽¹⁹⁾).

Tabela 3 - Teste de hipóteses entre os módulos de elasticidade das madeiras de *Pinus caribea*.

Teste de hipóteses	Desvio Padrão (MPa)	Média (MPa)	P-valor	Intervalo de confiança
Teste t: E_M	10431	2826	0,113	$-4389,81 \leq \mu \leq 553,81$
	$E_{0,2}$	8513		
Teste t: E_M	10431	2826	0,178	$-4106,96 \leq \mu \leq 885,71$
	$E_{0,3}$	8820		
Teste t: E_M	10431	2826	0,231	$-3898,03 \leq \mu \leq 1075,03$
	$E_{0,4}$	9019		
Teste t: E_M	10431	2826	0,267	$-3807,47 \leq \mu \leq 1191,47$
	$E_{0,5}$	9123		
Teste t: E_M	10431	2826	0,307	$-3696,13 \leq \mu \leq 1301,38$
	$E_{0,6}$	9234		
Teste t: E_M	10431	2826	0,365	$-3520,59 \leq \mu \leq 1416,84$
	$E_{0,7}$	9379		
Teste t: E_M	10431	2826	0,410	$-3423,030 \leq \mu \leq 1517,03$
	$E_{0,8}$	9478		
Teste t: E_M	10431	2826	0,430	$-3393,259 \leq \mu \leq 1562,509$
	$E_{0,9}$	9516		
Teste t: E_M	10431	2826	0,440	$-3376,887 \leq \mu \leq 1584,887$
	$E_{0,10}$	9535		

Tabela 4 - Teste de hipóteses entre os módulos de elasticidade das madeiras de *Eucalyptus grandis*.

Teste de hipóteses		Desvio Padrão (MPa)	Média (MPa)	P-valor	Intervalo de confiança
Teste t:	E_M	2847	14942	0,093	$-5783,57 \leq \mu \leq 504,57$
	$E_{0,2}$	2973	12303		
Teste t:	E_M	2847	14942	0,357	$-4956,74 \leq \mu \leq 1918,99$
	$E_{0,3}$	3486	13424		
Teste t:	E_M	2847	14942	0,527	$-4513,09 \leq \mu \leq 2425,34$
	$E_{0,4}$	3539	13899		
Teste t:	E_M	2847	14942	0,666	$-$ $4275,009 \leq \mu \leq 2823,259$
	$E_{0,5}$	3672	14217		
Teste t:	E_M	2847	14942	0,794	$-4015,550 \leq \mu \leq 3134,3$
	$E_{0,6}$	3715	14502		
Teste t:	E_M	2847	14942	0,828	$-$ $3951,406 \leq \mu \leq 3216,156$
	$E_{0,7}$	3729	14575		
Teste t:	E_M	2847	14942	0,856	$-$ $3882,432 \leq \mu \leq 3268,432$
	$E_{0,8}$	3716	14635		
Teste t:	E_M	2847	14942	0,879	$-$ $3806,473 \leq \mu \leq 3351,473$
	$E_{0,9}$	3716	14635		
Teste t:	E_M	2847	14942	0,893	$-$ $3806,473 \leq \mu \leq 3351,473$
	$E_{0,10}$	3721	14715		

Através do teste de hipótese pode-se constatar, com 95% de confiança, a equivalência estatística entre os módulos de elasticidade.

A fig. 4 apresenta os gráficos residuais dos módulos de elasticidade obtidos da norma brasileira ABNT NBR 7190:1997⁽¹⁾ para as duas espécies de madeira estudadas, a fim de verificar se as amostras estão em conformidade com os pressupostos do teste de hipótese. No emprego do procedimento do teste de hipótese parte-se da premissa de que ambas as amostras são extraídas a partir de populações independentes, descritas por uma distribuição normal, e que o desvio padrão ou variações das populações são iguais (Montgomery, 2005⁽¹⁹⁾). Observa-se que os pontos distribuídos uniformemente ao longo das retas atendem as condições de normalidade e homogeneidade exigidas para validação do referido teste.

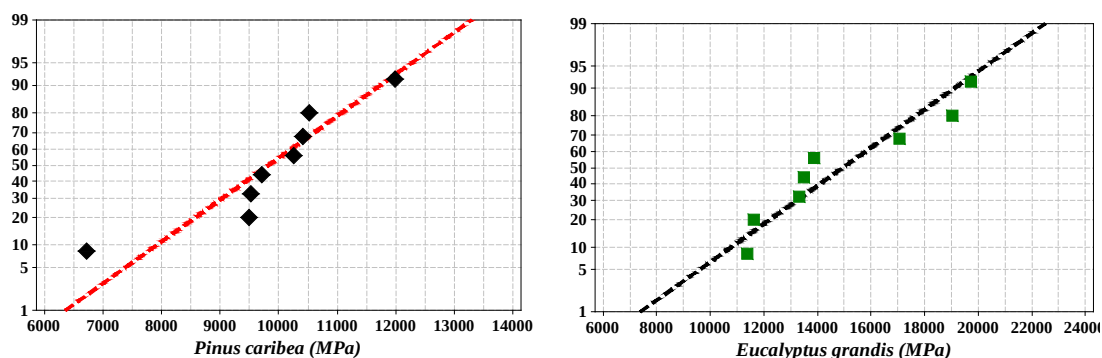


Figura 4 - Gráfico residual dos módulos de elasticidade (E_M) para as madeiras de *Pinus caribaea* e *Eucalyptus grandis*.

