

TESE DE CONCURSO PARA O PROVIMENTO
DA AULA DE
CÁLCULO DE OBSERVAÇÕES E ESTATÍSTICA.
CÁLCULO GRÁFICO E MECÂNICO. NOMOGRAFIA.
DA ESCOLA POLITÉCNICA DE SÃO PAULO.

JULHO DE 1940

CÁLCULO OPERATÓRIO

POR
AFFONSO P. DE TOLEDO PIZA
PROFESSOR INTERINO DA AULA DE
CÁLCULO DE OBSERVAÇÕES E ESTATÍSTICA.
CÁLCULO GRÁFICO E MECÂNICO. NOMOGRAFIA,
DA
ESCOLA POLITÉCNICA DE S. PAULO.

IMPRESSÃO
TIPOGRAFIA SIQUEIRA

1940



FT-293

DEDALUS - Acervo - EPBC



31200030821

517(018)
P689c
ft e.1

FT-293

PREFACIO

Ao escolher para assunto de tese o Cálculo Operatório — uma das partes do programa por nós elaborado para a Aula de Estatística e Cálculo das Observações. Cálculo Gráfico e Mecânico. Nomografia e aprovado pela Douta Congregação da Escola Politécnica de S. Paulo —, tivemos o objetivo de destacar do nosso curso uma das mais importantes, a nosso ver, a saber aquela que lida com as expressões numéricas de forma simbólica, utilizando as relações de posição que entre elas existem e que se traduzem do ponto de vista do cálculo propriamente numérico em operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de grandezas escalares, executadas em sequências determinadas pela natureza das operações simbolizadas.

No estudo destas operações, tivemos em mira reduzi-las todas a uma forma de correspondência entre duas séries de grandezas, ligadas por relações proposicionais R e $\check{R}$, no sentido de Bertrand Russel. Alguns exemplos esclarecem os conceitos desenvolvidos na parte teórica e elucidam o espirito do método.

O A.

BIBLIOGRAFIA

STEFFENSON — Some Recent Researches on the Theory of Statistics
and Actuarial Science.

— Interpolation.

BATEMAN — Differencial and Integral calculus for actuarial
Students.

R. BAIRE — Théories Générales de l'Analyse.

CÁLCULO OPERATÓRIO

PARTE PRIMEIRA

Cálculo das operações. Cálculo das diferenças finitas, centrais, repetidas e divididas. Operadores E , D , Θ etc. . Fórmulas de expansão.

CAPÍTULO PRIMEIRO

1. Noção de correspondência.
2. Caracteres gerais dos operadores.
3. Operadores fundamentais do cálculo operatório.
Operador de deslocamento E .
Operador de diferenciação finita.
Operador de expansão.
Operador ∇ .
Operador D .
Operador $\square$.
Operador δ .
4. Relações entre os operadores Δ e D .
5. Relações entre os operadores $\square$ e δ .

CAPÍTULO SEGUNDO

DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Generalidades.

1. O operador Θ_p .
- 2-5 Diferenças divididas. Propriedades e expressões diversas.
Fórmula do binômio de Newton.

CAPÍTULO TERCEIRO

EXPRESSÕES PARTICULARES DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Generalidades.

1. Caso em que todos os argumentos são nulos, a exceção de um.
2. Caso em que todos os argumentos são nulos.
3. Caso em que os argumentos estão ordenados.
4. Caso em que os argumentos são forma $a_v = v$.
5. Caso em que os argumentos são da forma $a_v = -v$.
6. Cálculo metódico das diferenças divididas.
7. Funções produtos de argumentos entre si.
8. Caso em que os argumentos são da forma $a_{2v-1} = -v$ e $a_{2v} = v$.
9. Caso em que os argumentos são da forma $a_{2v-1} = v$ e $a_{2v} = -v$.

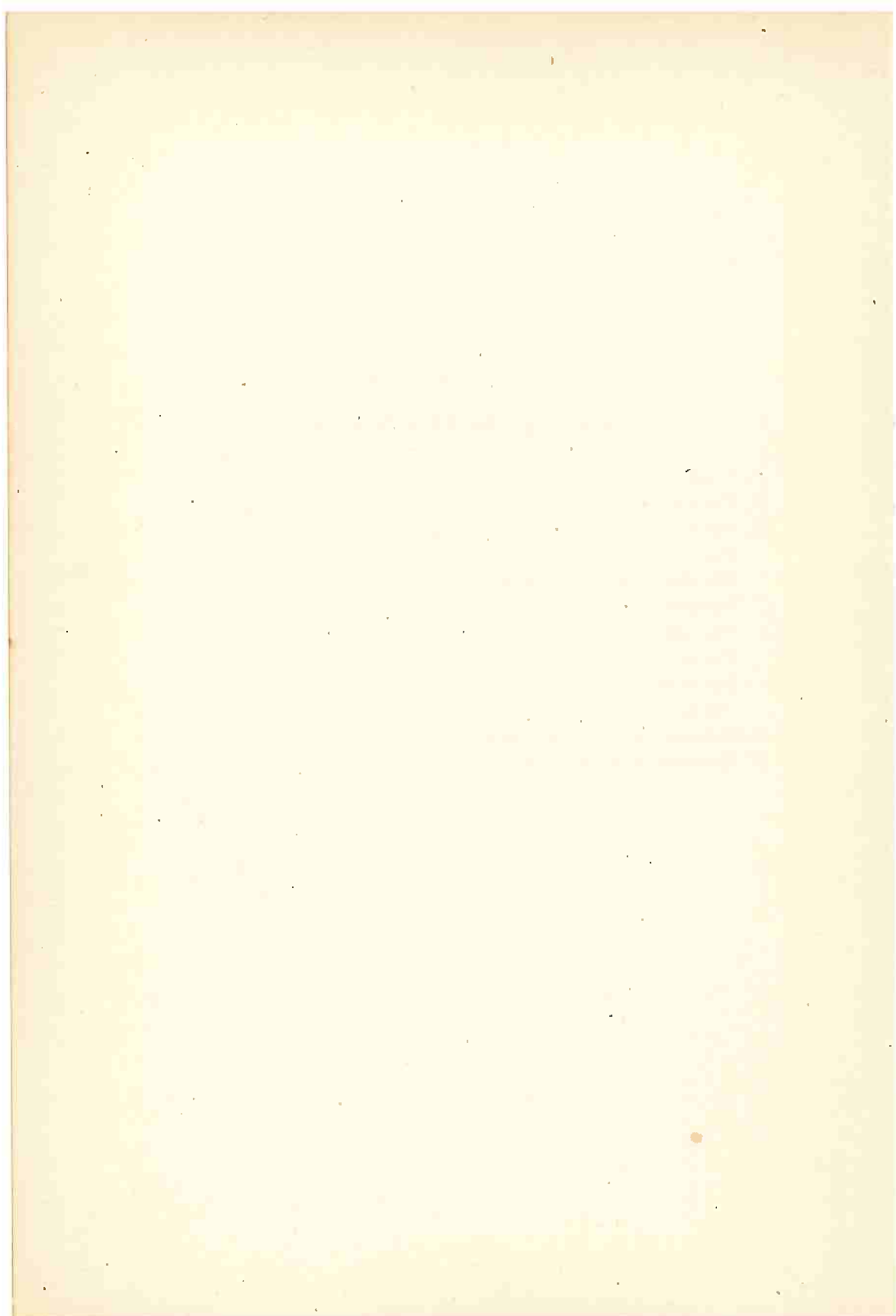
CAPÍTULO QUARTO

FÓRMULAS DE EXPANSÃO

1. Generalidades.
2. Operadores.

CAPÍTULO PRIMEIRO
CÁLCULO OPERATÓRIO

1. Noção de correspondência.
2. Caracteres gerais dos operadores.
3. Operadores fundamentais do cálculo operatório.
 - Operador de deslocamento E .
 - Operador de diferenciação finita.
 - Operador de Expansão.
 - Operador ∇ .
 - Operador D .
 - Operador $\square$.
 - Operador $\hat{z}$.
4. Relações entre os operadores Δ e D .
5. Relações entre os operadores $\square$ e $\hat{z}$.



CAPÍTULO PRIMEIRO

CÁLCULO OPERATÓRIO

NOÇÃO DE CORRESPONDÊNCIA

Consideremos duas séries de grandezas

$$(1) \quad X_1, X_2, \dots, X_n.$$

$$(2) \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_n.$$

Entre estas séries de grandezas existem duas relações proposicionais do tipo :

$$(3) \quad Y_i R X_i \text{ e } X_i \tilde{R} Y_i,$$

válidas qualquer que seja i .

As duas séries (1) e (2) acham-se definidas, não pelas suas sequências, mas pelo conjunto das relações (3), que se verificam entre seus termos.

A primeira relação (3) faz corresponder à grandeza X_i da 1.ª série uma grandeza Y_i da 2.ª. Representando esta relação R por uma operação efetuada sobre X_i para se obter Y_i e, designando esta operação por φ , podemos escrever

$$(4) \quad Y_i = \varphi X_i$$

A segunda relação (3) faz corresponder à grandeza Y_i a sua correspondente X_i na relação R . Representando esta segunda operação por Ψ , podemos escrever

$$(5) \quad X_i = \Psi Y_i.$$

Estas operações, φ e a sua recíproca Ψ , envolvendo sempre as duas grandezas X_i e Y_i , estabelecem relações de posição entre X_i e Y_i . Assim dizemos que X_i é, na operação direta, a

grandeza operada ou o argumento e Y_i o resultado da operação e, vice-versa, para Ψ . φ e Ψ são também chamados operadores.

Dizemos ainda que há produto lógico de duas operações φ e Θ , na ordem $\varphi \Theta$, sendo φ e Θ dois operadores quaisquer, quando o resultado da operação Θ é o argumento da operação φ .

Se levarmos na relação (4) o valor de X_i dado por (5) e na relação (5) o valor de Y_i dado por (4), obtemos então os produtos lógicos

$$Y_i = \varphi \Psi Y_i$$

$$X_i = \Psi \varphi X_i.$$

Os símbolos $\varphi \Psi$ e $\Psi \varphi$, o primeiro aplicado aos Y_i e o segundo aos X_i , traduzem operações de efeito nulo, pois fazem corresponder Y_i a cada Y_i e X_i a cada X_i ; o seu efeito é equivalente ao operador de multiplicação por 1 :

$$(6) \quad \begin{aligned} \varphi \Psi &= 1 \\ \Psi \varphi &= 1 \end{aligned}$$

Destas relações, tiramos por divisão convencional ou simbólica

$$\begin{aligned} \Psi &= \varphi^{-1} \\ \varphi &= \Psi^{-1} \end{aligned}$$

donde para Y_i e X_i as expressões

$$\begin{aligned} Y_i &= \varphi X_i \\ X_i &= \varphi^{-1} Y_i. \end{aligned}$$

Dadas as operações φ e φ^{-1} , é possível que existam certas grandezas, em número finito ou infinito, designadas globalmente por

$$X^* \text{ e } Y^*,$$

tais que tenhamos sempre

$$\begin{aligned}\varphi X^* &= 0 \\ \varphi^{-1} Y^* &= 0.\end{aligned}$$

Estas grandezas X^* e Y^* recebem o nome de grandezas ópero-nulas relativamente às operações φ e φ^{-1} respetivamente.

CARATERES GERAIS DOS OPERADORES

Os operadores podem ser classificados :

- 1) quanto à natureza das operações a que se referem :
podem ser operadores escalares, algébricos ou transcendentés,
e operadores não-escalares ou de posição.

Na primeira categoria incluimos todas as expressões analíticas funcionais, tais como aquelas que resultam da aplicação das operações fundamentais a expressões monômias, algébricas ou transcendentés, dependentes apenas do valor do argumento.

Na segunda categoria, colocamos todos aqueles operadores que, além dessas operações, apresentam outras, dependentes da posição da grandeza operada na sua série.

- 2) quanto à natureza das relações dos operadores entre si :
Essas relações são de duas espécies :

- a) de um operador para o argumento de outro operador
- b) de um operador para outro operador.

Na classe a, incluimos as propriedades gerais de distributividade, total ou parcial, e, em b, as de comutatividade e associatividade das operações.

- 3) quanto à forma : podem ser operadores definidos por relações explícitas ou implícitas, resolúveis ou não.

OPERADORES FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO OPERATÓRIO

Operador de Deslocamento E.

Se na série (2) do § 1 fizermos

$$\begin{aligned}Y_1 &= X_2 \\ Y_2 &= X_3 \\ Y_n &= X_{n+1}.\end{aligned}$$

vemos que cada termo da série (1) pôde ser obtido do seu antecedente por um operador particular E, chamado operador de deslocamento. Com efeito, pondo-se nas relações

$$Y_i = \varphi X_i$$

$$X_i = \varphi^{-1} Y_i$$

as seguintes convenções

$$\varphi = E, \varphi^{-1} = \frac{1}{E} = E^{-1}$$

e

$$Y_i = X_{i+1} \text{ e } X_{i-1} = Y_i ,$$

obtemos

$$X_{i+1} = EX_i$$

$$X_{i-1} = E^{-1}X_i .$$

Nestas condições, qualquer série

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

pôde ser decomposta em duas séries do tipo (1) e (2) do § 1, em que tivéssemos $\varphi = E$.

Por conveniência de notação numeramos as séries a partir do índice zero e, neste caso, temos o aspeto :

$$U_0, U_1 = E U_0, U_2 = E U_1 = E^2 U_0, \dots, U_n = E^n U_0 ,$$

$E, E^2, \dots, E^n$, significando a reiteração da operação de deslocamento.

Operador de diferenciação finita.

Si na série (2) do § 1 fizermos

$$Y_1 = X_2 - X_1$$

$$Y_2 = X_3 - X_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Y_{n-1} = X_n - X_{n-1},$$

definimos uma nova grandeza Y , que recebe o nome de diferença finita de X e a operação φ correspondente toma o nome de diferenciação, com a notação $\varphi = \Delta$.

Nestas condições a relação.

$$Y_i = \varphi X_i$$

toma o aspeto

$$(2) \quad Y_i = \Delta X_i$$

Das fórmulas (1) e (2) concluímos

$$\Delta X_i = X_{i+1} - X_i = (E-1) X_i .$$

Os operadores Δ e $E-1$ têm o mesmo efeito sobre a grandeza X_i , como vemos da relação

$$\Delta X_i = (E-1) X_i ,$$

donde, por omissão da grandeza operada, resulta

$$\Delta = (E-1)$$

ou, ainda,

$$E = 1 + \Delta .$$

A operação inversa de Δ , a saber Δ^{-1} , seria por definição dada por

$$\Delta^{-1} \Delta X_i = X_i = \Delta^{-1} (E-1) X_i ,$$

de que deduzimos

$$\Delta^{-1} (E-1) = 1 .$$

Daquí tiramos

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{E-1} .$$

Efetuando este cociente, obtemos

$$\Delta^{-1} = -(1 + E + E^2 + \dots + \dots E^n + \dots) .$$

E' fácil verificar que a operação denotada pelo segundo membro dessa equação corresponde à inversão da operação $Y_i = \Delta X_i$.

Com efeito

$$\Delta^{-1} \Delta X_i = \Delta^{-1} (X_{i+1} - X_i) = -(1 + E + E^2 + \dots + E^n + \dots)(X_{i+1} - X_i).$$

Mas

$$(1 + E + E^2 + \dots + E^n + \dots) X_{i+1} = X_{i+1} + X_{i+2} + \dots + X_{i+n} + \dots$$

$$(1 + E + E^2 + \dots + E^n + \dots) X_i = X_i + X_{i+1} + \dots + X_{i+n} + \dots$$

Daquí tiramos por diferença

$$\Delta^{-1} \Delta X_i = (X_i + X_{i+1} + \dots + X_{i+n} + \dots) - (X_{i+1} + X_{i+2} + \dots + X_{i+n} + \dots) = X_i$$

Se operarmos sobre a série dos ΔX_i como operamos sobre a dos X_i , obtemos uma diferença da diferença finita de X_i , que recebe a notação $\Delta^2 X_i$ e que se define por

$$\Delta^2 X_i = \Delta X_{i+1} - \Delta X_i.$$

Introduzindo-se o operador de deslocamento E , podemos transformar esta expressão da seguinte forma :

$$\Delta^2 X_i = \Delta (EX_i - X_i) = \Delta (E-1)X_i = (E-1)^2 X_i.$$

Repetindo sucessivamente esta operação de diferenciação às séries formadas, obtemos as diferenças segunda, terceira, etc., enésima, que será dada por

$$\Delta^n X_i = \Delta^{n-1} X_{i+1} - \Delta^{n-1} X_i = \Delta^{n-1} [E-1] X_i$$

ou, ainda,

$$\Delta^n X_i = [E-1]^n X_i.$$

Admitindo-se, por hipótese, que

$$\Delta^n X_i = [E-1]^n X_i,$$

concluiríamos a validade desta relação para $n+1$, como fizemos acima.

Operador de Expansão.

Si nas séries (1) e (2) do § 1 fizermos

$$\begin{aligned} X_i &= f(x_i) \\ i &= 0, 1, 2, \dots, n \\ Y_i &= f(x_i+h), \end{aligned}$$

teremos estabelecido uma nova operação que nos faz obter $f(x_i+h)$ pela expansão ou aumento do argumento x_i de $f(x_i)$ de uma quantidade dada h , que é chamada a amplitude da expansão. Esta operação é denotada pelo símbolo A , afetado de um expoente h , igual à sua amplitude e escrevemos então

$$Y_i = f(x_i+h) = A^h f(x_i).$$

A operação inversa, que nos permitiria obter $f(x_i)$ de $f(x_i+h)$, é designada pelo símbolo $(A^h)^{-1}$, o que nos dá

$$f(x_i) = (A^h)^{-1} f(x_i+h).$$

Observando-se que nenhuma restrição fizemos quanto a h , podemos supor que A^h possa ser aplicado com expoentes negativos, o que nos daria

$$A^{-h} f(x_i) = f(x_i-h).$$

Substituindo-se nesta relação x_i por x_i+h , concluimos

$$A^{-h} f(x_i+h) = f(x_i).$$

As operações

$$A^{-h} \text{ e } (A^h)^{-1},$$

como vemos, são equivalentes, o que nos permite por

$$(A^h)^{-1} = A^{-h}$$

e vice-versa.

Este operador goza ainda da propriedade :

$$A^h A^k = A^k A^h = A^{h+k}.$$

Quer dizer : o produto lógico de dois operadores de expansão é comutativo e goza da lei dos expoentes.

Quando os valores de x_i formam uma progressão aritmética, é possível estabelecer uma correspondência entre os operadores A e E .

Com efeito : sendo dadas as séries.

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \quad x_i = x_0 + ri$$

$$f(x_0), f(x_0+r), f(x_0+2r), \dots, f(x_0+rn),$$

teremos

$$f(x_n) = f(x_0+rn) = E^n f(x_0).$$

Por outro lado,

$$f(x_n) = A^{rn} f(x_0)$$

daquí concluimos

$$A^{rn} = E^n$$

ou

$$E = A^r.$$

Quando a série dos x_i é qualquer, a qual podemos por sob a forma

$$x_0, x_1 = x_0 + a_1, \dots, x_n = x_0 + a_n,$$

teríamos

$$f(x_n) = f(x_0 + a_n) = A^{a_n} f(x_0) = E^n f(x_0)$$

e

$$A^{a_n} = E^n$$

Esta relação estabelece uma relação funcional entre A e E , mas que depende da ordem do argumento operado x_n .

Operador ∇ .

Fazendo-se na série (2) do § 1

$$Y_i = X_i - X_{i-1}$$

introduzimos um novo operador ∇ , dito de diferença inversa, tal que

$$X_i - X_{i-1} = \nabla X_i.$$

Entre este operador e o operador de deslocamento E , temos a relação

$$X_i - E^{-1} X_i = \nabla X_i$$

donde

$$1 - E^{-1} = \nabla$$

Aplicando-se à série dos ∇X_i a mesma operação, formamos uma nova operação em relação a ∇X_i , dita diferença inversa de 2.^a ordem e que designamos por

$$\nabla^2 X_i = \nabla X_i - \nabla X_{i-1} = \nabla (1 - E^{-1}) X_i = (1 - E^{-1})^2 X_i$$

De um modo geral, teríamos

$$\nabla^n X_i = (1 - E^{-1})^n X_i$$

A operação inversa de ∇ é definida pela relação

$$\nabla^{-1} \nabla = 1$$

ou então

$$\nabla^{-1} (1 - E^{-1}) = 1$$

donde tiramos

$$\nabla^{-1} = \frac{1}{1 - E^{-1}} = \frac{E}{E - 1} = \frac{1 + \Delta}{\Delta} = 1 + \Delta^{-1}$$

A operação inversa de ∇^n seria dada por

$$(\nabla^n)^{-1} = \frac{1}{(1 - E^{-1})^n} = (\nabla^{-1})^n$$

o que nos permite escrever simplesmente

$$(\nabla^n)^{-1} = \nabla^{-n}$$

Operador D.

Se nas séries (1) e (2) fizermos

$$X_i = f(t_i) + C$$

$$Y_i = f'_{t_i}(t_i),$$

teremos estabelecido entre elas as relações

$$Y_i = D X_i$$

$$X_i = D^{-1} Y_i$$

onde D denota o símbolo de derivação em relação ao argumento de f , e D^{-1} um operador tal que

$$D \cdot D^{-1} = 1 .$$

Ora da propriedade das integrais resulta

$$\int_a^{t_i} f'(t) dt = f(t_i) + C .$$

O primeiro membro dessa igualdade define o operador que, atuando sobre $f'(t)$, reproduz $f(t) + C$, seja o operador D^{-1} . Nestas condições

$$D^{-1} f'(t_i) = \int_a^{t_i} f'(t) dt = f(t_i) + C .$$

Por D^n entendemos a derivação sucessiva de n vezes e por D^{-n} a integração sucessiva n vezes. Estes dois operadores são recíprocos, a menos de grandezas óperonulas.

Assim,

$$D^{-n} f^{(n)}(x) = f(x) + P_{n-1}(x)$$

onde $P_{n-1}(x)$ representa um polinômio arbitrário de grau $(n-1)$.

Operador $\square$

Se nas séries (1) e (2) do § 1 fizermos

$$X_i = f(x_i)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$Y_i = \frac{f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_i - \frac{h}{2})}{2} = \square X_i ,$$

teremos definido um novo operador, dito de semi-soma, de amplitude h .

Podemos exprimir este operador $\square$ em função do operador de expansão A .

Temos com efeito :

$$f(x_i + \frac{h}{2}) = A^{\frac{h}{2}} f(x_i)$$

$$f(x_i - \frac{h}{2}) = A^{-\frac{h}{2}} f(x_i)$$

donde

$$\square = \frac{A^{\frac{h}{2}} + A^{-\frac{h}{2}}}{2}$$

A operação inversa $\square^{-1}$ nos daria.

$$\square^{-1} \cdot \square = 1 ,$$

de que obtemos

$$\square^{-1} = \frac{2}{A^{\frac{h}{2}} + A^{-\frac{h}{2}}} = \frac{2 A^{\frac{h}{2}}}{A^h + 1} = 2 A^{\frac{h}{2}} (1 + A^h)^{-1} .$$

Quando a série x_i é formada por uma progressão aritmética de razão h , temos

$$A^h = E$$

donde para $\square$ a expressão

$$\square = \frac{E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}}{2} .$$

A reiteração das operações $\square$ e $\square^{-1}$ nos daria os operadores

$$\square^n = \frac{\left[A^{\frac{h}{2}} + A^{-\frac{h}{2}} \right]^n}{2^n} \text{ e } [\square^n]^{-1} = 2^n \left[A^{\frac{h}{2}} + A^{-\frac{h}{2}} \right]^{-n} .$$

Operador δ .

Para a definição de δ pomos

$$\begin{aligned} i &= 0, 1, 2, \dots, n \\ X_i &= f(x_i) \\ Y_i &= \delta X_i = f(x_i + \frac{h}{2}) - f(x_i - \frac{h}{2}) \end{aligned}$$

Resulta para δ a expressão em função de A :

$$\delta = A^{\frac{h}{2}} - A^{-\frac{h}{2}} .$$

h é dita a amplitude desta operação.

Quando a série dos x_i é uma progressão aritmética de razão h , dada a relação

$$E = A^h ,$$

podemos escrever

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}} .$$

A inversão de δ seria feita como nos casos anteriores, pondo-se

$$\delta^{-1} \cdot \delta = 1$$

donde obteríamos

$$\delta^{-1} = \frac{A^{\frac{h}{2}}}{A^{\frac{h}{2}} - 1} = A^{\frac{h}{2}} \left(A^{\frac{h}{2}} - 1 \right)^{-1} .$$

A reiteração da operação δ nos daria

$$\delta^n = \left[A^{\frac{h}{2}} - A^{-\frac{h}{2}} \right]^n$$

e a série inversa seria dada por

$$(\delta^n)^{-1} = \left[A^{\frac{h}{2}} - A^{-\frac{h}{2}} \right]^{-n} .$$

RELAÇÕES ENTRE OS OPERADORES Δ E D .

Pondo-se nas séries (1) e (2) do § 1

$$X_i = F(x_i)$$

$$Y_i = \Delta F(x_i) ,$$

com

$$x_i = x_{i-1} + h ,$$

a diferença finita primeira da função $F(x)$ para um valor genérico x é por definição, uma outra função $f(x)$, verificando a relação

$$(1) \quad F(x + h) - F(x) = f(x) ,$$

sendo h a amplitude do intervalo de diferenciação.

Esta relação pode ser escrita de acôrdo com a notação simbólica da forma.

$$(2) \quad \Delta F(x) = f(x) .$$

O 1.º membro de (1) pode ser desenvolvido em série de Taylor, o que nos dá

$$F(x + h) - F(x) = h F'(x) + \frac{h^2}{2} F''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x) + \dots$$

ou, ainda, pela introdução do símbolo D de derivação em relação a x , virá o aspeto

$$F(x + h) - F(x) = (h D + \frac{h^2}{2} D^2 + \dots + \frac{h^n}{n!} D^n + \dots) F(x) .$$

Mas a expressão entre parêntesis pode ser escrita

$$h D + \frac{h^2}{2} D^2 + \dots + \frac{h^n}{n!} D^n + \dots = e^{hD} - 1 ,$$

donde

$$(3) \quad F(x + h) - F(x) = (e^{hD} - 1) F(x) .$$

Comparando-se (1), (2) e (3), tiramos

$$(4) \quad f(x) = (e^{hD} - 1) F(x) .$$

Se tivéssemos um operador λ tal que a operação $\lambda (e^{hD}-1)$ fosse de efeito nulo, isto é,

$$(5) \quad \lambda(e^{hD}-1) = 1 ,$$

poderíamos tirar de (4) $F(x)$, a saber

$$F(x) = \lambda f(x) .$$

Este operador λ nos permitirá obter a primitiva da função $f(x)$, isto é, uma função $F(x)$ verificando (1).

Este problema será tratado posteriormente no capítulo da somação, onde a determinação da primitiva de uma função somanda apresenta interesse para a sua somação.

Este operador λ não é senão o operador Δ^{-1} expresso em termos do operador D , visto que, da relação

$$(6) \quad \Delta = e^{hD}-1 ,$$

combinada com a relação (5), que define o operador λ , concluimos

$$\lambda \Delta = 1 ,$$

$$\lambda = \frac{1}{\Delta} = \Delta^{-1} .$$

A relação (6) pode ser transformada do seguinte modo

$$e^{hD} = 1 + \Delta .$$

Operando sobre ambos os membros por log, temos

$$hD = \log (1 + \Delta) .$$

donde tiramos

$$(7) \quad D = \frac{1}{h} \log (1 + \Delta) .$$

As duas fórmulas, que se equivalem,

$$\Delta = e^{hD}-1$$

$$D = \frac{1}{h} \log (1 + \Delta) ,$$

representam as relações existentes entre os operadores Δ e D

Entretanto, para que estes desenvolvimentos ilimitados tenham um sentido, é necessário que o resultado da aplicação dessas operações seja numericamente convergente. Isto é sempre possível, quando o argumento da operação é um polimônio dado, pois que as operações cessam a partir de uma certa ordem e esta conclusão pode ser extendida àquelas funções, cujas derivadas ou diferenças a partir de uma certa ordem tendam a ser negligenciáveis.

RELAÇÕES ENTRE OS OPERADORES $\square$ E δ .

Combinando-se as expressões

$$\square = \frac{A^{\frac{h}{2}} + A^{-\frac{h}{2}}}{2}$$

$$\delta = A^{\frac{h}{2}} - A^{-\frac{h}{2}},$$

tiramos

$$A^{\frac{h}{2}} = \square + \frac{1}{2} \delta$$

$$A^{-\frac{h}{2}} = \square - \frac{1}{2} \delta$$

Os dois operadores $A^{\frac{h}{2}}$ e $A^{-\frac{h}{2}}$ são recíprocos, donde

$$\left(\square + \frac{1}{2} \delta\right) \left(\square - \frac{1}{2} \delta\right) = 1$$

Daquí concluímos

$$\square^2 = 1 + \frac{\delta^2}{4}.$$

Desta relação, deduzimos

$$\frac{\delta}{2} = \sqrt{\square^2 - 1}.$$

THE
JOURNAL OF THE
ROYAL ANTHROPOLOGICAL INSTITUTE
OF GREAT BRITAIN AND IRELAND
PUBLISHED BY THE INSTITUTE
11, BEDFORD SQUARE, LONDON, W.C.1

Volume 100, Part 1, 1970

Edited by
J. H. REES

Published by the
Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland

11, Bedford Square, London, W.C.1

Printed by the
Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland

11, Bedford Square, London, W.C.1

Published by the
Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland

11, Bedford Square, London, W.C.1

Published by the
Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland

11, Bedford Square, London, W.C.1

Published by the
Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland

11, Bedford Square, London, W.C.1

CAPÍTULO SEGUNDO

DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Generalidades.

1. O Operador Θ_p

2 - 5. Diferenças divididas. Propriedades e expressões diversas.

1871

1. The first of the year was a very cold day, with a heavy snowfall. The wind was from the north, and the snow lay deep on the ground. The trees were covered with a thick layer of snow, and the houses were also covered. The children were very happy to see the snow, and they went out to play in the snow. They made snowballs and snow angels, and they had a very good time. The snow was very soft, and it was easy to walk on. The children were very happy to see the snow, and they went out to play in the snow. They made snowballs and snow angels, and they had a very good time. The snow was very soft, and it was easy to walk on.

THE FIRST OF THE YEAR

2. The second of the year was a very cold day, with a heavy snowfall. The wind was from the north, and the snow lay deep on the ground. The trees were covered with a thick layer of snow, and the houses were also covered. The children were very happy to see the snow, and they went out to play in the snow. They made snowballs and snow angels, and they had a very good time. The snow was very soft, and it was easy to walk on. The children were very happy to see the snow, and they went out to play in the snow. They made snowballs and snow angels, and they had a very good time. The snow was very soft, and it was easy to walk on.

DIFERENÇAS DIVIDIDAS

GENERALIDADES

Consideremos uma série de grandezas

$$(1) \quad a_0, a_1, \dots, a_n$$

e dois operadores, f e f^{-1} , escalares.

Operando sobre (1) por f , obtemos uma nova série de grandezas u_i , dada por

$$(2) \quad u_0 = f(a_0), u_1 = f(a_1), \dots, u_n = f(a_n).$$

As séries (1) e (2) deste parágrafo são séries nas condições das séries (1) e (2) do § 1 e resultam da rarefação de dois conjuntos de valores, a saber o conjunto dos valores de uma variável a para a série (1) e, para a série (2), o conjunto dos valores de uma função $u = f(a)$ da variável a . Dadas as relações entre a e $f(a)$, a toda operação sobre a podemos fazer corresponder uma operação sobre $f(a)$ e vice-versa.

O OPERADOR Θ_p .

Se nas séries (1) e (2) do § 1, fizermos

$$X_i = f(a_i)$$

$$Y_i = \Theta_p f(a_i) = \frac{f(a_{p+i}) - f(a_i)}{a_{p+i} - a_i},$$

teremos definido um operador nas condições do § anterior. A operação executada por Θ_p é de transformar $f(a_i)$ em $\frac{f(a_{p+i}) - f(a_i)}{a_{p+i} - a_i}$; como vemos, ele atua sobre o argumento a_i de índice i .

Este operador goza das propriedades distributiva em relação à soma e associativa e comutativa em relação ao produto lógico.

Com efeito temos :

$$\begin{aligned} \text{I) } \Theta_p \left[F(a_i) + H(a_i) \right] &= \frac{[F(a_{p+i}) + H(a_{p+i})] - [F(a_i) + H(a_i)]}{a_{p+i} - a_i} = \\ &= \frac{F(a_{p+i}) - F(a_i)}{a_{p+i} - a_i} + \frac{H(a_{p+i}) - H(a_i)}{a_{p+i} - a_i} = \Theta_p F(a_i) + \Theta_p H(a_i). \end{aligned}$$

II) Sendo Θ_p e Θ_q dois operadores nas condições supra, temos

$$\begin{aligned} \Theta_q \left[\Theta_p F(a_i) \right] &= \Theta_q \frac{F(a_{p+i}) - F(a_i)}{a_{p+i} - a_i} = \frac{\frac{F(a_{p+i}) - F(a_{q+i})}{a_{p+i} - a_{q+i}} - \frac{F(a_{p+i}) - F(a_i)}{a_{p+i} - a_i}}{a_{q+i} - a_i} = \\ &= \frac{F(a_i)}{(a_i - a_{p+i})(a_i - a_{q+i})} + \frac{F(a_{p+i})}{(a_{p+i} - a_i)(a_{p+i} - a_{q+i})} + \frac{F(a_{q+i})}{(a_{q+i} - a_i)(a_{q+i} - a_{p+i})}, \end{aligned}$$

expressão simétrica em relação a p e q , o que mostra a comutatividade.

III) Verificaríamos também que

$$\Theta_p (\Theta_q \Theta_r) = (\Theta_p \Theta_q) \Theta_r = (\Theta_p \Theta_r) \Theta_q = \Theta_p \Theta_q \Theta_r,$$

exatamente como se tivéssemos o produto algébrico de tres fatores. É facil verificar ainda que o operador Θ_p pode ser representado pela integral definida

$$\begin{aligned} \int_0^1 f' \left[a_i z + (1-z) a_{p+i} \right] dz &= \left| \frac{f[a_i z + (1-z) a_{p+i}]}{a_i - a_{p+i}} \right|_0^1 = \frac{f(a_i) - f(a_{p+i})}{a_i - a_{p+i}} = \\ &= \Theta_p f(a_i) \end{aligned}$$

A operação Θ_p , sob esta forma, pode ser executada, como observa Stephensen, em tres etapas:

1ª) Derivação de $f(a_i)$ em relação a a_i

2ª) Substituição de a_i por $a_i z + (1-z)a_{p+i}$

3ª) Integração da expressão obtida entre os limites

$z = 0$ e $z = 1$.

DIFERENÇAS DIVIDIDAS DE $f(a)$ PARA OS VALORES
DE $a = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$

Consideremos uma série de operadores

$$\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p,$$

atuando sobre $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)$.

Entendemos por diferenças divididas de 1ª, 2ª, ..., pª ordem de $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_n)$ as expressões

$$f(a_0|a_1) = \Theta_1 f(a_0)$$

$$f(a_1|a_2) = \Theta_1 f(a_1)$$

$$\vdots$$

$$f(a_{n-1}|a_n) = \Theta_1 f(a_{n-1})$$

para as diferenças de 1ª ordem;

$$f(a_0|a_1|a_2) = \Theta_2 \Theta_1 f(a_0)$$

$$f(a_1|a_2|a_3) = \Theta_2 \Theta_1 f(a_1)$$

$$f(a_{n-2}|a_{n-1}|a_n) = \Theta_2 \Theta_1 f(a_{n-2})$$

para as de 2ª ordem e assim por diante.

De um modo geral teríamos, para $f(a_0)$ e $f(a_i)$, as expressões seguintes, para as diferenças divididas de ordem p :

$$f(a_0|a_1|\dots|a_p) = \Theta_p \Theta_{p-1} \dots \Theta_2 \Theta_1 f(a_0)$$

$$f(a_i|a_{i+1}|\dots|a_{i+p}) = \Theta_p \Theta_{p-1} \dots \Theta_2 \Theta_1 f(a_i)$$

Vamos demonstrar que estas diferenças divididas gozam da propriedade dada pela relação seguinte:

$$f(a_0|a_1|\dots|a_p|a_{p+1}) = \frac{f(a_0|a_1|\dots|a_p) - f(a_1|a_2|\dots|a_p|a_{p+1})}{a_0 - a_{p+1}}$$

Com efeito, sendo $f(a_1|a_2|\dots|a_p|a_{p+1})$ simétrica em relação aos seus argumentos, em virtude da associatividade e comu-

tatividade dos operadores $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p$, podemos escrever

$$f(a_1|a_2|\dots|a_p|a_{p+1}) = f(a_{p+1}|a_1|a_2|\dots|a_p),$$

donde

$$\frac{f(a_0|a_1|\dots|a_p) - f(a_1|a_2|\dots|a_p|a_{p+1})}{a_0 - a_{p+1}} = \frac{f(a_0|a_1|\dots|a_p) - f(a_{p+1}|a_1|a_2|\dots|a_p)}{a_p - a_{p+1}} =$$

$$= (-)_{p+1} f(a_0|a_1|\dots|a_p) = f(a_0|a_1|\dots|a_{p+1}).$$

Analisando as diferenças divididas de 1ª, 2ª, ..., pª ordem, podemos ver que elas se apresentam sob a forma de uma soma de $(p+1)$ quocientes do tipo

$$\frac{f(a_i)}{(a_i - a_0)(a_i - a_1)\dots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\dots(a_i - a_p)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p$$

Vamos admitir para $f(a_0|a_1|\dots|a_p)$ a expressão geral

$$(1) \quad f(a_0|a_1|\dots|a_p) = \sum_{v=0}^{v=p} \frac{f(a_v)}{(a_v - a_0)\dots(a_v - a_p)},$$

e provar que esta relação é válida para $p+1$.

Com efeito, temos, pela propriedade que consideramos no § anterior

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{p+1}) = \frac{f(a_0|a_1|\dots|a_p) - f(a_1|a_2|\dots|a_{p+1})}{a_0 - a_{p+1}}$$

Mas, de acordo com a expressão (1), podemos escrever

$$(2) \quad f(a_0|a_1|\dots|a_p) = \frac{f(a_0)}{(a_0 - a_1)\dots(a_0 - a_p)} + \dots + \frac{f(a_i)}{(a_i - a_0)\dots(a_i - a_p)} + \dots +$$

$$+ \dots + \frac{f(a_p)}{(a_p - a_0)\dots(a_p - a_{p-1})}$$

$$(3) \quad f(a_1|a_2|\dots|a_{p+1}) = \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_2)\dots(a_1 - a_{p+1})} + \dots +$$

$$+ \dots + \frac{f(a_i)}{(a_i - a_1)\dots(a_i - a_{p+1})} + \dots + \frac{f(a_{p+1})}{(a_{p+1} - a_1)\dots(a_{p+1} - a_p)}$$

Subtraindo (3) de (2) e dividindo o resultado por $(a_0 - a_{p+1})$, temos

$$\begin{aligned} \frac{f(a_0|a_1|\dots|a_p) - f(a_1|a_2|\dots|a_{p+1})}{a_0 - a_{p+1}} &= \frac{f(a_0)}{(a_0 - a_1)\dots(a_0 - a_p)(a_0 - a_{p+1})} + \dots + \\ &+ \dots + \frac{f(a_i)}{(a_i - a_1)\dots(a_i - a_p)(a_0 - a_{p+1})} \left[\frac{1}{a_i - a_0} - \frac{1}{a_i - a_{p+1}} \right] + \dots + \\ &+ \dots + \frac{f(a_{p+1})}{(a_{p+1} - a_1)\dots(a_{p+1} - a_p)(a_0 - a_{p+1})} \end{aligned}$$

Observando-se que

$$\frac{1}{(a_i - a_1)\dots(a_i - a_p)(a_0 - a_{p+1})} \left[\frac{1}{a_i - a_0} - \frac{1}{a_i - a_{p+1}} \right] = \frac{1}{(a_i - a_0)(a_i - a_1)\dots(a_i - a_{p+1})}$$

e

$$- (a_{p+1} - a_1)\dots(a_{p+1} - a_p)(a_0 - a_{p+1}) = (a_{p+1} - a_0)(a_{p+1} - a_1)\dots(a_{p+1} - a_p),$$

podemos escrever afinal

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{p+1}) = \sum_{v=0}^{v=p+1} \frac{f(a_i)}{(a_i - a_0)\dots(a_i - a_{p+1})},$$

o que generalisa a relação (1) para p qualquer.

3. Esta expressão, que obtivemos, pode ser transformada com o auxílio do determinante de Vandermonde.

Este determinante tem por expressão

$$|v| = \begin{vmatrix} a_0^p & a_1^p & \dots & a_p^p \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1} & \dots & a_p^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_p \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Considerando que $|v|$ é polinômio de grau p em relação a a_i e que se anula p vezes, quando pomos

$$a_i = a_o = \dots = a_{i-1} = a_{i+1} \dots = a_p ,$$

vemos facilmente, aplicando-se a propriedade da fatoraçoão de um polinômio de grau p em seus p fatores de 1º grau, que êle é da forma:

$$(2) \quad |v| = K(a_i - a_o) \dots (a_i - a_{i-1}) (a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_p) ,$$

sendo K independente de a_i .

Para determinarmos K , fazemos $a_i = 0$, donde

$$\begin{vmatrix} a_o^p & a_1^p & \dots & a_{i-1}^p & 0 & a_{i+1}^p & \dots & a_p^p \\ a_o^{p-1} & a_1^{p-1} & \dots & a_{i-1}^{p-1} & 0 & a_{i+1}^{p-1} & \dots & a_p^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_o & a_1 & \dots & a_{i-1} & 0 & a_{i+1} & \dots & a_p \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^p a_o a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_p K$$

Por outro lado, o 1º membro desta expressáo toma a forma

$$|v|_{a_i=0} = (-1)^{p+i} \begin{vmatrix} a_o^p & a_1^p & \dots & a_{i-1}^p & a_{i+1}^p & \dots & a_p^p \\ a_o^{p-1} & a_1^{p-1} & \dots & a_{i-1}^{p-1} & a_{i+1}^{p-1} & \dots & a_p^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_o & a_1 & \dots & a_{i-1} & a_{i+1} & \dots & a_p \end{vmatrix}$$

ou, ainda, pondo em evidência os p fatores $a_o, \dots, a_p$,

$$|v|_{a_i=0} = (-1)^{p+i} a_o a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_p \begin{vmatrix} a_o^{p-1} & a_1^{p-1} & \dots & a_{i-1}^{p-1} & a_{i+1}^{p-1} & a_p^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_o & a_1 & \dots & a_{i-1} & a_{i+1} & a_p \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

donde para K o valor:

$$(3) \quad K = (-1)^{p+i} \begin{vmatrix} a_0^{p-1} & a_1^{p-1} & \dots & a_{i-1}^{p-1} & a_{i+1}^{p-1} & \dots & a_p^{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{i-1} & a_{i+1} & \dots & a_p \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Ora, este determinante (3) não é mais do que o menor A_i relativo a a_i^p no determinante (1).

Levando este valor de K na relação (2) temos

$$(a_i - a_0) \dots (a_i - a_{i-1}) (a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_p) = (-1)^i \frac{|V|}{|A_i|}$$

donde para $f(a_0|a_1|\dots|a_p)$ o aspeto

$$f(a_0|a_1|\dots|a_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i f(a_i) \frac{|A_i|}{|V|} = \frac{\begin{vmatrix} f(a_0) & \dots & f(a_i) & \dots & f(a_p) \\ a_0^{p-1} & \dots & a_i^{p-1} & \dots & a_p^{p-1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_0 & \dots & a_i & \dots & a_p \\ 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}}{|V|}$$

4. Introduzindo a expressão sob a forma de integral definida de $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p$ podemos dar a $f(a_0|a_1|\dots|a_p)$ uma outra expressão sob a forma de uma integral p -upla; para isso observemos o seguinte:

o produto lógico de Θ_p e Θ_q pode ser expresso por uma integral dupla, como veremos a seguir.

Podemos escrever

$$\Theta_p f(a_o) = \int_0^1 f' [a_o t + (1-t) a_p] dt = F(a_o)$$

$$\Theta_q \Theta_p f(a_o) = \Theta_q F(a_o) = \int_0^1 F' [a_o z + (1-z) a_q] dz$$

Mas temos por derivação em relação a a_o

$$F'(a_o) = \int_0^1 f'' [a_o t + (1-t) a_p] t dt$$

donde

$$F' [a_o z + (1-z) a_q] = \int_0^1 f'' [(1-t) a_p + t \{ a_o z + (1-z) a_q \}] t dt$$

e, portanto, integrando sob o sinal de integração, virá a integral dupla

$$\Theta_q \Theta_p f(a_o) = \int_0^1 dz \int_0^1 f'' [(1-t) a_p + a_o t z + (t-tz) a_q] t dt$$

ou seja afinal

$$\Theta_q \Theta_p f(a_o) = \int_0^1 \int_0^1 f'' [(1-t) a_p + a_o t z + (t-tz) a_q] t dz dt$$

Podemos dar esta integral dupla um outro aspeto, efetuando-se a transformação

$$\begin{aligned} t &= t \\ zt &= u, \\ \frac{D(t,u)}{D(z,t)} &= \begin{vmatrix} 0 & t \\ 1 & z \end{vmatrix} = -t. \end{aligned}$$

Temos

$$t dz dt = dt du$$

e os limites de integração passam a ser

$$\begin{aligned} u &= 0 & u &= t \\ t &= 0 & t &= 1 \end{aligned}$$

donde o aspeto

$$\Theta_q \Theta_p f(a_o) = \int_{t=0}^{t=1} dt \int_{u=0}^{u=t} f'' [a_o u + (1-t) a_p + (t-u) a_q] du$$

5. O mesmo processo nos daria

$$\Theta_r \Theta_q \Theta_p f(a_o) = \int_0^1 dv \int_{t=0}^{t=1} \int_{u=0}^{u=t} f''' [(1-t)a_p + (t-u)a_q + u\{a_o v + (1-v)a_r\}] u \, du$$

ou

$$\Theta_r \Theta_q \Theta_p f(a_o) = \int_{v=0}^1 \int_{t=0}^1 \int_{u=0}^t f''' [a_o uv + (1-t)a_p + (t-u)a_q + (u-uv)a_r] u \, dv \, dt \, du$$

Efetutando-se a transformação

$$u = u$$

$$t = t$$

$$vu = w$$

obtemos

$$\frac{D(u, t, w)}{D(u, t, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v & 0 & u \end{vmatrix} = u$$

donde

$$u \, dv \, dt \, du = du \, dt \, dw$$

e para os limites de integração

$$w = 0 \quad w = u$$

$$u = 0 \quad u = t$$

$$t = 0 \quad t = 1$$

logo

$$\Theta_r \Theta_q \Theta_p f(a_o) = \int_0^1 dt \int_0^t du \int_0^u f''' [a_o w + (1-t)a_p + (t-u)a_q + (u-w)a_r] \, dw$$

Fazendo-se

$$p = 1, \quad q = 2, \quad r = 3, \dots, \quad s = p,$$

acharíamos para o caso geral

$$f(a_o | a_1 | \dots | a_p) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} [a_o t_p + a_1(1-t_1) + a_2(t_1-t_2) + \dots + (t_{p-1}-t_p) a_p] \, dt_p$$

mutando-se convenientemente as variaveis de integração para $t_1, t_2, \dots, t_p$. Pondo-se $t_o = 1$, teremos

$$f(a_o | a_1 | \dots | a_p) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} \left[a_o t_p - \sum_{v=1}^p a_v \nabla t_v \right] \, dt_p.$$

Resta-nos mostrar que esta expressão é verdadeira para $(p+1)$.
Para tanto vamos utilizar da propriedade:

$$\frac{f(a_0|a_1|\dots|a_p) - f(a_1|a_2|\dots|a_{p+1})}{a_0 - a_{p+1}} = f(a_0|a_1|\dots|a_{p+1}) .$$

Pela fórmula induzida anteriormente, podemos escrever

$$f(a_0|a_1|\dots|a_p) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} \left[a_0 t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v \right] dt_p$$

$$f(a_1|a_2|\dots|a_{p+1}) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} \left[a_1 t_p - \sum_1^p a_{v+1} \nabla t_v \right] dt_p .$$

Cabe estudar agora uma transformação da expressão

$$f(a_0|a_1|\dots|a_p) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} \left[a_0 t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v \right] dt_p ,$$

levando-se em conta a simetria que as diferenças divididas apresentam em relação aos argumentos

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_p$$

que nellas entram.