A fig. 5 exibe o intervalo de confiança dos módulos de elasticidade. Constata-se para ambas as espécies de madeira que o valor médio do módulo obtido pela norma foi superior ao

módulo efetivo $E_{ef,10}$ da presente metodologia, sendo de 8,39% e 1,55% a diferença entre ambos para as madeiras *Pinus caribaea* e *Eucalyptus grandis*, respectivamente.

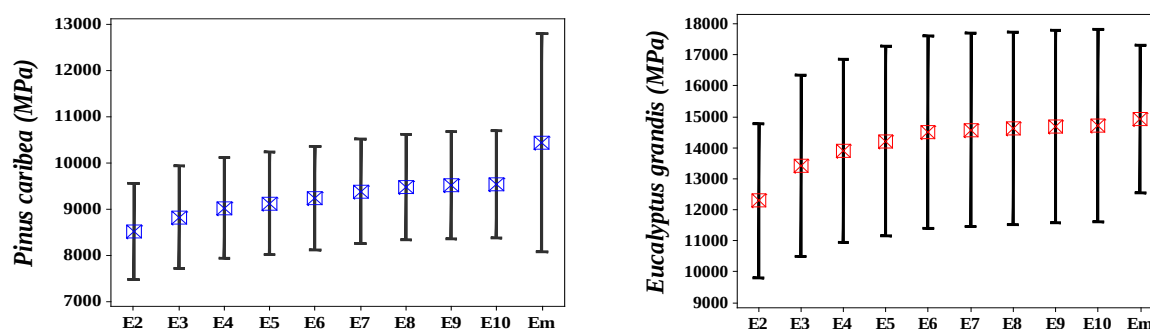


Figura 5 - Intervalos de confiança dos módulos de elasticidade das madeiras *Pinus caribaea* e *Eucalyptus grandis*.

A tab. 5 apresenta os valores médios e os limites inferior (LI) e superior (LS) obtidos para os módulos de elasticidade ilustrados na fig. 5.

Tabela 5 - Valores médios e extremos dos módulos de elasticidade calculados pelas abordagens de cálculo.

	<i>Pinus caribaea</i>			<i>Eucalyptus grandis</i>		
	LI	Média	LS	LI	Média	LS
E ₂ (MPa)	7466	8512	9559	9817	12302	14788
E ₃ (MPa)	7711	8820	9928	10509	13423	16337
E ₄ (MPa)	7935	9019	10103	10940	13898	16857
E ₅ (MPa)	8006	9122	10238	11146	14216	17286
E ₆ (MPa)	8119	9233	10347	11396	14501	17607
E ₇ (MPa)	8246	9379	10511	11456	14574	17692
E ₈ (MPa)	8341	9477	10613	11529	14635	17741
E ₉ (MPa)	8360	9515	10670	11578	14685	17792
E ₁₀ (MPa)	8372	9534	10697	11603	14714	17826
E _M (MPa)	8068	10330	12793	12562	14942	17332

4. Conclusões

A presente metodologia permite a obtenção do módulo de elasticidade na flexão em corpos de prova ou peças de madeira serrada de dimensões estruturais com maior confiabilidade quando comparada as metodologias de cálculo presentes nos documentos normativos, por estar fundamentada em conceitos de otimização, possibilitando o emprego de várias medidas entre forças e deslocamentos sucessivos.

O atendimento à relação entre o comprimento e altura da seção transversal ($L/h \geq 21$) apresentada no trabalho de Rocco Lahr (1983)⁽⁹⁾ permitiu o uso apropriado da teoria de vigas de Euler Bernoulli, utilizada no cálculo dos módulos de elasticidade, possibilitando também o emprego do modelo estrutural de flexão estática a três pontos por desconsiderar o efeito das forças cisalhantes no cálculo dos deslocamentos.