A expressão supra é relativa á diferença dividida de ordem p de uma função $f(a)$ para a série de argumentos

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_p .$$

Como esta diferença dividida é simétrica em relação a esses argumentos, obteríamos para ela um mesmo valor, se considerássemos estes argumentos dispostos numa outra ordem, como por exemplo a seguinte:

$$a_p, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1} .$$

Designando-se provisoriamente os argumentos nesta ordem por $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ de tal modo que

$$\begin{aligned}\beta_0 &= a_p \\ \beta_1 &= a_0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \beta_v &= a_{v-1} \\ \beta_p &= a_{p-1},\end{aligned}$$

a expressão da diferença dividida $f(\beta_0|\beta_1|\dots|\beta_p)$ seria dada pela fórmula supra de acordo com a expressão

$$f(\beta_0|\beta_1|\dots|\beta_p) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} \left[\beta_0 t_p - \sum_1^p \beta_v \nabla t_v \right] dt_p.$$

Observando-se que $\beta_0 = t_p$ e que de $v = 1$ a $v = p$ temos

$$\beta_v = a_{v-1}$$

podemos escrever em lugar de

$$\beta_0 t_p - \sum_1^p \beta_v \nabla t_v$$

a expressão

$$a_p t_p - \sum_1^p a_{v-1} \nabla t_v$$

Nestas condições resultará para a diferença dividida $f(a_0|a_1|\dots|a_p)$ a expressão

$$f(a_0|a_1|\dots|a_p) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} \left[a_p t_p - \sum_1^p a_{v-1} \nabla t_v \right] dt_p.$$

Para a diferença dividida $f(a_1|a_2|\dots|a_{p+1})$ achamos com a mudança de v para $v+1$ a expressão

$$f(a_1|a_2|\dots|a_p|a_{p+1}) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} \left[a_{p+1} t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v \right] dt_p.$$

Subtraindo-se $f(a_1|a_2|\dots|a_{p+1})$ de $f(a_0|a_1|\dots|a_p)$ e dividindo-se o resultado por $(a_0 - a_{p+1})$ temos

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{p+1}) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} \frac{f^{(p)} \left[a_0 t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v \right] - f^{(p)} \left[a_{p+1} t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v \right]}{a_0 - a_{p+1}} dt_p.$$

Mas, temos identicamente

$$\begin{aligned} & \frac{f^{(p)} \left[a_0 t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v \right] - f^{(p)} \left[a_{p+1} t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v \right]}{a_0 - a_{p+1}} = \\ &= \int_0^{t_p} f^{(p+1)} \left[(a_0 - a_{p+1})z - \sum_1^p a_v \nabla t_v + a_{p+1} t_p \right] dz \end{aligned}$$

Com efeito. Esta integração é imediata e nos dá

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_p} f^{(p+1)} \left[(a_0 - a_{p+1})z - \sum_1^p a_v \nabla t_v + a_{p+1} t_p \right] dz = \\ &= \frac{\left[f^{(p)} \left[(a_0 - a_{p+1})z - \sum_1^p a_v \nabla t_v + a_{p+1} t_p \right] \right]_{z=0}^{z=t_p}}{a_0 - a_{p+1}} \end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned} & \left[(a_0 - a_{p+1})z - \sum_1^p a_v \nabla t_v + a_{p+1} t_p \right]_{z=0} = a_{p+1} t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v, \\ & \left[(a_0 - a_{p+1})z - \sum_1^p a_v \nabla t_v + a_{p+1} t_p \right]_{z=t_p} = a_0 t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v, \end{aligned}$$

donde a identidade enunciada:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_p} f^{(p+1)} \left[(a_0 - a_{p+1})z - \sum_1^p a_v \nabla t_v + a_{p+1} t_p \right] dz = \\ &= \frac{f^{(p)} \left[a_0 t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v \right] - f^{(p)} \left[a_{p+1} t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v \right]}{a_0 - a_{p+1}} \end{aligned}$$

Levando este valor na expressão de $f(a_0|a_1|\dots|a_{p+1})$, achamos

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{p+1}) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} \int_0^{t_p} f^{(p+1)} \left[(a_0 - a_{p+1})z - \sum_1^p a_v \nabla t_v + a_{p+1} t_p \right] dz$$

Fazendo-se $z = t_{p+1}$, podemos escrever

$$(a_0 - a_{p+1})z - \sum_1^p a_v \nabla t_v + a_{p+1} t_p = a_0 t_{p+1} - \sum_1^{p+1} a_v \nabla t_v ,$$

o que generaliza a regra induzida, pois que temos :

$$f(a_0 | a_1 | \dots | a_{p+1}) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_p} dt_{p+1} f^{(p+1)} \left[a_0 t_{p+1} - \sum_1^{p+1} a_v \nabla t_v \right]$$

FÓRMULA DO BINÔMIO DE NEWTON

No estudo de desenvolvimentos que vamos fazer, ser-nos-ão úteis certas transformações da forma do binômio de Newton para expoente inteiro positivo.

Vamos estudar separadamente os dois casos: expoente par e expoente ímpar. Para o primeiro caso temos

$$(a+b)^{2v} = a^{2v} + C_1^{2v} a^{2v-1} b + C_2^{2v} a^{2v-2} b^2 + \dots + C_p^{2v} a^{2v-p} b^p + \dots + C_v^{2v} a^v b^v + \dots + C_q^{2v} a^q b^{2v-q} + \dots + C_2^{2v} a^2 b^{2v-2} + C_1^{2v} a b^{2v-1} + b^{2v}.$$

Neste desenvolvimento utilizamos dois índices p e q , o primeiro para as potências de b de zero até $v-1$ e o segundo, para as potências de b de $v+1$ até $2v$, bem como puzemos em evidência o termo médio do desenvolvimento.

Nestas condições podemos escrever

$$(a+b)^{2v} = C_v^{2v} a^v b^v + \sum_{p=0}^{p=v-1} C_p^{2v} a^{2v-p} b^p + \sum_{q=0}^{q=v-1} C_q^{2v} a^q b^{2v-q}$$

Façamos nessas somatórias

$$2v - p = v + k$$

$$2v - q = v + k_1$$

donde

$$p = v - k, \quad 1 \leq k \leq v$$

$$q = v - k_1, \quad 1 \leq k_1 \leq v.$$

Temos então

$$(a+b)^{2v} = C_v^{2v} a^v b^v + \sum_{k=1}^v C_{v-k}^{2v} a^{v+k} b^{v-k} + \sum_{k_1=1}^v C_{v+k_1}^{2v} a^{v-k_1} b^{v+k_1}$$

ou, pondo ambas as somatórias sob o mesmo índice de somação

$$(a+b)^{2v} = C_v^{2v} a^v b^v + \sum_{k=1}^v \left[C_{v-k}^{2v} a^{v+k} b^{v-k} + C_{v+k}^{2v} a^{v-k} b^{v+k} \right].$$

Como aplicação, façamos

$$a = E, \quad b = -1$$

obtemos

$$(E-1)^{2v} = C_v^{2v} (-1)^v E^v + \sum_{k=1}^v \left[(-1)^{v-k} C_{v-k}^{2v} E^{v+k} + (-1)^{v+k} C_{v+k}^{2v} E^{v-k} \right].$$

Para o segundo caso, temos, levando em conta as combinações complementares,

$$\begin{aligned} (a+b)^{2v+1} &= a^{2v+1} + C_1^{2v+1} a^{2v} b + \dots + C_p^{2v+1} a^{2v+1-p} b^p + \dots + \\ &+ C_v^{2v+1} a^{v+1} b^v + \dots + C_v^{2v+1} a^v b^{v+1} + \dots + C_q^{2v+1} a^q b^{2v+1-q} + \dots + \\ &+ C_1^{2v+1} a b^{2v} + b^{2v+1}. \end{aligned}$$

Este desenvolvimento contem $2(v+1)$ termos, que, reunidos segundo os índices p e q , nos dão as somatórias:

$$(a+b)^{2v+1} = \sum_{p=0}^v C_p^{2v+1} a^{2v+1-p} b^p + \sum_{q=0}^v C_q^{2v+1} a^q b^{2v+1-q}$$

Façamos as transformações:

$$2v+1-p = v+k \quad \therefore k = v+1-p$$

$$2v+1-q = v+k_1 \quad \therefore k_1 = v+1-q$$

donde resultam para p e q as expressões

$$p = v-k+1, \quad 1 \leq k \leq v+1$$

$$q = v-k_1+1, \quad 1 \leq k_1 \leq v+1.$$

Obtemos, levando estes valores nas somatórias, a expressão

$$(a+b)^{2v+1} = \sum_{k=1}^{v+1} C_{v-k+1}^{2v+1} a^{v+k} b^{v-k+1} + \sum_{k_1=1}^{v+1} C_{v-k_1+1}^{2v+1} a^{v-k_1+1} b^{v+k_1}.$$

Reunindo estas duas somatórias sob o mesmo índice de soma-
ção, achamos

$$(a+b)^{2v+1} = \sum_{k=1}^{v+1} \left[C_{v-k+1}^{2v+1} a^{v+k} b^{v-k+1} + C_{v+k}^{2v+1} a^{v-k+1} b^{v+k} \right],$$

observando-se que

$$C_{v-k_1+1}^{2v+1} = C_{v+k_1}^{2v+1}.$$

Aplicando-se para

$$a = E, \quad b = -1,$$

resulta a expressão

$$(E-1)^{2v+1} = \sum_{k=1}^{v+1} \left[(-1)^{v-k+1} C_{v-k+1}^{2v+1} E^{v+k} + (-1)^{v+k} C_{v+k}^{2v+1} E^{v-k+1} \right].$$

Substituindo-se v por $v-1$, obtemos a expressão seguinte,
que nos será útil :

$$(E-1)^{2v-1} = \sum_{k=1}^v \left[(-1)^{v-k} C_{v-k}^{2v-1} E^{v+k-1} + (-1)^{v+k-1} C_{v+k-1}^{2v-1} E^{v-k} \right].$$

CAPÍTULO TERCEIRO

EXPRESSÕES PARTICULARES DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS

GENERALIDADES

1. Caso em que todos argumentos são nulos, a exceção de um.
2. Caso em que todos os argumentos são nulos.
3. Caso em que os argumentos estão ordenados.
4. Caso em que os argumentos são da forma $a_v = v$.
5. Caso em que os argumentos são da forma $a_v = -v$.
6. Cálculo metódico das diferenças divididas.
7. Funções produtos de argumentos entre si.
8. Caso em que os argumentos são da forma $a_{2v-1} = -v$ e $a_{2v} = v$.
9. Caso em que os argumentos são da forma $a_{2v-1} = v$ e $a_{2v} = -v$.

CAPÍTULO TERCEIRO

EXPRESSÕES PARTICULARES DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS

As diferenças divididas dependem da série de valores

$$(1) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

e tomam formas particulares, algumas das quais importantes de se conhecer, quando assumimos também para (1) uma forma particular.

No estudo destes casos particulares, é-nos útil uma transformação da expressão da diferença dividida sob a forma de uma integral p-upla.

Obtivemos no capítulo anterior a expressão

$$f(a_0 | a_1 | \dots | a_p) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} \left[a_0 t_p - \sum_1^p a_v \nabla t_v \right] dt_p .$$

Sendo $f(a_0 | a_1 | \dots | a_p)$ simétrica em relação aos seus argumentos, poderíamos escrever

$$f(a_0 | a_1 | \dots | a_p) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} \left[a_p t_p - \sum_1^p a_{v-1} \nabla t_v \right] dt_p .$$

Por outro lado

$$a_p t_p - \sum_1^p a_{v-1} \nabla t_v = a_0 + \sum_1^p t_v \nabla a_v$$

donde o aspeto final

$$f(a_0 | a_1 | \dots | a_p) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} \left[a_0 + \sum_1^p t_v \nabla a_v \right] dt_p .$$

Posto isto, vejamos os seguintes casos :

1. TODOS OS ARGUMENTOS SÃO NULOS, A EXCEÇÃO DE UM.

Neste caso, temos

$$a_0 = x, a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$$

$$a_0 + \sum_1^p t_v \nabla a_v = x (1-t_1) ,$$

donde o aspeto

$$f(x | 0 | \dots | 0) = \int_0^1 f^{(p)} \left[x (1-t_1) \right] dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} dt_p .$$

Efetuando-se a integração das $(p-1)$ ultimas integrais, temos

$$f(x | 0 | \dots | 0) = \frac{1}{p-1} \int_0^1 t_1^{p-1} f^{(p)} \left[x(1-t_1) \right] dt_1 .$$

2. TODOS OS ARGUMENTOS SÃO NULOS.

Nesta hipótese, virá

$$a_0 + \sum_1^p t_v \nabla a_v = 0 .$$

Para a diferença dividida de ordem p virá então

$$f(0 | 0 | \dots | 0) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} (0) dt_p = \frac{f^p (0)}{p} .$$

3. OS ELEMENTOS $a_0, a_1, \dots, a_p$ ESTÃO ORDENADOS.

Neste caso, suponhamos

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_p .$$

A expressão

$$a_o + \sum_1^p t_v \nabla a_v = a_o + (a_1 - a_o) t_1 + \dots + (a_p - a_{p-1}) t_p$$

verifica, uma vez que

$$0 \leq t_i \leq 1 ,$$

a desigualdade

$$a_o \leq a_o + \sum_1^p t_v \nabla a_v \leq a_p .$$

Sendo ξ um numero compreendido entre a_o e a_p , podemos escrever

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} \left[a_o + \sum_1^p t_v \nabla a_v \right] dt_p = \frac{f^{(p)}(\xi)}{p}$$

donde

$$f(a_o | a_1 | \dots | a_p) = \frac{f^{(p)}(\xi)}{p} \quad \begin{matrix} a_o \leq a_1 \leq \dots \leq a_p \\ a_o \leq \xi \leq a_p . \end{matrix}$$

4. OS ARGUMENTOS a_v SÃO DE FORMA $a_v = v$.

Si fizermos

$$a_v = v, \text{ temos}$$

$$a_o + \sum_1^p t_v \nabla a_v = t_1 + t_2 + \dots + t_p$$

donde

$$f(0 | 1 | 2 | \dots | p) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{p-1}} f^{(p)} (t_1 + t_2 + \dots + t_p) dt_p .$$

Integrando-se esta expressão para $p = 1, 2, 3$ etc. obtemos sucessivamente

a) $p = 1$

$$f(0|1) = \int_0^1 f'(t_1) dt_1 = f(1) - f(0) = \Delta f(0)$$

b) $p = 2$

$$f(0|1|2) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} f''(t_1+t_2) dt_2 = \int_0^1 \left[f'(t_1+t_2) \right]_0^{t_1} dt_1 = \int_0^1 f'(2t_1) dt_1 - \int_0^1 f'(t_1) dt_1$$

ou, ainda,

$$f(0|1|2) = \frac{f(2)-f(0)}{2} - \Delta f(0) = \frac{f(2)-2f(1)+f(0)}{2} = \frac{(E-1)^2 f(0)}{2} = \frac{\Delta^2 f(0)}{2}$$

c) para $p = 3$ acharíamos sem dificuldade

$$f(0|1|2|3) = \frac{\Delta^3 f(0)}{3}$$

Admitamos esta expressão verdadeira para p e vejamos si o é para $p+1$.

Temos

$$f(0|1|2|\dots|p|p+1) = \frac{f(1|2|\dots|p|p+1) - f(0|1|\dots|p)}{p+1}$$

por outro lado

$$f(0|1|2|\dots|p) = \frac{\Delta^p f(0)}{p}$$

$$f(1|2|\dots|p|p+1) = E f(0|1|2|\dots|p) = \frac{E \Delta^p f(0)}{p} = \frac{\Delta^p f(1)}{p},$$

visto que

$$a_v = E^v \cdot a_o,$$

donde

$$f(0|1|\dots|p|p+1) = \frac{\frac{\Delta^p f(1)}{p} - \frac{\Delta^p f(0)}{p}}{p+1} = \frac{\Delta^p (f(1)-f(0))}{p+1} = \frac{\Delta^{p+1} f(0)}{p+1}$$

5. OS ARGUMENTOS a_v VERIFICAM A CONDIÇÃO $a_v = -v$.

Fazendo-se $a_v = -v$, obteríamos por um cálculo absolutamente análogo

$$f(0|-1|-2|\dots|-p) = \frac{\nabla^p f(0)}{p!}$$

6. Antes de prosseguirmos no estudo destas expressões gerais, vejamos um processo para calcularmos de forma metódica a diferença dividida de uma certa função $f(a)$ no ponto a_0 para uma série dada de argumentos

$$a_0, a_1, \dots, a_p.$$

Seja o exemplo :

Calcular as diferenças divididas de $f(a_0)$ até 6ª ordem para a seguinte série de argumentos :

$$\begin{aligned} a_{2v-1} &= -v \\ v &= 0, 1, 2, \dots, p. \\ a_{2v} &= v, \end{aligned}$$

Formamos preliminarmente um quadro, onde registramos nas linhas I e II respetivamente os argumentos a_i e seus valores correspondentes.

Nas colunas intituladas $a_0, a_1, \dots, a_p$, registramos, em cada linha, as diferenças do argumento-título com todos os restantes. Estas linhas estão designadas por

$$a_0 - a_i, a_1 - a_i, \dots, a_p - a_i.$$

A diferença de a_i com ele próprio não se registra e o seu lugar está preenchido com um traço.

Em seguida, nas colunas $p=1, p=2$, etc., escrevemos os produtos das diferenças que se acham em cada linha, tomando-se para $p=1$ só a primeira diferença a partir da esquerda, para $p=2$ as duas primeiras e assim sucessivamente, acrescentando uma diferença, como fator, para cada unidade a mais no valor de p .

Os produtos obtidos são divisores de $f(a_i)$ na expressão :

$$f(a_0|a_1|\dots|a_p) = \sum_{i=0}^p \frac{f(a_i)}{p_{a_i}}$$

com

$$p_{a_i} = (a_i - a_0) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_p) .$$

Com estes esclarecimentos, podemos interpretar o quadro anexo 1.

Desse quadro I, tiramos as seguintes expressões para as diferenças divididas de $f(a_0)$ até 6ª ordem.

QUADRO I.

I	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6			p_{a_i}			
II	0	-1	1	-2	2	-3	3	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$
0	—	1	-1	2	-2	3	-3	-1	-1	-2	4	12	-36
1	-1	—	-2	1	-3	2	-4	-1	2	+2	-6	-12	48
2	1	2	—	3	-1	4	-2		2	6	-6	-24	48
3	-2	-1	-3	—	-4	1	-5			-6	24	24	-120
4	2	3	1	4	—	5	-1				24	120	-120
5	-3	-2	-4	-1	-5	—	-6					-120	720
6	3	4	2	5	1	6	—						720

QUADRO II.

<i>I</i>	<i>a</i> ₀	<i>a</i> ₁	<i>a</i> ₂	<i>a</i> ₃	<i>a</i> ₄	<i>a</i> ₅	<i>a</i> ₆			<i>p</i> _{<i>a</i>_{<i>i</i>}}			
<i>II</i>	0	1	-1	2	-2	3	-3	<i>p</i> =1	<i>p</i> =2	<i>p</i> =3	<i>p</i> =4	<i>p</i> =5	<i>p</i> =6
0	—	-1	1	-2	2	-3	3	-1	-1	2	4	-12	-36
1	1	—	2	-1	3	-2	4	1	2	-2	-6	12	48
2	-1	-2	—	-3	1	-4	2		2	-6	-6	24	48
3	2	1	3	—	4	-1	5			-6	24	-24	-120
4	-2	-3	-1	-4	—	-5	1				24	-120	-120
5	3	2	4	1	5	—	6					120	720
6	-3	-4	-2	-5	-1	-6	—						720

$$f(0|-1) = \frac{f(0)}{1} + \frac{f(-1)}{-1} = \Delta f(-1)$$

$$f(0|-1|1) = \frac{f(0)}{-1} + \frac{f(-1)}{2} + \frac{f(1)}{2} = \frac{\Delta^2 f(-1)}{2}$$

$$f(0|-1|1|-2) = \frac{f(0)}{-2} + \frac{f(-1)}{2} + \frac{f(1)}{6} + \frac{f(-2)}{-6} = \frac{\Delta^3 f(-2)}{6}$$

$$f(0|-1|1|-2|2) = \frac{f(0)}{4} + \frac{f(-1)}{-6} + \frac{f(1)}{-6} + \frac{f(-2)}{24} + \frac{f(2)}{24} = \frac{\Delta^4 f(-2)}{24}$$

$$f(0|-1|1|-2|2|-3) = \frac{f(0)}{12} + \frac{f(-1)}{-12} + \frac{f(1)}{-24} + \frac{f(-2)}{24} + \frac{f(2)}{120} + \frac{f(-3)}{-120} = \frac{\Delta^5 f(-3)}{120}$$

$$f(0|-1|1|-2|2|-3|3) = \frac{f(0)}{-36} + \frac{f(-1)}{48} + \frac{f(1)}{48} + \frac{f(-2)}{-120} + \frac{f(2)}{-120} + \frac{f(-3)}{720} + \frac{f(3)}{-720} = \frac{\Delta^6 f(-3)}{720}$$

A inspeção deste quadro I mostra-nos que

$$f(a_0 | a_1 | \dots | a_{2v-1}) = \frac{\Delta^{2v-1} f(-v)}{|2v-1|}$$

$$f(a_0 | a_1 | \dots | a_{2v}) = \frac{\Delta^{2v} f(-v)}{|2v|}$$

Do quadro II tiramos

$$f(0 | 1) = \frac{f(0)}{-1} + \frac{f(1)}{1} = \Delta f(0)$$

$$f(0 | 1 | -1) = \frac{f(0)}{-1} + \frac{f(1)}{2} + \frac{f(-1)}{2} = \frac{\Delta^2 f(-1)}{2}$$

$$f(0 | 1 | -1 | 2) = \frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{-2} + \frac{f(-1)}{-6} + \frac{f(2)}{6} = \frac{\Delta^3 f(-1)}{6}$$

e no caso geral

$$f(a_0 | a_1 | \dots | a_{2v-1}) = \frac{\Delta^{2v-1} f(-v+1)}{|2v-1|}$$

$$f(a_0 | a_1 | \dots | a_{2v}) = \frac{\Delta^{2v} f(-v)}{|2v|}$$

7. Para generalisarmos estas expressões, temos de resolver preliminarmente os seguintes problemas :

Dadas as séries (a) e (b)

(a) $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots, -k, k, \dots, -v, v$

(b) $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots, k, -k, \dots, -v+1, v-1, -v.$

calcular o producto das diferenças de um termo genérico com os restantes em cada uma destas séries.

Façamos

$$P_a(x) = \prod'_o{}^v (x+j) (x-j)$$

$$P_b(x) = (x+v) \prod'_o{}^{v-1} (x+j) (x-j)$$

onde o apóstrofe indica a exclusão do valor particular $j = x$.

Os produtos desejados não são mais do que as expressões

$$P_a(-k), P_a(k), P_b(-k), P_b(k),$$

pois que estas expressões são denominadores que aparecem na expressão de $f(a_0|a_1|\dots|a_p)$ sob fórmula de soma de frações.

Calculemos sucessivamente estes produtos.

Temos

$$P_a(-k) = \prod_0^v (-k+j) (-k-j) = \prod_0^v (-k-j) \cdot \prod_1^v (-k+j).$$

Mas

$$\prod_0^v (-k-j) = (-1)^{v+1} \frac{|v+k|}{|k-1|}$$

$$\prod_1^v (-k+j) = \prod_1^{v-1} (-k+j) \prod_{k+1}^v (-k+j)$$

$$\prod_1^{k-1} (-k+j) = (-1)^{k-1} \prod_1^{k-1} (k-j) = (-1)^{k-1} |k-1|$$

$$\prod_{k+1}^v (-k+j) = |v-k|$$

donde

$$P_a(-k) = (-1)^{v+1} \frac{|v+k|}{|k-1|} \cdot (-1)^{k-1} |k-1| |v-k| = (-1)^{v+k} |v+k| |v-k|$$

observando-se que $(-1)^{v+k} = (-1)^{v-k}$, vemos que esta expressão é simétrica em relação a k e $-k$, donde poderíamos tirar

$$P_a(k) = (-1)^{v-k} |v+k| |v-k|$$

Aliás a dedução directa desta expressão não oferece dificuldade, como vemos

$$\begin{aligned} P_a(k) &= \prod_0^v (k+j) (k-j) = \prod_0^v (k+j) \cdot \prod_1^v (k-j) = \\ &= \frac{|v+k|}{|k-1|} \cdot |k-1| \cdot (-1)^{v-k} |v-k| = (-1)^{v-k} |v+k| |v-k| \end{aligned}$$

Destas relações concluímos para $P_b(-k)$ e $P_b(k)$ as expressões:

$$P_b(-k) = (-k+v) (-1)^{v+k-1} \underline{v+k-1} \underline{v-k-1} = (-1)^{v+k-1} \underline{v+k-1} \underline{v-k}$$

$$P_b(k) = (-1)^{v+k-1} (k+v) \underline{v+k-1} \underline{v-k-1} = (-1)^{v+k-1} \underline{v+k} \underline{v-k-1} .$$

Da mesma forma obteríamos para as series

$$(a_1) \ 0, 1, -1, 2, -2, \dots, k, -k, \dots, v, -v$$

$$(b_1) \ 0, 1, -1, 2, -2, \dots, k, -k, \dots, v,$$

as expressões

$$P_{a_1}(-k) = \prod_0^v (-k-j) = \prod_0^v (-k-j) \cdot \prod_1^{k-1} (-k+j) \cdot \prod_{k+1}^v (-k+j) =$$

$$= (-1)^{v+1} \frac{\underline{v+k}}{k-1} \cdot (-1)^{k-1} \underline{k-1} \underline{v-k} = (-1)^{v+k} \underline{v+k} \underline{v-k}$$

$$P_{a_1}(k) = (-1)^{v+k} \underline{v+k} \underline{v-k}$$

$$P_{b_1}(-k) = (-k-v) (-1)^{v-k-1} \underline{v-k-1} \underline{v+k-1} = (-1)^{v-k} \underline{v+k} \underline{v-k-1}$$

$$P_{b_1}(k) = (k-v) (-1)^{v-k-1} \underline{v-k-1} \underline{v+k-1} = (-1)^{v-k} \underline{v+k-1} \underline{v-k} .$$

Estas expressões podem ser transformadas de acordo com a fórmula da combinação de m objetos tomados p a p :

$$C_p^m = \frac{\underline{m}}{\underline{p} \underline{m-p}}$$

Utilizando esta relação obtemos as seguintes fórmulas finais:

$$P_a(-k) = (-1)^{v-k} \frac{\underline{2v}}{C_{v-k}^{2v}} \quad P_{a_1}(-k) = (-1)^{v-k} \frac{\underline{2v}}{C_{v-k}^{2v}}$$

$$P_b(-k) = (-1)^{v+k-1} \frac{\underline{2v-1}}{C_{v+k-1}^{2v-1}} \quad P_{b_1}(-k) = (-1)^{v-k} \frac{\underline{2v-1}}{C_{v+k}^{2v-1}}$$

$$P_b(k) = (-1)^{v+k-1} \frac{\underline{2v-1}}{C_{v+k}^{2v-1}} \quad P_{b_1}(k) = (-1)^{v-k} \frac{\underline{2v-1}}{C_{v+k-1}^{2v-1}}$$

8. Consideremos as expressões gerais de $f(a_0|a_1|\dots|a_{2v})$ e $f(a_0|a_1|\dots|a_{2v-1})$ para a série de argumentos

$$a_{2v-1} = -v, \quad a_{2v} = v.$$

De acordo com as relações anteriores, podemos escrever

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v}) = \frac{f(o)}{P_a(o)} + \sum_1^v \left[\frac{f(-k)}{P_a(-k)} + \frac{f(k)}{P_a(k)} \right]$$

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v-1}) = \sum_{k=0}^{v-1} \left[\frac{f(k)}{P_b(k)} + \frac{f(-k-1)}{P_b(-k-1)} \right] = \sum_{k=1}^v \left[\frac{f(k-1)}{P_b(k-1)} + \frac{f(-k)}{P_b(-k)} \right].$$

Observando-se que

$$f(x) = E^{v+x} f(-v),$$

temos ainda

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v-1}) = \left[\frac{E^v}{P_a(o)} + \sum_1^v \left[\frac{E^{v-k}}{P_a(-k)} + \frac{E^{v+k}}{P_a(k)} \right] \right] f(-v) = A f(-v)$$

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v-1}) = \left[\sum_{k=1}^v \left[\frac{E^{v+k-1}}{P_b(k-1)} + \frac{E^{v-k}}{P_b(-k)} \right] \right] f(-v) = B f(-v)$$

Introduzindo nas expressões entre colchetes os valores de P_a e P_b obtemos

$$A = \frac{1}{[2v]} \left[(-1)^v C_v^{2v} E^v + \sum_1^v \left[(-1)^{v+k} C_{v-k}^{2v} E^{v-k} + (-1)^{v-k} C_{v+k}^{2v} E^{v-k} \right] \right] = \frac{(E-1)^{2v}}{[2v]},$$

$$B = \frac{1}{[2v-1]} \left[\sum_1^v \left[(-1)^{v+k} C_{v+k}^{2v-1} E^{v+k-1} + (-1)^{v+k-1} C_{v-k}^{2v-1} E^{v-k} \right] \right] = \frac{(E-1)^{2v-1}}{[2v-1]}$$

donde para as expressões desejadas o aspeto

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v}) = \frac{\Delta^{2v} f(-v)}{[2v]}$$

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v-1}) = \frac{\Delta^{2v-1} f(-v)}{[2v-1]}$$

9. Vejamos agora, as diferenças divididas para a série de argumentos definida por

$$a_{2v-1} = v, \quad a_{2v} = -v.$$

Temos

$$f(a_0|a_1|a_{2v}) = \frac{f(o)}{P_{a_1}(0)} + \sum_1^v \left[\frac{f(-k)}{P_{a_1}(-k)} + \frac{f(k)}{P_{a_1}(k)} \right]$$

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v-1}) = \sum_{k=0}^{v-1} \left[\frac{f(k)}{P_{b_1}(-k)} + \frac{f(k+1)}{P_{b_1}(k+1)} \right] = \sum_{k=1}^v \left[\frac{f(-k+1)}{P_{b_1}(-k+1)} + \frac{f(k)}{P_{b_1}(k)} \right]$$

Observando-se que

$$f(x) = E^{x+v} f(-v)$$

$$f(x) = E^{x+v-1} f(-v+1),$$

temos ainda,

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v}) \left[= \frac{E^v}{P_{a_1}(0)} + \sum_1^v \left[\frac{E^{v-k}}{P_{a_1}(k)} + \frac{E^{v+k}}{P_{a_1}(-k)} \right] \right] f(-v) = A_1 f(-v)$$

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v-1}) \left[= \sum_1^v \left[\frac{E^{v-k}}{P_{b_1}(-k+1)} + \frac{E^{v+k-1}}{P_{b_1}(k)} \right] \right] f(-v+1) = B_1 f(-v+1)$$

Introduzindo nas expressões entre colchetes os valores de P_{a_1} e P_{b_1} , obtemos

$$A_1 = \frac{1}{[2v]} \left[(-1)^v C_v^{2v} E^v + \sum_1^v \left[(-1)^{v+k} C_{v-k}^{2v} E^{v-k} + (-1)^{v-k} C_{v+k}^{2v} E^{v+k} \right] \right] = \frac{(E-1)^{2v}}{[2v]}$$

$$B_1 = \frac{1}{[2v-1]} \left[\sum_1^v \left[(-1)^{v-k+1} C_{v-k}^{2v-1} E^{v-k} + (-1)^{v-k} C_{v+k-1}^{2v} E^{v+k-1} \right] \right] = \frac{(E-1)^{2v-1}}{[2v-1]}$$

Destas expressões concluímos

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v}) = \frac{\Delta^{2v} f(-v)}{[2v]}$$

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v-1}) = \frac{\Delta^{2v-1} f(-v+1)}{[2v-1]}$$

CAPÍTULO IV

FÓRMULAS DE EXPANSÃO

1. Generalidades.
2. Operadores.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

CAPÍTULO QUARTO

FÓRMULAS DE EXPANSÃO

1. Seja $f(x)$ um polinômio de grau n , qualquer e

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$$

uma sequência de $(n+1)$ polinômios dados, cujos graus são denotados pelos seus índices.

Dispondo de $(n+1)$ constantes arbitrárias, podemos escrever identicamente

$$(1) \quad f(x) = c_0 P_0 + c_1 P_1 + \dots + c_n P_n = \sum_{v=0}^n c_v P_v(x) .$$

Seja Θ um operador que, atuando sobre um polinômio de grau $k, k > 0$, o reduz a um outro polinômio de grau $(k-1)$ e, que, aplicado a uma constante, dê como resultado zero.

Teríamos

$$\Theta P_k(x) = P_{k-1}(x) , \quad k > 0 ,$$

$$\Theta P_0(x) = 0 .$$

Aplicando-se este operador Θ sucessivamente a $f(x)$, teríamos

$$\Theta f(x) = c_1 Q'_0(x) + c_2 Q'_{-1}(x) + \dots + c_n Q'_{n-1}(x)$$

$$(2) \quad \Theta^2 f(x) = c_2 Q''_0(x) + c_3 Q''_{-1}(x) + \dots + c_n Q''_{n-1}(x)$$

$$\Theta^n f(x) = c_n Q^{(n)}(x) ,$$

onde os apóstrofes não denotam derivações.

Fazendo-se $x = 0$ podemos exprimir $c_1, c_2, \dots, c_n$ em função dos valores de $\Theta f(0), \Theta^2 f(0), \dots, \Theta^n f(0)$. Por outro lado, da equação

$$(3) \quad f(0) = \sum_{v=0}^n c_v P_v(0)$$

podemos obter c_0 em função de $\Theta f(0), \dots, \Theta^n f(0)$.

Daqui resulta para $f(x)$ a expressão seguinte em função do operador Θ

$$f(x) = \sum_{v=0}^{v=n} a_v \Theta^v f(0),$$

onde os a_v são funções de x , obtidas, introduzindo-se os valores de $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ em (1) e ordenando esta expressão em relação às potências do operador Θ .

2. Operadores Θ .

As equações

$$\begin{aligned} \Theta P_k(x) &= Q_{k-1}(x) & k > 0 \\ \Theta P_0(x) &= 0 \end{aligned}$$

definem um operador Θ gozando da propriedade de transformar, para $k > 0$, o polinômio P_k em um outro Q_{k-1} e dar um resultado nulo, quando aplicado a uma constante.

Tais sejam as formas de P_k e Q_{k-1} , poderá resultar para Θ uma expressão puramente formal, dada apenas pela sua definição.

Entretanto, há formas particulares de $P_k(x)$, para as quais o operador Θ se reduz a operadores já conhecidos. Entre esses operadores, apresentam particular interesse aqueles para os quais temos

$$Q_{k-1}(x) = k P_{k-1}(x),$$

donde para Θ a expressão

$$\Theta P_k(x) = k P_{k-1}(x).$$

Poderíamos dar a este problema um outro aspeto. Supor Θ um dos operadores de abaixamento de gráu, $D, \Delta, \nabla, \delta$ e verificar qual seria a forma de $P_k(x)$ correspondente.

Assim para $\Theta = D$, teríamos

$$D P_k(x) = k P_{k-1}(x).$$

Ora, o polinômio que goza desta propriedade é da forma

$$P_k(x) = x^k .$$

Para $\Theta = \Delta$, deveríamos ter

$$\Delta P_k(x) = k P_{k-1}(x) .$$

E' facil ver que o polinômio

$$P_k(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-(k-1))$$

goza dessa propriedade, quando o intervalo de diferenciação finita é igual á unidade.

Com efeito

$$\begin{aligned} \Delta P_k(x) &= P_k(x+1) - P_k(x) = (x+1)(x)\dots(x-(k-2)) - x(x-1)\dots(x-(k-1)) = \\ &= x(x-1)\dots(x-(k-2)) [x+1-(x-(k-1))] = kx(x-1)\dots(x-(k-2)) = kP_{k-1}(x) . \end{aligned}$$

Para $\Theta = \nabla$ teremos

$$\nabla P_k(x) = k P_{k-1}(x) .$$

Esta propriedade é verificada para o polinômio :

$$P_k(x) = x(x+1) \dots (x+(k-1)) ,$$

sendo o intervalo da diferenciação igual à unidade.

Temos com efeito :

$$\begin{aligned} \nabla P_k(x) &= P_k(x) - P_k(x-1) = x(x+1)\dots(x+(k-1)) - (x-1)(x)(x+1)\dots(x+ \\ &+ (k-2)) = x(x+1) \dots (x+(k-2)) [x+(k-1) - (x-1)] = \\ &= kx(x+1)\dots(x+(k-2)) \end{aligned}$$

ou seja $\nabla P_k(x) = k P_{k-1}(x) .$

Para $\Theta = \delta = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}})$, deveríamos ter

$$\delta P_k(x) = k P_{k-1}(x) .$$

O polinômio

$$P_k(x) = x(x + \frac{k}{2} - 1)(x + \frac{k}{2} - 2)\dots(x + \frac{k}{2} - (k-1))$$

goza desta propriedade, como podemos ver

$$\delta P_k(x) = (E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}) P_k(x)$$

Mas

$$E^{-\frac{1}{2}} P_k(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{k}{2} - \frac{3}{2}\right) \dots \left(x + \frac{k}{2} - \frac{2k-3}{2}\right)$$

$$E^{-\frac{1}{2}} P_k(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{k}{2} - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{k}{2} - \frac{5}{2}\right) \dots \left(x + \frac{k}{2} - \frac{2k-1}{2}\right).$$

Por diferença, obtemos, pondo em evidência os fatores comuns, a expressão seguinte :

$$\begin{aligned} \delta P_k(x) &= \left(x + \frac{k}{2} - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{k}{2} - \frac{5}{2}\right) \dots \left(x + \frac{k}{2} - \frac{2k-3}{2}\right) \times \\ &\times \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{k}{2} - \frac{2k-1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Desenvolvendo-se os produtos entre chaves, achamos

$$\begin{aligned} &\left[\left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{k}{2} - \frac{2k-1}{2}\right) \right] = \\ &= x^2 - \frac{1}{4} + \frac{k}{2} \left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x^2 - \frac{1}{4} - \frac{k}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = k x \end{aligned}$$

donde

$$\delta P_k(x) = k x \left(x + \frac{k}{2} - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{k}{2} - \frac{5}{2}\right) \dots \left(x + \frac{k}{2} - \frac{2k-3}{2}\right).$$

Observando-se que

$$x + \frac{k}{2} - \frac{3}{2} = x + \frac{k-1}{2} - 1$$

$$x + \frac{k}{2} - \frac{5}{2} = x + \frac{k-1}{2} - 2$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$x + \frac{k}{2} - \frac{2k-3}{2} = x + \frac{k-1}{2} - (k-1) - 1,$$

vemos que

$$x \left(x + \frac{k}{2} - \frac{3}{2} \right) \left(x + \frac{k}{2} - \frac{5}{2} \right) \dots \left(x + \frac{k}{2} - \frac{2k-3}{2} \right) = P_{k-1}(x) ,$$

de que concluímos a proposição enunciada :

$$\delta P_k(x) = k P_{k-1}(x) .$$

Para distinguirmos esses diferentes polinômios, vamos adotar uma notação evocativa de suas propriedades, assim

$$D_k(x) = x^k$$

$$\Delta_k(x) = x(x+1) \dots (x+(k-1))$$

$$\nabla_k(x) = x(x-1) \dots (x-(k-1))$$

$$\delta_k(x) = x \left(x + \left(\frac{k}{2} - 1 \right) \right) \dots \left(x + \left(\frac{k}{2} - (k-1) \right) \right) .$$

Se fizermos sucessivamente

$$f(x) = \sum_{v=0}^{v=n} p_v D_v(x)$$

$$f(x) = \sum_{v=0}^n q_v \Delta_v(x)$$

$$f(x) = \sum_{v=0}^n r_v \nabla_v(x)$$

$$f(x) = \sum_{v=0}^n s_v \delta_v(x)$$

onde p_v, q_v, r_v, s_v desempenham o papel das constantes c_i , achamos

$$D^k f(o) = \underline{k} p_k$$

$$\Delta^k f(o) = \underline{k} q_k$$

$$\nabla^k f(o) = \underline{k} r_k$$

$$\delta^k f(o) = \underline{k} s_k ,$$

donde para $f(x)$ as expressões

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{D^v f(o)}{\underline{v}} D_v(x)$$

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{\Delta^v f(o)}{\underline{v}} \Delta_v(x)$$

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{\nabla^v f(o)}{\underline{v}} \nabla_v(x)$$

$$f(x) = \sum_{v=0}^n \frac{\delta^v f(o)}{\underline{v}} \delta_v(x) .$$

Estas fórmulas recebem o nome de fórmulas de expansão de um polinômio $f(x)$ segundo as potências dos operadores D, Δ, ∇ e δ .

CÁLCULO OPERATÓRIO

PARTE SEGUNDA

CÁLCULO SOMATÓRIO **FÓRMULAS DE SOMAÇÃO**

CAPÍTULO I

Generalidades.

1. Soma dos n primeiros termos de uma série.
2. Soma dos termos de uma série de ordem $1, k, 2k, \dots, nk,$.
3. Somação $[n]$.

Exemplos de Somação.

CAPÍTULO II

Métodos particulares de Somação.

1. Generalidades
2. Somação sucessiva
3. Somação repetida.

CAPÍTULO III

Somação imediata.

CAPÍTULO IV

1. Expressão de uma integral definida entre limites finitos por meio de diferenças finitas.
2. Transformação da fórmula de integração.

CAPÍTULO PRIMEIRO

Generalidades.

1. Soma dos n primeiros termos de uma série.
2. Soma dos termos de uma série de ordem $1, k, 2k, \dots, nk$.
3. Somação $[n]$.

CÁLCULO SOMATÓRIO

GENERALIDADES

O cálculo somatório tem por objeto efetuar a soma dos termos de uma série dada segundo uma ordem determinada, característica desta soma S . Como um termo qualquer da série a ser somada

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

pode ser expresso em função de um termo dado X_α por meio de potências do operador E de deslocamento, a soma dos termos da série dada será o resultado da operação sobre X_α de um operador, polinômio em E .

Este polinômio em E , seja $\varphi(E)$, operando sobre X_α , produz uma grandeza

$$Y_\alpha = S.$$

Entre X_α e Y_α teremos as relações

$$Y_\alpha = \varphi(E) X_\alpha$$

$$X_\alpha = \varphi^{-1}(E) Y_\alpha$$

As séries (1) e (2) do § 1 reduzem-se neste caso a X_α e Y_α respetivamente. A soma S será pois caracterizada pela forma do operador $\varphi(E)$.

Passaremos em revista alguns tipos principais de somação.

SOMA DOS n PRIMEIROS TERMOS DE UMA SÉRIE.

Seja a série

$$U_1, U_2, \dots, U_n.$$

Queremos obter a soma S_n dos n primeiros termos desta série.

Esta soma é por definição

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \sum_{i=1}^{i=n} U_i$$

Observando-se que $U_i = E^{i-1} U_1$, podemos escrever

$$S_n = [1 + E + E^2 + \dots + E^{n-1}] U_1 = \varphi(E) U_1 .$$

O operador φE tem neste caso para expressão

$$\varphi(E) = \frac{E^n - 1}{E - 1} .$$

A operação inversa será definida por

$$\varphi^{-1}(E) = \frac{E - 1}{E^n - 1} .$$

Para o cálculo da relação inversa é cômodo introduzir o operador ϑ definido por

$$1 + \vartheta = E^n$$

Nestas condições $\varphi^{-1}(E)$ toma a expressão $\Phi(\vartheta)$ em função de ϑ

$$\varphi^{-1}(E) = \Phi(\vartheta) = \frac{\sqrt[n]{1 + \vartheta} - 1}{\vartheta}$$

Quando os termos U_i são da forma

$$U_i = \Delta V_i ,$$

a somatória S_n toma um aspeto particular.

Com efeito: das relações

$$V_i = E^{i-1} V_1$$

$$U_i = \Delta V_i = \Delta E^{i-1} V_1 = E^{i-1} \Delta V_1$$

temos

$$S_n = \frac{E^n - 1}{E - 1} U_1 = (E^n - 1) V_1$$

O operador $(E^n - 1)$, operando sobre a primitiva de U_1 , nos dá S_n .

A inversão deste operador pode apresentar algum interesse.

Teremos por ela

$$V_1 = \frac{1}{E^n - 1} S_n = -(1 - E^n)^{-1} S_n = -(1 + E^n + E^{2n} + \dots) S_n$$

SOMA DOS TERMOS DE UMA SERIE DE ORDEM
1, k, 2k, ..., nk.

Teremos

$$S_n = (1 + E^{k-1} + E^{2k-1} + \dots + E^{nk-1}) U_1 = \frac{E^{nk}-1}{E^k-1} U_1 .$$

Se tivermos

$$U_1 = (E^k-1) V_1,$$

resultará

$$S_n = (E^{nk}-1) V_1 .$$

SOMAÇÃO [n].