O emprego sucessivo das proporções da força máxima possibilitou demonstrar à convergência dos valores dos módulos de elasticidade obtidos da metodologia alternativa, indicando a pequena influência da região não linear no seu cálculo uma vez que os resultados entre as abordagens analíticas revelaram equivalências estatísticas entre ambos. Ressalta-se que o método poderia ser empregado e comparado apenas com os limites das

forças estipuladas pela norma brasileira ABNT NBR 7190:1997⁽¹⁾ ($F_{10\%}$ e $F_{50\%}$), ou para quaisquer outros subintervalos de resposta elástica do material, podendo-se utilizar uma quantidade de informações entre forças e deslocamentos maiores do que a utilizada no presente trabalho.

Os resultados entre os módulos de elasticidade oriundos do emprego da equação da norma brasileira ABNT NBR 7190:1997⁽¹⁾ (E_M) e os provenientes da abordagem aqui proposta ($E_{ef,2}$ a $E_{ef,10}$) foram ambos estatisticamente equivalentes, constatando a semelhança entre as metodologias de cálculo utilizadas. Entretanto, a diferença de 8,39% entre os módulos E_M e $E_{ef,10}$ encontrada para as madeiras de *Pinus caribea* mostram-se significantes em termos de projeto de estruturas, podendo ser estas diferenças maiores ou menores dependendo das madeiras utilizadas, justificando-se dessa forma o emprego da presente metodologia.

5. Referências

(1) Associação Brasileira de Normas Técnicas (1997). *NBR 7190 - Projeto de estruturas de madeira*. Rio de Janeiro.

(2) Soriano, J; Mascia, N.T. Estruturas mistas em concreto-madeira: uma técnica racional para pontes de estradas vicinais. *Ciência Rural*, v.39, n.4, p.1260-1269, 2009.

(3) Christoforo, A.L.; Panzera, T.H.; Batista, F.B.; Borges, P.H.; Rocco Lahr, F.A. Numerical evaluation of the longitudinal modulus of elasticity in structural round timber of Eucalyptus genus. *Revista Engenharia Agrícola*, v. 31, p. 1007-1014, 2011.

(4) American Society for Testing and Materials (1997). *ASTM D 198 - Standard test method of static tests of lumber in structural sizes*. Philadelphia.

(5) American Society for Testing and Materials (1995). *ASTM D 3043 - Standard methods of testing structural panels in flexure*. Philadelphia.

(6) American Society for Testing and Materials (1996). *ASTM D 4761 - Standard test methods for mechanical properties of lumber and wood-base structural material*. Philadelphia.

(7) Guitard, D. (1987). *Mécanique du matériau bois et composites*. Cepadues-editions. France.

(8) Bodig, J.; Jayne, B.A. (1992). *Mechanics of wood and wood composites*. Krieger Publishing Company. Malabar, Florida.

(9) Rocco Lahr, F.A. (1983). *Sobre a determinação de propriedades de elasticidade da madeira*. São Carlos. 216f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

(10) European Standard (1995). *EN 789 - Estruturas de Madeira - Métodos de teste - Determinação das propriedades mecânicas de painéis derivados de madeira*. European Standard (versão portuguesa). Bruxelas.

(11) Pigozzo, J.C.; Pletz, E.; Rocco Lahr, F.A. Aspectos da classificação mecânica de peças estruturais de madeira. In: ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, 7, São Carlos, 2000. *Anais*. São Carlos.

- (12) Fiorelli, J. (2005). *Estudo teórico e experimental de vigas de madeira laminada colada reforçadas com fibra de vidro*. 108 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- (13) Miotto, J.L.; Dias, A.A. Produção e avaliação de vigas de madeira laminada colada confeccionadas com lâminas de Eucalipto. *Revista Tecnológica*, Ed. Especial ENTECA, p. 35-45, 2009,
- (14) Ross. R.J.; Brashaw, B.K.; Pellerin, R.F. Nondestructive evaluation of wood. *Forest Products Journal*, v. 48, n. 1, p. 14-19, 1998.
- (15) Burdzik, W.M.G.; Nkwera, P.D. Transverse vibration tests for prediction of stiffness and strength properties of full size Eucalyptus grandis. *Forest Products Journal*, v. 52, n. 6, p. 63-67, 2002.
- (16) Oliveira, F.G.R.; Sales, A. Ultrasonic measurements in Brazilian hardwood. *Materials Research*, v. 5, n. 1, p. 51-55, 2002.
- (17) Miná, A.J.S.; Oliveira, F.G.R.; Calil Jr., C.; Dias, A.A.; Sales, A. Avaliação não destrutiva de postes de madeira por meio de ultra-som. *Scientia Forestalis*, n.65, p. 188-196, 2004.
- (18) Dong, X.H.; Hai, W.L. Comparative study on four different methods for measuring the dynamic modulus of elasticity of Acer mono wood. *Advanced Materials Research*, v. 160-162, p. 384-388, 2011.
- (19) Montgomery, D.C. (2005). *Design and analysis of experiments*. 6. ed. Arizona, John Wiley & Sons Inc.