Esta somação tem por definição o operador

$$[n] = \varphi(E) = \frac{E^{\frac{n}{2}} - E^{-\frac{n}{2}}}{E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}} .$$

Ela corresponde ao desenvolvimento da fração imprópria, que a define. Para obtermos este desenvolvimento, façamos

$$E^{\frac{1}{2}} = u$$

$$E^{-\frac{1}{2}} = v .$$

Virá por substituição

$$\begin{aligned} \frac{E^{\frac{n}{2}} - E^{-\frac{n}{2}}}{E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}} &= \frac{u^n - v^n}{u - v} = u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + u^{n-k-1}v^k + \dots + \\ &+ u^k v^{n-k-1} + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1} \end{aligned}$$

ou, então, voltando às expressões primitivas,

$$\begin{aligned} \varphi(E) &= E^{\frac{n-1}{2}} + E^{\frac{n-3}{2}} + \dots + E^{\frac{n-(2k+1)}{2}} + \dots + E^{\frac{-n+(2k+1)}{2}} + \dots + \\ &+ E^{\frac{-n+3}{2}} + E^{\frac{-n+1}{2}} \end{aligned}$$

Para n ímpar e igual a $2p+1$, esta soma teria por expressão

$$(1) \quad [2p+1] = E^p + E^{p-1} + \dots + E^0 + \dots + E^{-p+1} + E^{-p}.$$

Para n par e igual $2p$, virá para seu aspeto

$$(2) \quad [2p] = E^{p-\frac{1}{2}} + E^{p-\frac{3}{2}} + \dots + E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}} + E^{-p+\frac{3}{2}} + E^{-p+\frac{1}{2}}.$$

Os termos que entram na expressão de (1) acham-se todos na tabela de valores U , sobre o qual estamos operando; ao passo que, para (2), teremos necessidade de calcular expressões de tipo

$$E^{\frac{1}{2}} \text{ e } E^{-\frac{1}{2}}.$$

Estas expressões são facilmente obtidas, atendo-se à relação $E = 1 + \Delta$, o que nos dá

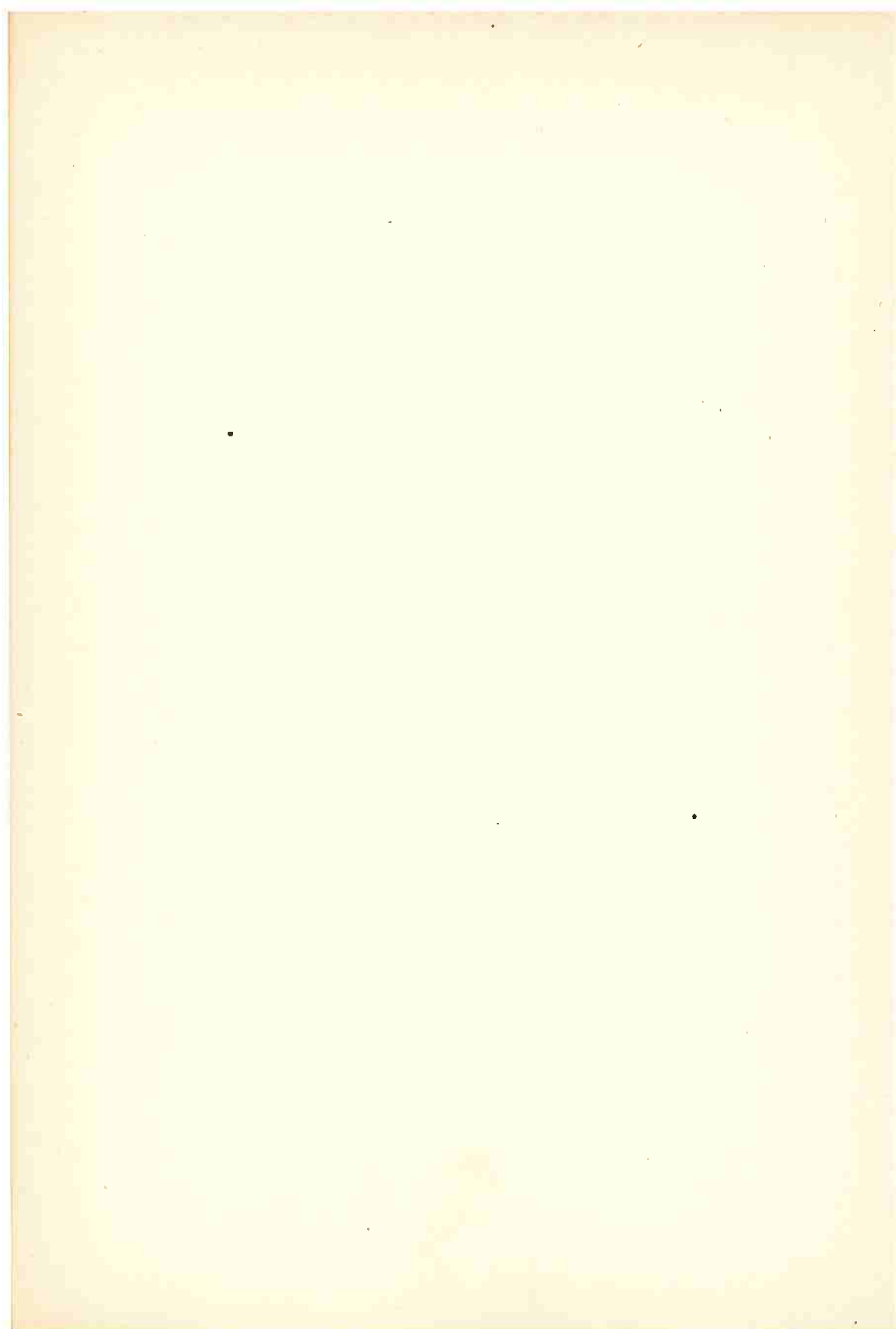
$$E^{\frac{1}{2}} = (1 + \Delta)^{\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)_k \Delta^k$$

$$E^{-\frac{1}{2}} = (1 + \Delta)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)_k \Delta^k.$$

CAPÍTULO SEGUNDO

Métodos particulares de Somação

1. Generalidades
2. Somação sucessiva.
3. Somação repetida.



MÉTODOS PARTICULARES DE SOMAÇÃO

No capítulo anterior, vimos que a somação de n termos consecutivos de uma série, seja

$$S_n = \Phi(E) U_1 = \frac{E^n - 1}{E - 1} U_1 ,$$

toma uma forma particularmente simples, quando conhecemos uma função V_i tal que

$$\Delta V_i = U_i .$$

A função V_i resulta determinada, a menos de uma grandeza ópero-nula, pela relação

$$V_i = \Delta^{-1} U_i .$$

Para resolvermos este problema da determinação da primitiva de U_i , vamos utilizar as relações existentes entre os símbolos Δ e D .

Com efeito, da relação conhecida

$$\Delta = e^{hD} - 1 ,$$

tiramos

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{e^{hD} - 1} = \frac{1}{D \left[1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{6} + \dots + \frac{D^n}{n+1} + \dots \right]}$$

ou, ainda,

$$\Delta^{-1} = D^{-1} \left[1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{6} + \dots + \frac{D^n}{n+1} + \dots \right]^{-1}$$

O desenvolvimento do parênteses pode ser obtido pelo método dos coeficientes indeterminados, escrevendo-o sob a forma

$$\frac{1}{1 + \frac{D}{2} + \dots + \frac{D^n}{n+1}} = A_{-1} + A_0 D + A_1 D^2 + \dots + A_j D^{j+1} + \dots$$

ou, ainda, sob a forma equivalente

$$(1) \quad 1 = \left(\sum_0^{\infty} \frac{D^n}{n+1} \right) \times \left(\sum_{-1}^{\infty} A_j A^{j+1} \right)$$

Para efetuarmos de maneira cômoda este produto, vamos substituir cada um desses polinômios por uma operação simbólica.

— Esta operação consiste em substituir um desenvolvimento em série de potências de x pela expressão

$$L^v x = v^0 + vx + v^2 x^2 + \dots + v^n x^n + \dots,$$

onde as potências sucessivas de v assumem valores prefixados.

Assim, para o 1.º fator da expressão (1)

$$\sum_0^{\infty} \frac{D^n}{n+1} = L^{vD},$$

ponhamos por definição

$$v^n = \frac{1}{n+1}$$

Para o 2.º fator, escrevemos

$$\sum_{-1}^{\infty} A_j D^{j+1} = \sum_0^{\infty} A_{j-1} D^j = \sum_0^{\infty} \tau^j D^j$$

com a convenção

$$\tau^j = A_{j-1}.$$

O produto desejado não é mais do que o desenvolvimento de $L^{(v+\tau)D}$, onde as potências sucessivas de $(\tau + v)$ se calculam pela expressão

$$(\tau+v)^p = \tau^p + \tau^{p-1}v + \dots + \tau v^{p-1} + v^p,$$

exatamente como no binômio, sem seus coeficientes fatoriais.

Para $p = 0$, escrevemos

$$(v + \tau)^0 = \tau^0 v^0.$$

Temos, então, pela operação acima, a identidade

$$1 = L^{(\tau+v)D} = [A_{-1} + (v+\tau)D + \dots + (v+\tau)^p D^p + \dots]$$

Daquí concluímos

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 1 \\ (v+\tau) &= 0 \\ (v+\tau)^2 &= 0 \\ &\vdots \\ (v+\tau)^p &= 0 \end{aligned}$$

Para calcularmos as diferentes potências de τ e v , formamos a tabela

		v^0	v^1	v^2	v^3	v^4	v^5	v^6
		A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
τ^0	1	A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
τ^1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} A_{-1}$	$\frac{1}{2} A_0$	$\frac{1}{2} A_1$	$\frac{1}{2} A_2$	$\frac{1}{2} A_3$	$\frac{1}{2} A_4$	$\frac{1}{2} A_5$
τ^2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} A_{-1}$	$\frac{1}{3} A_0$	$\frac{1}{3} A_1$	$\frac{1}{3} A_2$	$\frac{1}{3} A_3$	$\frac{1}{3} A_4$	$\frac{1}{3} A_5$
τ^3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} A_{-1}$	$\frac{1}{4} A_0$	$\frac{1}{4} A_1$	$\frac{1}{4} A_2$	$\frac{1}{4} A_3$	$\frac{1}{4} A_4$	$\frac{1}{4} A_5$
τ^4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} A_{-1}$	$\frac{1}{5} A_0$	$\frac{1}{5} A_1$	$\frac{1}{5} A_2$	$\frac{1}{5} A_3$	$\frac{1}{5} A_4$	—
τ^5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} A_{-1}$	$\frac{1}{6} A_0$	$\frac{1}{6} A_1$	$\frac{1}{6} A_2$	$\frac{1}{6} A_3$	—	—
τ^6	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7} A_{-1}$	$\frac{1}{7} A_0$	$\frac{1}{7} A_1$	$\frac{1}{7} A_2$	—	—	—

Dêste quadro tiramos o desenvolvimento de $(\tau+v)^p$, que se acha na diagonal $p - p$.

De acôrdo com a visível lei de formação, temos

$$(v + \tau)^p = \frac{A_{-1}}{p+1} + \frac{A_0}{p} + \dots + \frac{A_{p-1}}{1}$$

donde as equações, para $p = 1$

$$A_{-1} = 1$$

e para $p > 1$,

$$\frac{A_{-1}}{2} + \frac{A_0}{1} = 0$$

$$\frac{A_{-1}}{3} + \frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{1} = 0$$

$$\frac{A_{-1}}{p+1} + \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p-1} + \dots + \frac{A_{p-1}}{1} = 0.$$

Pondo essas equações sob a forma de matriz, temos o aspeto

A_{-1}	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	.	2.º membro
$\frac{1}{1}$								1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$							0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$						0
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$					0
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$				0
.	.	.	.	.	.			0
$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p-1}$	$\frac{1}{p-2}$						0

Destas equações tiramos sucessivamente os diferentes coeficientes das potências de D :

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 0 & A_0 &= -\frac{1}{2} & A_1 &= \frac{1}{12} \\ A_2 &= 0 & A_3 &= -\frac{1}{720} & A_4 &= 0 \\ A_5 &= \frac{1}{30.240} & A_6 &= 0 & A_7 &= -\frac{1}{1.209.600} \end{aligned}$$

Estes valores, levados na expressão

$$\Delta^{-1} U_i ,$$

dão a primitiva V_i .

SOMAÇÃO SUCESSIVA

Aplicando-se a fórmula de somação do capítulo anterior para o caso de ser U_i o produto de dois fatores V_i e W_i , temos

$$S = \Phi(E) U_1 = \Phi(E) (V_1 W_1) = \frac{E^n - 1}{E - 1} (V_1 W_1) .$$

Suponhamos agora que conheçamos a primitiva de W_i , seja T_i .

Da relação

$$\Delta(V_i T_i) = V_i \Delta T_i + T_{i+1} \Delta V_i ,$$

tiramos

$$V_i \Delta T_i = \Delta(V_i T_i) - T_{i+1} \Delta V_i$$

ou

$$V_i W_i = \Delta(V_i T_i) - T_{i+1} \Delta V_i .$$

Levando este valor na expressão de S , obtemos

$$S = \Phi(E) U_1 = \frac{E^n - 1}{E - 1} [\Delta(V_1 T_1) - T_2 \Delta V_1] = (E^n - 1)(V_1 T_1) - \Phi(E)(T_2 \Delta V_1)$$

Esta relação é conhecida pelo nome de somação por partes.

Se aplicarmos esta fórmula para

$$\Phi(E) (T_2 \Delta V_1) ,$$

obtemos, pondo $\Delta Z_2 = T_2$,

$$\Phi(E) (T_2 \Delta V_1) = (E^n - 1) (Z_2 \Delta V_1) - \Phi(E) (Z_3 \Delta^2 V_1)$$

donde

$$S = (E^n - 1) [V_1 T_1 - Z_2 \Delta V_1] + \Phi(E) (Z_3 \Delta^2 V_1).$$

A reiteração desta fórmula nos conduzirá à fórmula de somação sucessiva, que é vantajosa quando conhecemos as primitivas sucessivas de W_i e quando a diferença finita de V_i se anula identicamente a partir duma certa ordem.

SOMAÇÃO REPETIDA

Dada a série

$$U_1, U_2, \dots, U_n,$$

para a qual calculamos uma certa somação $S = \Phi(E) U_i$, que nos dá os valores

$$\Phi(E) U_1, \Phi(E) U_2, \dots, \Phi(E) U_n,$$

podemos aplicar novamente a esta série a mesma operação de somação.

Teremos, denotando esta 2.^a operação por $S = \Phi^2(E) U_i$, formado uma nova série

$$\Phi^2(E) U_1, \Phi^2(E) U_2, \dots, \Phi^2(E) U_n,$$

a qual poderemos novamente aplicar o mesmo processo operativo, e assim sucessivamente.

Obteríamos para a somação repetida de ordem k o aspeto

$$S = \Phi^k(E) U_i.$$

O conjunto das operações necessárias para obter esta somação repetida de ordem k é dado pela potência de ordem k de $\Phi(E)$.

A demonstração desta proposição não oferece dificuldade, atendendo-se que $\Phi(E)$ é um desenvolvimento em série de potências de E , que pomos sob a forma

$$\Phi(E) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k E^k$$

Teríamos

$$\begin{aligned}\Phi(E) U_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_k E^k U_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k U_{k+1} \\ \Phi^2(E) U_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \Phi(E) U_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \left[\sum_{-\infty}^{\infty} a_j U_{k+j+1} \right] = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_k \sum_{-\infty}^{\infty} a_j E^k U_{j+1} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k E^k \sum_{-\infty}^{\infty} a_j E^j U_1\end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\Phi(E) U_1 = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_k E^k \right) \times \left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_j E^j \right) U_1 = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_k E^k \right)^2 U_1 .$$

Para generalizarmos esta demonstração, vamos por indução admitir a expressão

$$\Phi^k(E) U_1 = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_j E^j \right)^k U_1$$

como verdadeira e demonstrar que o é ainda para $k+1$.

Temos

$$\begin{aligned}\Phi(E) \Phi^k(E) U_1 &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_j E^j \left(\Phi^k(E) U_1 \right) = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_j E^j \left[\left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_i E^i \right)^k U_1 \right] = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_j E^j \right)^{k+1} U_1 .\end{aligned}$$

Esta propriedade subsiste para as expressões de $\Phi(E)$ em função de outros operadores, desde que sejam únicas as expressões de E em função desses operadores e vice-versa.

CAPÍTULO TERCEIRO

Somação imediata

SOMAÇÃO IMEDIATA

Seja uma série de termos

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n,$$

onde o termo geral u_x vem expresso por uma fórmula de expansão em função de um operador Θ :

$$(1) \quad u_x = \sum_0^k P_v(x) \Theta^v u_0.$$

Os coeficientes desta expansão são polinômios de grau v em x e os valores de $\Theta^v u_0$, constantes dadas.

Suponhamos que, relativamente a uma certa operação de somação $\Phi(E)$, verifiquem esses coeficientes a relação

$$(2) \quad \Phi(E) P_v(x_0) = P_{v+1}(x), \quad x_0 = 0$$

A somação dada por $\Phi(E) u_0$ seria expressa por

$$\Phi(E) u_0 = E^{-x} \Phi(E) u_x.$$

Aplicando-se esta somação à relação (1), temos

$$\Phi(E) u_x = \sum_0^k \Theta^v u_0 \Phi(E) P_v(x)$$

Levando-se em conta a expressão

$$\Phi(E) P_v(x) = \Phi(E) E^x P_v(x_0) = E^x P_{v+1}(x),$$

obtemos

$$\Phi(E) u_x = E^x \sum_0^k P_{v+1}(x) \Theta^v u_0,$$

donde afinal,

$$\Phi(E) u_0 = \sum_0^k P_{v+1}(x) \Theta^v u_0$$

A somação, como se vê, foi obtida pela simples substituição do índice de $P_v(x)$ de v por $v+1$. A este tipo de somação, chama-se somação imediata.

A equação (2) nos permite obter, para uma dada somação, a pesquisa das expansões somáveis imediatamente por $\Phi(E)$, e, para uma determinada fórmula de expansão, qual a somação imediata $\Phi(E)$.

Vamos resolver o primeiro caso para a somação

$$\Phi(E) = \frac{E^x - 1}{E - 1}.$$

A relação (2) toma o aspeto

$$P_{v+1}(x) = \frac{E^x - 1}{E - 1} P_v(x) = \frac{E^x - 1}{E - 1} E^{-x} P_v(x) = \frac{1 - E^{-x}}{E - 1} P_v(x).$$

Para resolvermos esta equação, façamos

$$E - 1 = \Delta,$$

donde

$$\frac{1 - E^{-x}}{E - 1} = \frac{1 - (1 + \Delta)^{-x}}{\Delta} = - \sum_1^{\infty} \binom{-x}{k} \Delta^{k-1}.$$

Fazendo-se o desenvolvimento, obtemos

$$P_{v+1}(x) = \left[x - \frac{x(x+1)\Delta}{1.2} + \frac{x(x+1)(x+2)\Delta^2}{1.2.3} + \dots + \frac{x(x+1)\dots(x+k)\Delta^k}{1.2\dots(k+1)} + \dots \right] P_v(x).$$

Pondo-se

$$P_0(x) = 1,$$

obtemos sucessivamente $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_v(x)$ pela aplicação dessa fórmula.

Para $P_1(x)$, virá

$$P_1(x) = \left[x - \frac{x(x+1)\Delta}{1.2} + \dots \right] P_0(x) = x$$

visto que $\Delta P_0(x)$, $\Delta^2 P_0(x)$, ..., $\Delta^k P_0(x)$, são nulos.

Para $P_2(x)$, resulta, desprezando as diferenças nulas,

$$P_2(x) = \left[x - \frac{x(x+1)\Delta}{1.2} \right] P_1(x) .$$

Mas $\Delta P_1(x) = 1$

donde $P_2(x) = \left[x - \frac{x(x+1)}{1.2} \right] = \frac{x(x-1)}{1.2}$

Para $P_3(x)$ adviria

$$P_3(x) = \left[\frac{x(x+1)\Delta}{1.2} + \frac{x(x+1)(x+2)\Delta^2}{1.2.3} \right] P_2(x) .$$

Calculando-se as diferenças de $P_2(x)$ obtemos

$$\Delta P_2(x) = \frac{(x+1)x}{1.2} - \frac{x(x-1)}{1.2} = x$$

$$\Delta^2 P_2(x) = 1$$

Daqui resultaria

$$P_3(x) = \frac{x^2(x-1)}{1.2} - \frac{x^2(x+1)}{1.2} + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$$

e, procedendo-se sucessivamente, obteríamos para a expressão geral

$$P_v(x) = \frac{x(x-1) \dots (x-v+1)}{1.2 \dots v} .$$

Esta expressão pode ser provada verdadeira para $v+1$, observando-se a relação

$$\Delta \frac{x(x-1) \dots (x-v)}{1.2 \dots (v+1)} = P_v(x) .$$

Com efeito, levando-se este valor de $P_v(x)$ na relação

$$P_{v+1}(x) = \frac{1-E^{-x}}{E-1} P_v(x)$$

obtemos

$$P_{v+1}(x) = \frac{1}{v+1} \left(\frac{1-E^{-x}}{E-1} \right) \Delta [x(x-1) \dots (x-v)]$$

Cancelando o fator comum Δ , vem-nos afinal

$$P_{v+1}(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-v)}{v+1},$$

o que generaliza a regra.

Com uma aplicação do 2.º caso, consideremos a fórmula de expansão,

$$u_x = \sum_0^k P_v(x) \Theta^v u_0,$$

onde

$$P_v(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-v+1)}{1.2\dots v}$$

Estes polinômios gozam propriedade

$$\Delta P_{v+1}(x) = P_v(x),$$

donde

$$P_{v+1}(x) = \Delta^{-1} P_v(x) + P^*$$

sendo P^* uma grandeza ópero-nula em relação a Δ .

Nestas condições a relação

$$\Phi(E) E^{-x} P_v(x) = P_{v+1}(x)$$

transforma-se em

$$\Delta^{-1} P_v(x) + P^* = \Phi(E) E^{-x} P_v(x),$$

donde a equivalência entre as operações

$$\Delta^{-1} P_v(x) + P^* \text{ e } E^{-x} \Phi(E) P_v(x)$$

e, portanto,

$$\Phi(E) P_v(x) = \frac{E^x}{E-1} P_v(x) + E^x P^*.$$

Resta-nos determinar P^* . Ora, como devemos ter, para $x = 0$, $\Phi(E) P_v(0) = 0$, resulta

$$\Delta^{-1} P_v(0) + P^* = 0.$$

Desta expressão concluímos para P^* o valor

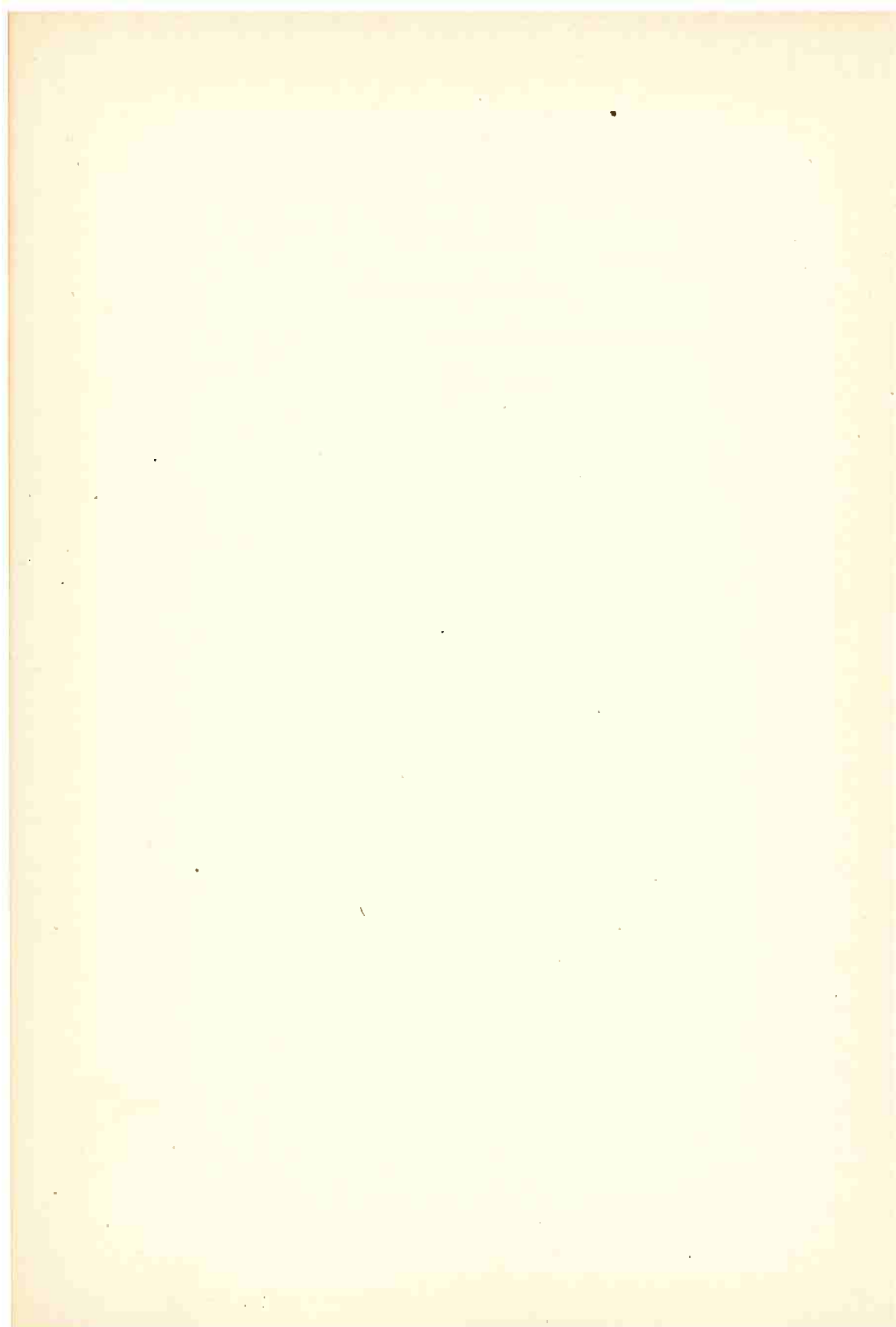
$$P^* = -\Delta^{-1} P_v(0)$$

e em consequencia

$$E^x P^* P_v(0) = \Delta^{-1} P_v(x) .$$

Daquí advem para $\Phi(E)$ a forma

$$\Phi(E) = \frac{E^x - 1}{E - 1} .$$



CAPÍTULO QUARTO

1. Expressão de uma integral definida entre limites finitos, por meio de diferenças finitas.
2. Transformação da fórmula de integração.

EXPRESSÃO DE UMA INTEGRAL DEFINIDA ENTRE LIMITES FINITOS, POR MEIO DE DIFERENÇAS FINITAS

Seendo (a, b) um intervalo finito, podemos definir a integral definida de $f(x)$, entre os limites $x = a$ e $x = b$, pela expressão

$$(1) \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f(\xi_0) \Delta x_0 + f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n \right], \quad (x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}).$$

onde $x_0 = a$, $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} = b$, representam pontos de divisão do intervalo total.

A relação (1) subsiste se supuzermos os intervalos equidistantes; neste caso teremos

$$(2) \quad \Delta x_i = \frac{b - a}{n + 1}.$$

Por outro lado, aplicando a fórmula dos pequenos acréscimos, podemos escrever

$$f(\xi_i) = f(x_i + \tau_i) = f(x_i) + \tau_i f'(x_i + \theta_i \tau_i).$$

Estas expressões para os $f(\xi_i)$, levadas em (1), nos dão

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f(x_0) \Delta x_0 + f(x_1) \Delta x_1 + \dots + f(x_n) \Delta x_n \right] + \\ + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \tau_i \Delta x_i f'(x_i + \theta_i \tau_i)$$

Introduzindo-se equidistância dos intervalos, temos

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)]}{n + 1} + \eta,$$

pondo-se

$$\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n \eta_i f'(x_i + \theta_i \eta_i)}{n+1} (b-a) .$$

Mas o limite de η , pelas condições de integrabilidade, é zero, donde a expressão

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n+1}$$

Vejamos agora a transformação da expressão

$$\frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n+1} .$$

Introduzindo-se o operador E , podemos escrever

$$(4) f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n) = (1 + E + E^2 + \dots + E^n) f(x_0) = \frac{E^{n+1} - 1}{E - 1} f(x_0) .$$

Como

$$1 + \Delta = E,$$

concluimos

$$\frac{E^{n+1} - 1}{E - 1} = \frac{(1 + \Delta)^{n+1} - 1}{\Delta} = (n+1) \left[1 + \frac{n}{1.2} \Delta + \frac{n(n-1)}{1.2.3} \Delta^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k+1} \Delta^k + \dots \right]$$

donde

$$(5) \frac{f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n+1} = \left[1 + \frac{n}{1.2} \Delta + \frac{n(n-1)}{1.2.3} \Delta^2 + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1) \Delta^k + \dots}{k+1} \right] f(x_0)$$

Introduzamos a operação auxiliar ϑ , definida por

$$E^n = 1 + \vartheta$$

Para exprimirmos Δ em função de ϑ , temos a relação

$$(1 + \Delta)^n = 1 + \vartheta$$

donde

$$\Delta = (1 + \vartheta)^{\frac{1}{n}} - 1 =$$

$$= \frac{1}{n} \vartheta + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{\vartheta^2}{2} + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{n} - k + 1 \right) \frac{\vartheta^k}{k} + \dots$$

daquí teríamos

$$n\Delta = \vartheta - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\vartheta^2}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(k-1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\vartheta^k}{k} + \dots$$

Por outro lado o termo geral de (5) pode ser escrito

$$\frac{n(n-1) \dots (n-k+1) \Delta^k}{k+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(n\Delta)^k}{k+1}.$$

Vejamos, portanto, que podemos exprimir todos os termos de (5) em função de $n\Delta$ e de suas potências.

Passando ao limite, temos

$$\lim_{\rightarrow \infty} (n\Delta) = \vartheta - \frac{\vartheta^2}{2} + \dots + (-1)^k \frac{\vartheta^k}{k} + \dots = \log(1 + \vartheta)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1) \Delta^k}{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(n\Delta)^k}{k+1} =$$

$$= \frac{\log^k(1 + \vartheta)}{k+1}$$

donde para a integral definida a expressão

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k(1 + \vartheta)}{k+1} f(a).$$

Para o cálculo dos ϑ , temos a relação

$$\vartheta = E^n - 1,$$

de que concluímos

$$\vartheta f(a) = f\left(a + (b-a) \frac{n}{n+1}\right) - f(a).$$

Passando ao limite para $n \rightarrow \infty$, vem

$$\vartheta f(a) = f(b) - f(a).$$

Para ϑ^k , teremos

$$\vartheta^k = (E^n - 1)^k = E^{nk} - k E^{n(k-1)} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} E^{n(k-2)} + \dots,$$

seja

$$\vartheta^k = \sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha C_\alpha^k E^{n(k-\alpha)}$$

De um modo geral, temos

$$E^{n(k-\alpha)} f(a) = f \left[a + (k-\alpha) \frac{n}{n+1} (b-a) \right]$$

Para $n \rightarrow \infty$, resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E^{n(k-\alpha)} f(a) = f \left[a + (k-\alpha) (b-a) \right]$$

Daqui concluímos para $n \rightarrow \infty$

$$\vartheta^k f(a) = \sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha C_\alpha^k f \left[a + (k-\alpha) (b-a) \right].$$

Transformando esta expressão, podemos escrever

$$\vartheta^k f(a) = \left[A^{(b-a)} - 1 \right]^k f(a).$$

De acôrdo com esta relação e com os valores de $f(x)$ tabulados para os argumentos

$$x = a, a+(b-a), a+2(b-a), \dots, a+k(b-a),$$

podemos calcular as diferenças ϑ e obter a integral desejada.

TRANSFORMAÇÃO DA FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO

Obtivemos no capítulo anterior para o cálculo de uma integral definida entre limites finitos a expressão

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k(1 + \vartheta)}{k+1} f(a) .$$

Vamos transformar esta expressão para torna-la extensível a intervalos (A,B) , cujas distâncias sejam múltiplos dados m de $b-a$.

Para isso, vamos dividir o intervalo total (A,B) em m intervalos parciais contíguos, o que nos dará os m intervalos

$$(a, a+h), (a+h, a+2h), \dots, (a+(m-1)h, a+mh)$$

onde puzemos

$$A = a, \quad h = b-a, \quad B = a+mh .$$

Pela fórmula de decomposição do intervalo de uma integral definida, temos

$$\int_a^{a+mh} f(x) dx = \int_a^{a+h} f(x) dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x) dx + \dots + \int_{a+(m-1)h}^{a+mh} f(x) dx .$$

Aplicando-se a fórmula (1) a cada um desses intervalos, podemos escrever

$$(2) \quad \int_a^{a+mh} f(x) dx = h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k(1 + \vartheta)}{k+1} \left[f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(m-1)h) \right] .$$

Por outro lado, introduzindo-se o operador de expansão A

$$f(a) + f(a+h) + \dots + f(a+(m-1)h) = \frac{A^{mh}-1}{A^h-1} f(a) .$$

Levando-se esta expressão em (2) e invertendo a ordem das operações, temos

$$(3) \quad \int_a^{a+mh} f(x)dx = h \frac{A^{mh}-1}{A^h-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k(1+\vartheta)}{k+1} f(a).$$

Desenvolvendo-se a somatória que aí figura em série de potências de ϑ , resulta a expressão

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k(1+\vartheta)}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \vartheta^k,$$

onde os A_k são coeficientes determinados pela identificação de ambos os membros de (4) em relação às potências de ϑ .

Substituindo-se (4) em (3), temos

$$\int_a^{a+mh} f(x)dx = h \frac{A^{mh}-1}{A^h-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \vartheta^k f(a)$$

Atendendo-se à relação que define ϑ , a saber

$$A^h = 1 + \vartheta,$$

damos à expressão supra o aspeto

$$\int_a^{a+mh} f(x)dx = A_0 h \frac{(A^{mh}-1)}{A^h-1} f(a) + h \sum_{k=1}^{\infty} (A^{mh}-1) A_k \vartheta^k f(a)$$

Mas

$$(A^{mh}-1) \vartheta^k f(a) = \left| \vartheta^k f(x) \right|_a^{a+mh}$$

de que decorre o aspeto

$$\int_a^{a+mh} f(x)dx = h \left\{ A_0 \left(\frac{A^{mh}-1}{A^h-1} \right) f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left| \vartheta^k f(x) \right|_{x=a}^{x=a+mh} \right\}$$

As expressões que aí se encontram acham-se todas na tabela das diferenças ϑ de $f(x)$ e, com exceção da primeira parcela do 2.º membro, as mais restantes são oscilações de diferenças finitas ϑ^k .

EXEMPLOS DE SOMAÇÃO

Biblioteca da Escola Politécnica
SÃO PAULO
F-1841

EXEMPLOS

ACHAR A SOMA DOS TERMOS DE ORDEM
 m k , $m = 0, 1, 2, \dots, n$ DA SÉRIE DE TERMOS

1, 8, 27, 64, 125, ...

Esta série é a dos cubos dos números naturais ; as suas diferenças finitas acham-se calculadas na tabela seguinte :

U	ΔU	$\Delta^2 U$	$\Delta^3 U$	$\Delta^4 U$
1	7	12	6	0
8	19	18	6	
27	37	24		
64	61			
125				

A soma pedida S tem por expressão

$$S = [1 + E^k + E^{2k} + \dots + E^{nk}] U_0,$$

designando por U_0 o termo inicial da série ; donde

$$\varphi(E) = 1 + E^k + \dots + E^{nk} = \frac{E^{(n+1)k} - 1}{E^k - 1}$$

Fazendo-se $1+\vartheta = E^k$, temos

$$E^{k(n+1)} = (1+\vartheta)^{n+1} = 1 + (n+1)\vartheta + \frac{(n+1)n\vartheta^2}{1 \cdot 2} + \\ + \frac{(n+1)n(n-1)\vartheta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\vartheta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

donde para $\varphi(E)$ em função de ϑ a expressão

$$\varphi(E) = (n+1) + \frac{(n+1)n\vartheta}{1 \cdot 2} + \frac{(n+1)n(n-1)\vartheta^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \\ + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\vartheta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Podemos obter ϑ em função de Δ de

$$\vartheta = (1+\Delta)^k - 1 = k\Delta + \frac{k(k-1)\Delta^2}{1 \cdot 2} + \frac{k(k-1)(k-2)\Delta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Por elevação ao quadrado e ao cubo, obtemos ϑ^2 e ϑ^3 :

$$\vartheta^2 = k^2\Delta^2 + k^2(k-1)\Delta^3 + \dots$$

$$\vartheta^3 = k^3\Delta^3 \dots$$

Para $k = 5$, $n=10$, $U_0 = 1$, temos

$$\Delta 1 = 7, \Delta^2 1 = 12, \Delta^3 1 = 6$$

$$\vartheta^3 1 = 125 \times 6 = 750,$$

$$\vartheta^2 1 = 25 \times 12 + 100 \times 6 = 900,$$

$$\vartheta 1 = 5 \times 7 + 10 \times 12 + 10 \times 6 = 215.$$

S tem por valor

$$S = \varphi(E)1 = 11 \times 1 + 55 \times 215 + 165 \times 900 + 330 \times 750 = 407.836.$$

Fazendo-se U_0 descrever a série dada, S descreverá a série correspondente ao operador $\varphi(E)$. Podemos obter esta 2.^a série, calculando-se as diferenças finitas sucessivas de S .

Operando por Δ sobre a expressão $\varphi(E)$, obtemos

$$\Delta \varphi(E) = (n+1)\Delta + \frac{(n+1)n\Delta \vartheta}{1.2} + \frac{(n+1)n(n-1)\Delta \vartheta^2}{1.2.3} + \\ + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\Delta \vartheta^3}{1.2.3.4} +$$

Da expressão de ϑ , ϑ^2 , ϑ^3 , obtemos

$$\Delta \vartheta = k\Delta^2 + \frac{k(k-1)\Delta^3}{1.2}$$

$$\Delta \vartheta^2 = k^2\Delta^3$$

$$\Delta \vartheta^3 = 0$$

donde

$$\Delta \varphi(E) = (n+1)\Delta + \frac{(n+1)n}{1.2} \left[k\Delta^2 + \frac{k(k-1)\Delta^3}{1.2} \right] + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} k^2\Delta^3.$$

Operando por Δ^2 e Δ^3 , temos

$$\Delta^2 \varphi(E) = (n+1)\Delta^2 + \frac{(n+1)n}{1.2} k\Delta^3,$$

$$\Delta^3 \varphi(E) = (n+1)\Delta^3.$$

Para $n = 10$, $k = 5$, $U_0 = 1$ resulta

$$\Delta \varphi(E)1 = 11 \times 7 + \frac{11 \times 10}{1.2} \left[5 \times 12 + \frac{5.4}{1.2} 6 \right] + \frac{11 \times 10 \times 9}{1.2.3} 25 \times 6 = 31.427$$

$$\Delta^2 \varphi(E)1 = 11 \times 12 + 55 \times 30 = 1.782$$

$$\Delta^3 \varphi(E)1 = 11 \times 6 = 66$$

Com estes valores construímos a tabela

S	ΔS	$\Delta^2 S$	$\Delta^3 S$	$\Delta^4 S$
407836	31427	1782	66	0
439263	33209	1848	66	0
472472	35057	1914	66	0
507529	36971	1980	66	0
544500	38951	2046	66	0

Para a inversão do operador $\varphi(E)$, temos de calcular a expressão

$$\varphi^{-1}(E) S = \frac{E^k - 1}{E^{k(n+1)} - 1} S$$

Façamos, sendo ϑ um operador diferente do anteriormente designado,

$$E^{k(n+1)} = 1 + \vartheta$$

temos

$$\begin{aligned} E^k - 1 &= (1 + \vartheta)^{\frac{1}{n+1}} - 1 = \frac{1}{n+1} \vartheta - \frac{n}{(n+1)^2} \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{n(2n+1)}{(n+1)^3} \frac{\vartheta^3}{3} - \\ &\quad - \frac{n(2n+1)(3n+2)}{(n+1)^4} \frac{\vartheta^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(E) S &= \frac{S}{n+1} - \frac{n}{(n+1)^2} \frac{\vartheta S}{2} + \frac{n(2n+1)}{(n+1)^3} \frac{\vartheta^2 S}{3} - \\ &\quad - \frac{n(2n+1)(3n+2)}{(n+1)^4} \frac{\vartheta^3 S}{4} + \dots \end{aligned}$$

Para obtermos ϑS , $\vartheta^2 S$, $\vartheta^3 S$, operamos sobre a expressão $E^{k(n+1)} = 1 + \vartheta$, donde tiramos

$$\begin{aligned} \vartheta &= (1 + \Delta)^{k(n+1)} - 1 = k(n+1) \Delta + \frac{k(n+1)[k(n+1)-1] \Delta^2}{1 \cdot 2} + \\ &\quad + \frac{k(n+1)[k(n+1)-1][k(n+1)-2] \Delta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots, \end{aligned}$$

$$\vartheta^2 = k^2(n+1)^2 \Delta^2 + k^2(n+1)^2 [k(n+1)-1] \Delta^3 + \dots$$

$$\vartheta^3 = k^3(n+1)^3 \Delta^3$$

Para $n = 10$, $k = 1$, $S = 507.529$, temos

$$\vartheta \ 507529 = 55 \times 36971 + 1485 \times 1980 + 26.235 \times 66 = 6.705.215$$

$$\vartheta^2 \ 507529 = 3025 \times 1980 + 163.350 \times 66 = 16.770.600$$

$$\vartheta^3 \ 507529 = 166375 \times 66 = 10.980.750$$

donde

$$\varphi^{-1}(E) 507.529 = \frac{507529}{11} - \frac{10}{121} \times \frac{6705215}{2} + \frac{210}{1331} \times \frac{16770600}{6} -$$

$$- \frac{6720}{14641} \times \frac{10980750}{24}$$

$$\varphi^{-1}(E) 507.529 = 46139 - 277075 + 441.000 - 210.000 = 64$$

$$\text{TABELA DA FUNÇÃO } Y_{\alpha} = \sum_{i=\alpha}^{\alpha+2} X_i = (E^2 + E + 1) X_{\alpha} = \varphi X_{\alpha}$$

E CÁLCULO DA FUNÇÃO INVERSA $\varphi^{-1} Y_{\alpha} = X_{\alpha}$.

X_{α}	Y_{α}	ΔY_{α}	$\Delta^2 Y_{\alpha}$	$\Delta^3 Y_{\alpha}$	Y_{α}	δY_{α}	$\delta^2 Y_{\alpha}$	$\delta^3 Y_{\alpha}$
1	36	63	54	18	36	369	810	486
8	99	118	72	18				
27	216	189	90	18				
64	405	279	108	18	405	1179	1286	486
125	684	387	126	18				
216	1071	513	144	18				
343	1584	657	162	18	1584	2475	1782	486
512	2241	819	180					
729	3060	999						
1000	4059				4059	4257	2268	
1331								
1728								
2197					8316	6525		
2744								
3375								
					14841			

$$\delta = E^3 - 1 = (1 + \Delta)^3 - 1 = 3\Delta + 3\Delta^2 + \Delta^3$$

$$\delta^2 = 9\Delta^2 + 18\Delta^3 + \dots$$

$$\delta^3 = 27\Delta^3 + \dots$$

$$\varphi^{-1}(E) = \frac{E-1}{E^3-1} = \frac{(1+\delta)^{\frac{1}{3}}-1}{\delta} = \frac{1}{3}\delta - \frac{1}{9}\delta^2 + \frac{5}{81}\delta^3 - \frac{10}{243}\delta^4 + \dots$$

$$\Delta 216 = 3 \times 189 + 3 \times 90 + 18 = 855$$

$$\Delta^2 216 = 9 \times 90 + 18 \times 18 = 1134$$

$$\Delta^3 216 = 27 \times 18 = 486$$

$$\Delta^4 216 = 0$$

$$\varphi^{-1}(E) 216 = \frac{1}{3} \times 216 - \frac{1}{9} \times 855 + \frac{5}{81} \times 1134 - \frac{10}{243} \times 486 = 27$$

EXEMPLO DE SOMAÇÃO

Dada a tabela da função $U = X^2$

X	U	ΔU	$\Delta^2 U$	$\Delta^3 U$
480	230400	961	2	0
481	231361	963	2	
482	232324	965		
483	233289			

calcular a soma

$$S = [(480,871)^2 + (481,871)^2 + \dots + (490,871)^2] .$$

Temos

$$S = [E^{0,871} + E^{1,871} + \dots + E^{10,871}](480)^2 .$$

Pondo-se $E^{0,871}$ em evidência e transformando o parêntesis, obtemos

$$\varphi(E) = E^{0,871} [1 + E + \dots + E^{10}] = \frac{E^{11} - 1}{E - 1} E^{0,871}$$

Introduzindo a relação

$$E = 1 + \Delta ,$$

resultam os desenvolvimentos

$$E^{11} - 1 = 11\Delta + 55\Delta^2 + 165\Delta^3 + \dots$$

$$E^{0,871} = 1 + 0,871\Delta - 0,0561795\Delta^2 + \dots$$

donde

$$\varphi(E) = \frac{E^{11} - 1}{E - 1} E^{0,871} = (11 + 55\Delta + 165\Delta^2 + \dots) (1 + 0,871\Delta - 0,0561795\Delta^2 + \dots)$$

Como as diferenças de U superiores á segunda são nulas, basta conservar na expressão de $\varphi(E)$ as diferenças até 2.^a ordem :

$$\varphi(E) = 11 + \Delta \left| \begin{array}{l} + 11 \times 0,871 + \Delta^2 \\ + 1 \times 55 \end{array} \right| \begin{array}{l} + 165 \times 1 \\ + 55 \times 0,871 \\ - 11 \times 0,0561795 . \end{array}$$

Cálculos efetos, temos para o nosso caso

$$\varphi(E) = 11 + 64,581\Delta + 212,2870255 \Delta^2 .$$

Operando sobre 480^2 temos

$$S = 11 \times 230400 + 64,581 \times 961 + 212,2870255 \times 2 .$$

Efetuando as operações, como abaixo

$$\begin{array}{r} 2304000,000 \ 000 \\ 230400, \\ 64,581 \\ 3874,86 \\ 58122,9 \\ 424,574051 \\ \hline 2596886,915051 \end{array}$$

concluimos para S o valor

$$S = 2596886,915051$$

Calcular a soma do exercício anterior pela fórmula :

$$S = \sum_0^n U_i = \left| \Delta^{-1} U_i \right|_0^{n+1}$$

Calculemos $\Delta^{-1} X^2$ no nosso caso. Temos

$$\Delta^{-1} = (e^D - 1)^{-1} = \left(D + \frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{6} + \dots \right)^{-1} = D^{-1} \left[1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{6} + \frac{D^3}{24} + \dots \right]^{-1}$$

Desenvolvendo esses cálculos, temos

$$\begin{aligned}
 (1 + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{6} + \frac{D^3}{24} + \dots)^{-1} &= 1 - (\frac{D}{2} + \frac{D^2}{6} + \frac{D^3}{24} + \dots) + \\
 &+ (\frac{D}{2} + \frac{D^2}{6} + \frac{D^3}{24} + \dots)^2 - (\frac{D}{2} + \frac{D^2}{6} + \frac{D^3}{24} + \dots)^3 \dots \\
 &= 1 - \frac{D}{2} + D^2(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}) + D^3(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots \\
 &= 1 - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{12} + 0 \times D^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Observando que as derivadas de $U = x^2$ superiores à segunda são nulas, podemos escrever

$$\Delta^{-1} = D^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{D}{12}$$

donde

$$\Delta^{-1} x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

Para S virá

$$\begin{aligned}
 S &= \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} \right|_{480,871}^{491,871} = \frac{491,871^3 - 480,871^3}{3} - \\
 &- \frac{491,871^2 - 480,871^2}{2} + \frac{491,871 - 480,871}{6}
 \end{aligned}$$

Mas

$$(491,871)^3 = (480,871)^3 + 33 \times (480,871)^2 + 363 \times 480,871 + 1331$$

$$(491,871)^2 = (480,871)^2 + 22 \times 480,871 + 121$$

Portanto :

$$S = 11 \times (480,871)^2 + 110 \times 480,871 + 385$$

Efetutando esses cálculos, temos

$$\begin{array}{r} 231\ 236,918641 \\ 2.312\ 369,18641 \\ 52\ 895,810 \\ 385, \\ \hline 1,915051 \\ 2.596\ 885, \\ \hline 2.596\ 886,915051 \end{array}$$

donde

$$S = 2.596\ 886,915051$$

CÁLCULO OPERATÓRIO

PARTE TERCEIRA

CAPÍTULO PRIMEIRO

INTERPOLAÇÃO. FÓRMULAS DE INTERPOLAÇÃO.

1. Generalidades.
2. Teoria da aproximação, intercalação e ajustamento.
3. Ideias fundamentais de Steffensen.

CAPÍTULO SEGUNDO

TEORIA DA APROXIMAÇÃO.

1. Generalidades.
2. Análise do resto.

CAPÍTULO TERCEIRO

FÓRMULA DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS.

1. Fórmula de Newton.
2. Expressões particulares da fórmula de Newton.
Exercício sobre a fórmula de Newton.
3. Fórmula de Stirling.

CAPÍTULO QUARTO

CONSTRUÇÃO DE TABELAS.

1. Generalidades
2. Fórmula fundamental da sub-tabulação.
3. Operações auxiliares da sub-tabulação.
Exercício sobre construção de tabelas.

CAPÍTULO QUINTO.

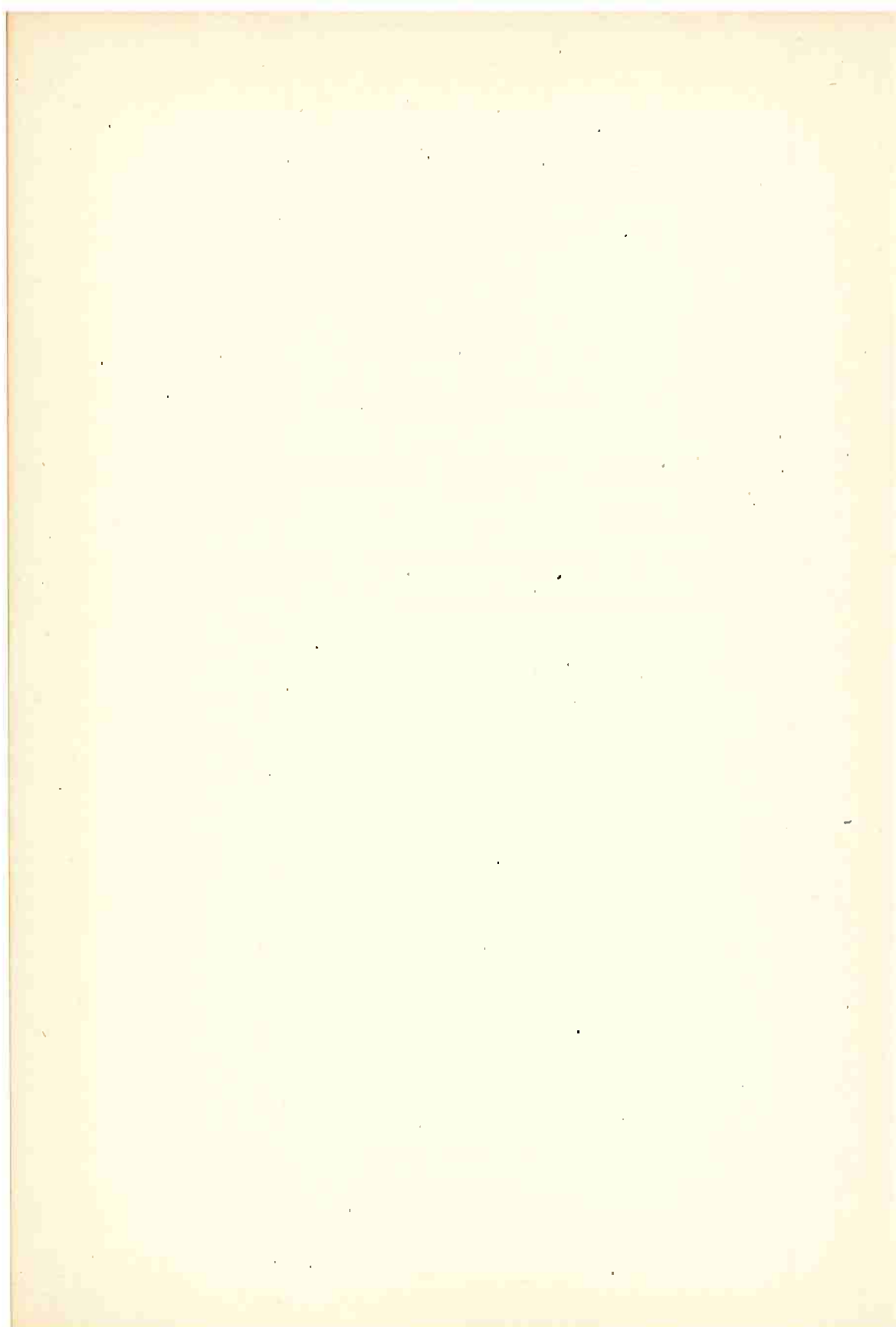
INTERPOLAÇÃO INVERSA

Determinação do intervalo de convergência de uma raiz dada.
Exercício sobre interpolação inversa.

CAPÍTULO PRIMEIRO

INTERPOLAÇÃO. FÓRMULAS DE INTERPOLAÇÃO.

1. Generalidades.
2. Teoria da Aproximação, Intercalação e Ajustamento.
3. Ideias fundamentais de Steffensen.



INTERPOLAÇÃO

1. Dados dois conjuntos de valores (X) e (Y) , ligados por relações do tipo

$$(1) \quad Y R X \quad \text{e} \quad X \tilde{R} Y,$$

o problema fundamental da interpolação consiste em determinar a forma da operação φ , tal que, para uma série de valores

$$X_1, X_2, \dots, X_m,$$

obtida por uma rarefação do conjunto (X) , a série

$$\varphi X_1, \varphi X_2, \dots, \varphi X_m,$$

seja identica à série

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_m,$$

obtida pela rarefação correspondente do conjunto (Y) , de acordo com as relações (1).

Por série fundamental de pares de valores (X_i, Y_i) de dois conjuntos (X) e (Y) , ligados pelas relações (1), a saber os conjuntos :

$$X_1, X_2, \dots, X_p$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_p,$$

entendemos a série minima de pares de valores (X_i, Y_i) permitindo determinar a forma da operação φ nas condições acima enunciadas.

Para efeito de notação, façamos $\varphi X_i = \overline{Y_i}$.

2. Esta determinação apresenta tres casos distintos :

1.º caso :

As relações $Y R X$ e $X \tilde{R} Y$ são conhecidas, ou, pelo menos, conhecemos a forma geral de φ . Esta operação, dependendo de

um certo número de parâmetros, a série fundamental será constituída pelo numero mínimo de pares de valores (X_i, Y_i) , permitindo a determinação desses parâmetros.

2.º caso :

As relações YRX e $X\tilde{R}Y$ são desconhecidas.

Para uma dada rarefação dos conjuntos (X) e (Y)

$$X_1, X_2, \dots, X_m$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_m,$$

podemos obter uma operação φ tal que, para esses pares de valores, tenhamos

$$Y_i = \varphi X_i.$$

Mas, como nada sabemos a respeito das relações fundamentais entre os conjuntos (X) e (Y) , não podemos afirmar que a série de pares de valores dada seja fundamental e que, portanto, para qualquer outra rarefação desses conjuntos, subsista a mesma operação φ .

Nestas condições, o problema não sendo determinado, varias soluções são possíveis, as quais se enquadram nos tipos seguintes :

a) Para todos os pares de valores da série dada, temos

$$\overline{Y} = Y_i$$

e para outras rarefações do conjunto (X) , temos para Y

$$Y_i = \overline{Y}_i$$

b) Fazemos de um modo geral

$$Y_i = \overline{Y}_i$$

3.º caso :

As relações YRX e $X\tilde{R}Y$ se decompõem em duas outras

$$YRX = YR_1X + YR_2X.$$

$$X\tilde{R}Y = X\tilde{R}_1Y + X\tilde{R}_2Y,$$

das quais R_1 e $\tilde{R}_1$ são conhecidas e R_2 e $\tilde{R}_2$ desconhecidas.

A série dada de pares de valores

$$X_1, X_2, \dots, X_m$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_m,$$

sendo o resultado das duas relações R_1 e R_2 , não se verifica de um modo geral a relação

$$Y_i = \varphi_1 X_i,$$

sendo φ_1 a operação correspondente á relação conhecida R_1 .

Pelo contrario, devemos ter sempre

$$Y_i = \varphi_1 X_i + \eta_i,$$

sendo η_i uma correção a se levar em conta para compensar o desconhecimento de R_2 . Neste caso, a determinação dos parâmetros de φ_1 será feita de maneira a se ter um sistema mais provavel de valores para os η_i .

Estes tres casos recebem respetivamente os nomes de

APROXIMAÇÃO, INTERCALAÇÃO e AJUSTAMENTO.

3. A proposito das ideias fundamentais da interpolação, Steffensen desenvolve as seguintes considerações que, *data venia*, transcrevemos de sua obra "SOME RECENT RESEARCHES IN THE THEORY OF STATISTICS AND ACTUARIAL SCIENCE", 2nd Lecture, pg. 21 e 22.

"1. Let us assume that a table of $f(x)$ like that shown in the two first columns below is put before a computer with the request to calculate the value of $f(x)$ for $x = 4.5$.

x	$f(x)$	δ	δ^2	δ^3	δ^4	δ^5	δ^6
1	99833						
2	198669	98836					
3	295520	96851	-1985				
4	389418	93898	-2953	-968	30		
5	479425	90007	-3891	-938	39	9	
6	564642	85217	-4790	-899	47	8	-1
7	644217	79575	-5642	-852	58	11	+3
8	717356	73139	-6436	-794			

(Note. In the table all values are multiplied by 10^6 .)

Not knowing anything about the function except what he can see by the table itself, he will begin by forming the difference-table as shown, and having satisfied himself that the differences decrease very rapidly, it is more than likely that he will have no hesitation in interpolating as if the fifth or sixth difference were a constant, and stating the result as $f(4.5) = .434965$. All that he knows is, however, that this result is correct, if $f(x)$ is a polynomial of not more than the sixth degree, an hypothesis which can only be approximately true here, as the two values of the sixth difference obtainable are not equal to each other. The kind of certainty our computer possesses for the correctness of his result is therefore, strictly speaking, of a statistical nature : he has often interpolated under similar circumstances, and has probably never had reason to regret it.

If now we inform our computer that the function tabulated is

$$f(x) = \sin \frac{x}{10}, \quad \dots\dots\dots (1)$$

he will see no reason to alter his views ; but if we tell him that it is

$$f(x) = \sin \frac{x}{10} + \sin \pi x , \dots\dots (2)$$

in which case $f(4.5) = 1.434965$, or that it is

$$f(x) = \sin \frac{x}{10} + x \sin \pi x , \dots\dots (3)$$

in which case $f(4.5) = 4.934965$, he will no doubt protest, and probably say that his method of interpolation is only intended for well-behaved functions. Yet the functions (2) and (3) are, in their way, just as inoffensive as (1), which shows that we cannot, without moving in a circle, define a "well-behaved" function as one to which our methods of interpolation apply.

The true source of the difficulty is that if we know nothing more about the function than what is given in the table, the function is undefined for any argument intermediate between those stated in the table. Therefore, if we insert a perfectly arbitrary value of $f(x)$ as corresponding to such an intermediate argument, no disagreement arises with the information contained in the table.

In order to obtain an approximation to the value of the function at such a place, it is not, however, necessary to know all about the function. As is shown in the text-books on interpolation, it is sufficient to possess limits between which the derivate of a certain order is situated.

It follows from the preceding considerations that interpolation may be performed with two quite different objects in view which are, unfortunately, seldom kept sufficiently apart by practical computers.

In the first place, the object of an interpolation may be to find the value of a function for a certain value of the argument, the function being tabulated for certain other arguments, and defined, though not tabulated, for the intermediate arguments. This is a problem of approximation.

Secondly, the object of an interpolation may be to fill up, in a reasonable way, a gap in a given series of functional values, for a value of the argument where the function is not defined. This is a process which is much more akin to graduation than to interpolation and ought really to be called by a different name ; we suggest the name intercalation. If, in such a case, the usual interpolation formulas are employed, they serve to define the function, not to approximate to it. We are here on hypothetical ground; we are more or less at liberty to accept or to reject the result of the intercalation on the ground of common-sense considerations, and there is no meaning in speaking of a greater or lesser "accuracy" of the result ; "plausibility" would be the correct word. This is the case in a great many statistical applications of interpolation-formulas.

CAPÍTULO SEGUNDO

TEORIA DA APROXIMAÇÃO.

1. Generalidades
2. Análise do resto.

TEORIA DA APROXIMAÇÃO

1. Consideremos dois conjuntos (X) e (Y) ligados pelas relações

$$YRX \text{ e } \tilde{X}RY,$$

em virtude das quais podemos escrever

$$Y = \varphi X \text{ e } X = \varphi^{-1} Y.$$

A operação φ depende de um certo numero de parâmetros, em um total de p . Esta determinação é, de um modo geral, possível mediante um sistema fundamental de p pares de valores (X_i, Y_i) . A eliminação destes parâmetros dependerá naturalmente da forma de operação φ .

Vamos estudar dois casos gerais, aos quais podemos reduzir os mais que se apresentam na teoria da interpolação.

1.º caso : — φ é representado por um polinômio algébrico de grão m em X . Neste caso, podemos exprimir φ por uma das fórmulas de expansão que demos na parte primeira. Designando esta fórmula de expansão por

$$\sum_0^m P_v(X) \theta^v,$$

onde os $P_v(X)$ são polinômios relativos a θ , a determinação da operação φ exige o conhecimento das $(m+1)$ quantidades

$$X_o, \theta X_o, \theta^2 X_o, \dots, \theta^m X_o,$$

para um ponto dado do conjunto (X) .

2.º caso : — φ é representado por um desenvolvimento da forma

$$Y = \sum_0^m P_v(X) \theta^v X_o + R_{m+1}(\xi),$$

onde ξ representa um ponto conveniente do conjunto (X) .

Pondo-se

$$Y - R_{m+1}(\xi) = \zeta ,$$

obtemos a operação

$$\zeta = \varphi_1 X = \sum_0^m P_v(X) \theta^v X_0 ,$$

que poderá ser tratada como no 1.º caso.

Si, num certo intervalo de variação de X , tivermos o valor de $|R_{m+1}|$ oscilando entre dois limites m e M bastante proximos e desprezíveis em face do valor de ζ , podemos por, nestas circunstancias, dentro da ordem de aproximação numérica dada por $R_{m+1}(\xi)$, para Y a igualdade aproximada :

$$Y = \zeta .$$

Em caso contrario, o valor de Y estará compreendido entre os valores, verificando as desigualdades

$$m < |Y - \zeta| < M .$$

2. Do exposto, vemos que o problema geral no 2.º caso seria o de determinar uma expressão $R_{m+1}(\xi)$, resto da formula de expansão, tal que a expressão

$$\zeta + R_{m+1}(\xi)$$

fosse identica em valor a Y , para um ξ conveniente.

Esta expressão é *util* quando podemos assignalar para $R_{m+1}(\xi)$ limites m e M , bastante proximos, de variação e, quando podemos determinar quantidades α e ε , tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} M - m < \varepsilon \\ |X - X_0| < \alpha \end{array} \right.$$

Nestas condições, podemos assignalar para Y o valor ζ dentro da ordem de aproximação dada por $R_{m+1}(\xi)$. No capítulo seguinte, vamos estudar a solução deste segundo caso, mediante o auxilio das diferenças divididas, cuja teoria foi feito na 1.ª parte. Convem, entretanto, notar que poderemos adotar uma fórmula de expansão qualquer, desde que lhe possamos adjudicar uma expressão de $R_{m+1}(X)$, completando o desenvolvimento de ζ .

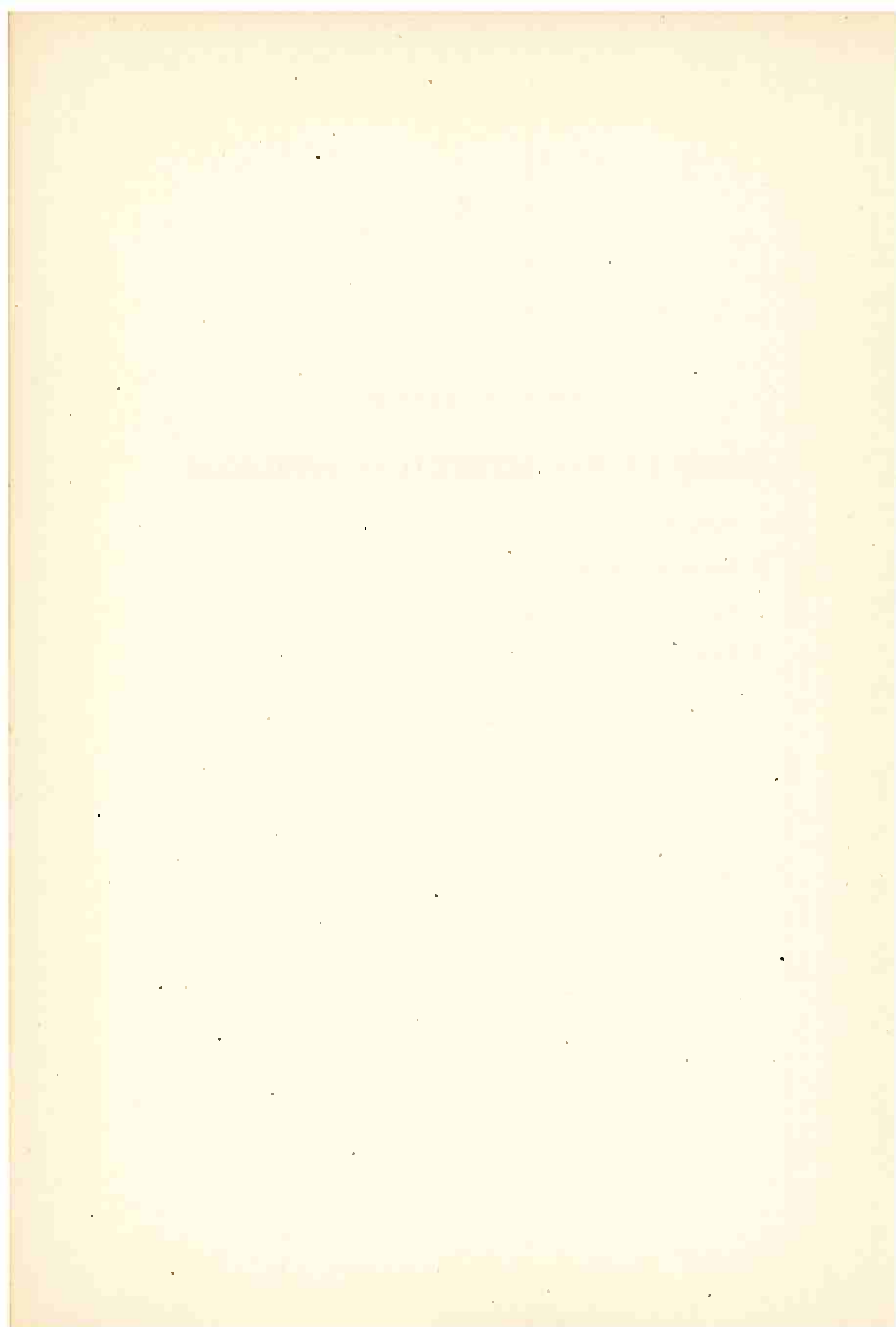
CAPÍTULO TERCEIRO

FÓRMULA DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS

1. Fórmula de Newton.
2. Expressões particulares da fórmula de Newton.

Exercício sobre a fórmula de Newton.

3. Fórmula de Stirling.



FÓRMULA DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS

1. Seja $f(x)$ uma certa função de x e

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

uma dada rarefação do conjunto (x) .

Pela definição de diferenças divididas, temos as expressões

$$\frac{f(x) - f(a_0)}{x - a_0} = f(x | a_0)$$

$$\frac{f(x | a_0) - f(a_0 | a_1)}{x - a_1} = f(x | a_0 | a_1)$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

$$\frac{f(x | a_0 | a_1 | \dots | a_{n-1}) - f(a_0 | a_1 | \dots | a_n)}{x - a_n} = f(x | a_0 | a_1 | \dots | a_n) .$$

Destas expressões deduzimos

$$f(x) = f(a_0) + (x - a_0) f(x | a_0)$$

$$f(x | a_0) = f(a_0 | a_1) + (x - a_1) f(x | a_0 | a_1)$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{array}$$

$$f(x | a_0 | a_1 | \dots | a_{n-1}) = f(a_0 | a_1 | \dots | a_n) + (x - a_n) f(x | a_0 | a_1 | \dots | a_n) .$$

Por substituições sucessivas, temos

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a_0) + (x - a_0) f(a_0 | a_1) + (x - a_0) (x - a_1) f(a_0 | a_1 | a_2) + \dots + \\ & + \dots + (x - a_0) (x - a_1) \dots (x - a_{n-1}) f(a_0 | a_1 | \dots | a_n) + \\ & + (x - a_0) (x - a_1) \dots (x - a_n) f(x | a_0 | a_1 | \dots | a_n) , \end{aligned}$$

ou, seja, pondo-se

$$\zeta = f(a_0) + (x-a_0)f(a_0|a_1) + \dots + (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})f(a_0|a_1|\dots|a_n)$$

$$\eta = (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n)f(x|a_0|a_1|\dots|a_n),$$

concluimos

$$f(x) = \zeta + \eta.$$

Esta expressão nos dá o valor de $f(x)$ em função das quantidades

$$f(a_0), f(a_0|a_1), f(a_0|a_1|a_2), \dots, f(a_0|a_1|\dots|a_n), f(x|a_0|a_1|\dots|a_n).$$

Com exceção da ultima, todas as mais podem ser obtidas diretamente do sistema fundamental dos pares de valores $(X_i, Y_i = f(X_i))$, independentemente do conhecimento de f .

Este conhecimento é necessario apenas para a determinação da ultima diferença dividida

$$f(x|a_0|a_1|\dots|a_n).$$

Si temos elementos para informar que, para um certo intervalo de x , esta diferença dividida oscila entre dois limites m e M , podemos por

$$m|x-\beta_0|^{n+1} \leq |f(x) - \zeta| \leq M|x-\beta_n|^{n+1}, \quad \beta_0 \leq a_i \leq \beta_n.$$

Si dentro da ordem de aproximação numerica, os valores M_1 e m_1 são desprezíveis em face de ζ , podemos por, para o cálculo de $f(x)$, a expressão

$$f(x) = \zeta, \text{ com } m_1 = m(x-\beta_0)^{n+1}, M_1 = M(x-\beta_n)^{n+1}.$$

De um modo geral, designando-se por ξ um numero compreendido entre o mais baixo e mais alto valor dos $(n+2)$ valores

$$x, a_0, a_1, \dots, a_n,$$

é licito por, de acordo com a fórmula já estabelecida,

$$R_{n+1}(x) = (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_n) \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}.$$

A expressão de $f(x)$ em função das diferenças divididas varia de aspeto conforme escolhamos as rarefações do conjunto (x) .

Vamos passar em revista no capitulo seguinte algumas fórmulas fundamentais baseadas no cálculo já efetuado no estudo das diferenças divididas.

EXPRESSÕES PARTICULARES DA FÓRMULA DE NEWTON

2. A fórmula que deduzimos no capítulo anterior é conhecida pelo nome de fórmula de Newton e sua expressão, como já tivemos ocasião de dizer, depende da escolha dos argumentos $a_0, a_1, \dots, a_n$.

A expressão geral que obtivemos é a seguinte :

$$f(x) = f(a_0) + (x-a_0) f(a_0|a_1) + (x-a_0)(x-a_1) f(a_0|a_1|a_2) + \dots + \\ + \dots + (x-a_0)(x-a_1) \dots (x-a_{n-1}) f(a_0|a_1| \dots |a_n) + R_{n+1},$$

com $R_{n+1} = (x-a_0)(x-a_1) \dots (x-a_n) f(x|a_0|a_1| \dots |a_n).$

Dada a simetria de $f(x|a_0|a_1| \dots |a_n)$ em relação aos seus $(n+2)$ argumentos

$$x, a_0, a_1, \dots, a_n,$$

podemos supor-los ordenados por ordem de grandeza, seja

$$\beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{n+1}$$

e, nestas condições, teríamos

$$f(x|a_0|a_1| \dots |a_n) = f(\beta_0|\beta_1| \dots |\beta_{n+1}) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{n+1},$$

sendo ξ um certo valor de intervalo de x , verificando as desigualdades

$$\beta_0 \leq \xi \leq \beta_{n+1}.$$

Façamos na série de argumentos

$$a_0, a_1, \dots, a_{2v-1}, a_{2v},$$

as convenções

$$a_{2v-1} = -v$$

$$a_{2v} = v.$$

Obtemos nestas condições as expressões

$$f(a_0|a_1|a_2|\dots|a_{2v-1}) = \frac{\Delta^{2v-1}f(-v)}{\underline{2v-1}}$$

$$f(a_0|a_1|a_2|\dots|a_{2v}) = \frac{\Delta^{2v}f(-v)}{\underline{2v}}$$

$$(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2v-1}) = x(x+1)(x-1)\dots(x-v+1)(x+v-1)(x+v)$$

$$(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2v}) = x(x+1)(x-1)\dots(x+v)(x-v).$$

Façamos, por simplicidade de notação,

$$(x^2-1)(x^2-4)\dots(x^2-v^2) = S_{2v}(x).$$

Podemos escrever, então,

$$(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{2v-1}) = x(x+v)S_{2v-2}(x)$$

$$(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{2v}) = xS_{2v}(x).$$

Levando-se estes valores na fórmula de NEWTON, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) = f(o) + x \frac{\Delta f(-1)}{\underline{1}} + x(x+1) \frac{\Delta^2 f(-1)}{\underline{2}} + x(x^2-1) \frac{\Delta^3 f(-2)}{\underline{3}} + \\ + x(x^2-1)(x+2) \frac{\Delta^4 f(-2)}{\underline{4}} + \dots + x(x^2-1)(x^2-4)\dots(x^2-(v-1)^2) \frac{\Delta^{2v-1}f(-v)}{\underline{2v-1}} + \\ + x(x^2-1)(x^2-4)\dots(x^2-(v-1)^2)(x+v) \frac{\Delta^{2v}f(-v)}{\underline{2v}} + \dots + R_{2k+1}, \end{aligned}$$

ou, então,

$$f(x) = f(o) + x \sum_{v=1}^{v=k} S_{2v-2}(x) \left[\frac{\Delta^{2v-1}f(-v)}{\underline{2v-1}} + (x+v) \frac{\Delta^{2v}f(-v)}{\underline{2v}} \right] + R_{2k+1}.$$

R_{2k+1} tem por expressão

$$R_{2k+1} = x S_{2k}(x) \frac{f^{2k+1}(\xi_1)}{\underline{2k+1}}.$$

Si, pelo contrario, fizermos na série de argumentos

$$a_0, a_1, \dots, a_{2v-1}, a_{2v},$$

as convenções

$$a_{2v-1} = v$$

$$a_{2v} = -v ,$$

obtemos as expressões

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v-1}) = \frac{\Delta^{2v-1}f(-v+1)}{\underline{2v-1}}$$

$$f(a_0|a_1|\dots|a_{2v}) = \frac{\Delta^{2v}f(-v)}{\underline{2v}}$$

$$\begin{aligned}(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{2v-1}) &= x(x-1)(x+1)\dots(x+v-1)(x-v+1)(x-v) = \\ &= x(x-v)S_{2v-2}(x)\end{aligned}$$

$$(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{2v}) = x(x^2-1)\dots(x^2-v^2) = xS_{2v}(x) .$$

Levando-se estes valores na expressão de NEWTON, obtemos

$$\begin{aligned}f(x) &= f(o) + x \frac{\Delta f(o)}{\underline{1}} + x(x-1) \frac{\Delta^2 f(-1)}{\underline{2}} + x(x^2-1) \frac{\Delta^3 f(-1)}{\underline{3}} + \\ &+ x(x^2-1)(x-2) \frac{\Delta^4 f(-2)}{\underline{4}} + \dots + \dots + x S_{2v-2}(x) \frac{\Delta^{2v-1} f(-v+1)}{\underline{2v-1}} + \\ &+ x(-v) S_{2v-2}(x) \frac{\Delta^{2v} f(-v)}{\underline{2v}} + \dots + R_{2k+1} ,\end{aligned}$$

ou, ainda,

$$f(x) = f(o) + x \sum_1^k S_{2v-2}(x) \left[\frac{\Delta^{2v-1} f(-v+1)}{\underline{2v-1}} + (x-v) \frac{\Delta^{2v} f(-v)}{\underline{2v}} \right]$$

O resto tem por expressão

$$R_{2k+1} = x S_{2v}(x) \frac{f^{2k+1}(\xi_2)}{\underline{2k+1}} .$$

EXERCICIO SOBRE A APLICAÇÃO DA FÓRMULA DE NEWTON

Como uma aplicação da fórmula de NEWTON, calculemos o valor da função

$$(1) \quad f(x) = \sqrt{x},$$

no ponto $x = 5$, com dez decimais exatas.

De uma tabela de raízes quadradas, tiramos o valor aproximado

$$(2) \quad \sqrt{5} = 2,2361$$

Este valor nos serve de indicação para a rarefação a tomar. Escolhendo-se valores de x tais que $f(x)$ resulte próximo de (2), asseguramos um pequeno valor para o resto. Adotando-se, então, os valores constantes das duas primeiras colunas da tabela abaixo, calculamos as diferenças divididas das diversas ordens, sendo f_1, f_2, f_3 as diferenças divididas de primeira, segunda e terceira ordem respectivamente.

a_i	$f(a_i)$	f_1	f_2	f_3
4.9999196025	2.23605	0.223608095507490	-0,011180459558330	0,001118099130988
4.9999643236	2.23606	0,223607095500354	-0,011180309549790	
5.0000090449	2.23607	0,223606095502163		
5.0000537664	2.23608			

A fórmula de Newton toma o aspeto numérico

$$\begin{aligned} f(5) = & 2.23605 + 0,00008\ 03975 \times 0,22360\ 80955\ 07490 + \\ & + 0,00008\ 03975 \times 0,00003\ 56764 \times (-0,0118\ 04595\ 58330) + \\ & + 0,00008\ 03975 \times 0,00003\ 56764 \times (-0,00000\ 90449) \times \\ & \times 0,00111\ 81991\ 30988 + R_4, \end{aligned}$$

com

$$R_4 = 0,0000\ 803975 \times 0,00003\ 56764 \times (-0,00000\ 90449) \times \\ \times 0,00005\ 37664 \times \frac{f^{(4)}(\xi)}{4} = 1,4 \times 10^{-18} \frac{f^{(4)}(\xi)}{4}$$

Mas $f^{(4)}(x)$ é dado por

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} \frac{\sqrt{x}}{x^4}$$

Para ξ compreendido no intervalo

$$4,99991\ 96025 \leq \xi \leq 5,00005\ 37664,$$

temos

$$f^4(\xi) \sim 0,0034$$

donde para o resto aproximadamente o valor

$$R_4 = 2,0 \times 10^{-22}.$$

Como as diferenças divididas foram calculadas com quinze decimais, vemos que o termo complementar não tem influência sobre o valor procurado.

Dispondo os cálculos da seguinte forma :

$$\begin{array}{r} 0,00111\ 80991\ 30988 \\ \times -0,00000\ 90449 \\ \hline -0,00000\ 00100\ 39839\ 7 \\ -0,01118\ 04595\ 58330 \\ \hline -0,01118\ 04695\ 98169\ 7 \\ \times 0,00003\ 56764 \\ \hline -0,00000\ 03988\ 78905\ 7 \\ + 0,22360\ 80955\ 07490 \\ \hline 0,22360\ 76966\ 28584\ 3 \\ \times 0,00008\ 03975 \\ \hline 0,00001\ 79774\ 99789\ 7 \\ + 2,23605 \\ \hline 2,23606\ 79774\ 99789\ 7, \end{array}$$

obtemos o resultado

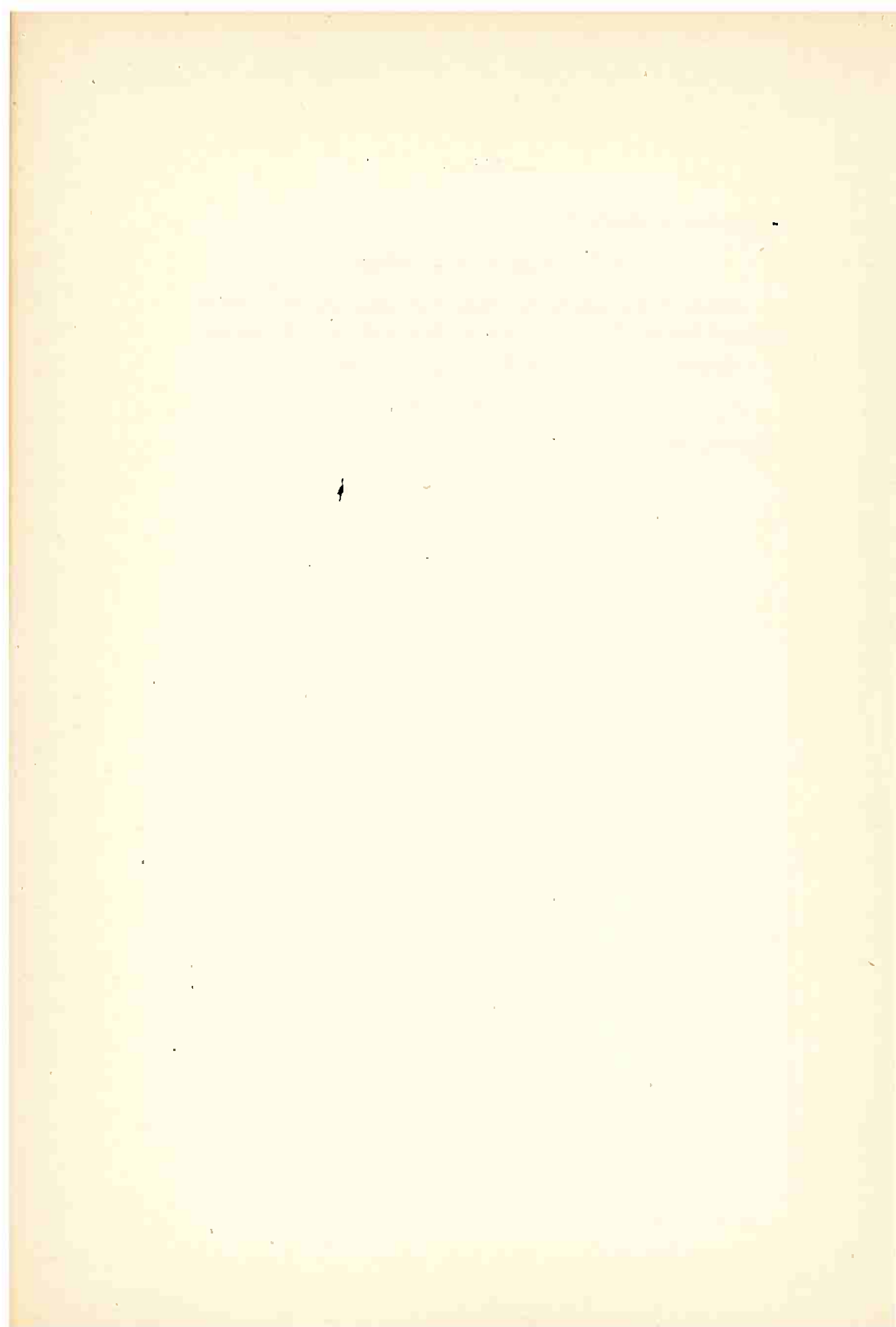
$$\sqrt{5} = 2,23605\ 79775\ 99790\ .$$

Como o resto não influe sobre este valor, podemos contar com um erro da ordem da decima quinta casa decimal no maximo.

Quadrando este resultado, obtemos o valor

$$5,00000\ 00000\ 00001,$$

ligeiramente excedente.



FÓRMULA DE STIRLING

3. Adicionando-se as duas fórmulas deduzidas no parágrafo anterior

$$f(x) = f(o) + x \sum_1^k S_{2v-2}(x) \left[\frac{\Delta^{2v-1} f(-v)}{2v-1} + (x+v) \frac{\Delta^{2v} f(-v)}{2v+1} \right] + x S_{2k}(x) \frac{f^{2k+1}(\xi_1)}{2k+1}$$

$$f(x) = f(o) + x \sum_1^k S_{2v-2}(x) \left[\frac{\Delta^{2v-1} f(-v+1)}{2v-1} + (x-v) \frac{\Delta^{2v} f(-v)}{2v+1} \right] + x S_{2k}(x) \frac{f^{2k+1}(\xi_2)}{2k+1},$$

obteremos a expressão

$$f(x) = f(o) + x \sum_1^k S_{2v-2}(x) \left[\frac{\Delta^{2v-1}}{2v-1} \left(\frac{f(-v) + f(-v+1)}{2} \right) + x \frac{\Delta^{2v} f(-v)}{2v+1} \right] + x S_{2k}(x) \frac{f^{2k+1}(\xi)}{2k+1}.$$

Introduzindo-se as operações

$$\delta = E^{-\frac{1}{2}} \Delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$$

$$\square = \frac{E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}}{2},$$

podemos escrever

$$\Delta^{2v} = E^v \delta^{2v}$$

$$\Delta^{2v-1} = E^{v-\frac{1}{2}} \delta^{2v-1}$$

Por outro lado

$$\frac{f(-v) + f(-v+1)}{2} = \square f\left(-v + \frac{1}{2}\right)$$

Nestas condições, temos

$$\Delta^{2v} f(-v) = \delta^{2v} f(o)$$

$$\Delta^{2v-1} \left[\frac{f(-v) + f(-v+1)}{2} \right] = \square \delta^{2v-1} f(o)$$

Resultará para a fórmula de Stirling o aspeto

$$f(x) = f(o) + x \sum_{v=1}^{v=k} S_{2v-2}(x) \left[\frac{\square \delta^{2v-1}}{2v+1} + x \frac{\delta^{2v}}{2v} \right] f(o) + x S_{2k}(x) \frac{f^{2k+1}(\xi)}{2k+1}$$

Esta fórmula foi deduzida na consideração das séries de argumentos

$$a_{2v-1} = v$$

$$a_{2v} = -v$$

e

$$a_{2v-1} = -v$$

$$a_{2v} = v$$

e para uma dada função $f(x)$.

Para as séries de argumentos

$$a_{2v-1} = vh$$

$$a_{2v} = -vh$$

e

$$a_{2v-1} = -vh$$

$$a_{2v} = vh$$

e uma função $f(\alpha + xh)$, com α e h constantes, subsistem ainda as mesmas expressões já obtidas e, em particular, a fórmula de Stirling, a condição de efetuarmos a transformação

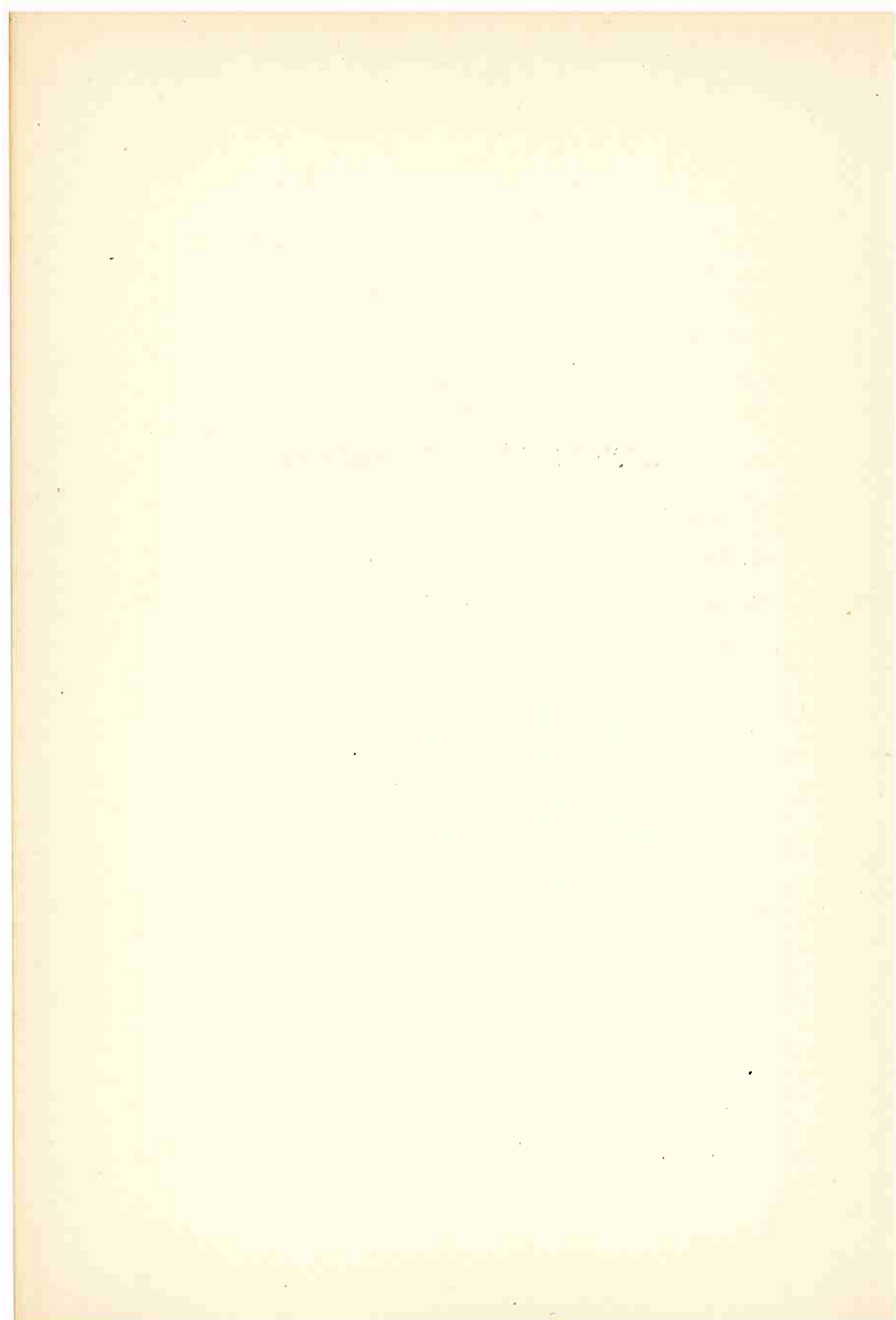
$$f(\alpha + xh) = F(x).$$

CAPÍTULO QUARTO

CONSTRUÇÃO DE TABELAS

1. Generalidades.
2. Fórmula fundamental da sub-tabulação.
3. Operações auxiliares da sub-tabulação.

Exercício sôbre construção de tabelas.



CONSTRUÇÃO DE TABELAS

1. Generalidades.

A teoria da construção de tabelas baseia-se na sub-tabulação de valores equidistantes, previamente calculados, da função $f(x)$ a tabular. Seja h a razão da progressão aritmética formada pelos valores de x :

$$(1) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Temos, para essa série, de um modo geral, a relação:

$$a_k = a_0 + kh.$$

Por outro lado, seja $\frac{h}{n}$ o intervalo da sub-tabulação, isto é, a razão da progressão aritmética formada pelos novos termos, equidistantes, inseridos na série (1).

O número n é dito a frequência da sub-tabulação; o número de meios inseridos é $n-1$.

Temos para cada intervalo $a_i - a_{i+1}$ os seguintes pontos a considerar:

$$(2) \quad a_i, a_i + \frac{h}{n}, a_i + 2\frac{h}{n}, \dots, a_i + n\frac{h}{n} = a_{i+1}.$$

O problema da sub-tabulação consiste em determinar os valores das diferenças finitas.

$$(3) \quad \Delta^r f\left(a_i + k\frac{h}{n}\right), \quad r = 0, 1, 2, \dots, p$$

em função de elementos numericamente deduzidos dos valores de $f(x)$ correspondentes à série (1).

A ordem p da diferença finita (3) de ordem mais elevada considerada na sub-tabulação constitui a ordem desta operação.

Quando $f(x)$ é um polinômio de grau p , a ordem da sub-tabulação não poderá ser superior a p , pois que se anulam as diferenças de ordem superior. Quando $f(x)$ não é polinômio,

a ordem da sub-tabulação é dada pela diferença finita Δ^n de ordem mais elevada conservada. Neste caso, as diferenças finitas de ordem superior não sendo nulas, haverá um certo erro de aproximação em supor-las nulas a partir de uma dada ordem. Entretanto, dispondo de h e n é sempre possível, de um modo geral, obter para este erro um limite superior de variação igual ou inferior ao limite de erro resultante da ordem de aproximação de $f(x)$ para a série (1) e das operações executadas sobre estes valores.

2. Fórmula fundamental da sub-tabulação.

Consideremos, relativamente à série (2), os seguintes operadores :

- o operador E de deslocamento
- o operador A de expansão
- o operador Δ de diferença finita
- o operador δ de diferença central

Operando-se sobre $f(a)$, onde a é arbitrário, por δ , obtemos

$$\delta f(a) = A^{-\frac{h}{2n}} \Delta f(a).$$

Elevando-se esta expressão à potência k , obtemos

$$(4) \quad \delta^k f(a) = A^{-k \frac{h}{2n}} \Delta^k f(a),$$

donde tiramos

$$\Delta^k f(a) = A^{k \frac{h}{2n}} \delta^k f(a).$$

Introduzindo-se o operador E de deslocamento relativo à série (2), ligado a A pela relação

$$A^{\frac{h}{n}} = E,$$

obtemos a fórmula

$$(5) \quad \Delta^k f(a) = E^{\frac{k}{2}} \delta^k f(a).$$

Esta fórmula fundamental nos permite obter as diferenças finitas

$$\Delta^k f(a) ,$$

no ponto a em função da diferença central δ^k no ponto

$$a + k \frac{h}{2n} .$$

Ha entre dois valores uma defasagem de $k \frac{h}{2n}$.

Vemos, pois, que o problema visado se reduz agora à determinação das diferenças centrais $\delta^k f(a)$. Vamos abordar esta determinação no parágrafo seguinte. Para esta determinação é mais comodo introduzir a transformação

$$f(a + k \frac{h}{n}) = F(k) .$$

Neste caso, teremos

$$f(a) = F(o) .$$

3. Operações auxiliares da sub-tabulação.

Consideremos a fórmula de Stirling

$$F(x) = F(o) + x \sum_1^k S_{2v-2}(x) \left[\frac{\square \delta^{2v-1}}{2v-1} + x \frac{\delta^{2v}}{2v} \right] F(o) + R .$$

Sendo m um número inteiro, atribuamos a x sucessivamente os dois valores

$$x = \pm m .$$

Para estes valores, o desenvolvimento de Stirling é finito e termina com $k = m$, sendo nulo o resto.

Podemos portanto escrever

$$F(m) = F(o) + m \sum_1^m S_{2v-2}(m) \left[\frac{\square \delta^{2v-1}}{2v-1} + m \frac{\delta^{2v}}{2v} \right] F(o)$$

$$F(-m) = F(o) + m \sum_1^m S_{2v-2}(m) \left[\frac{\square \delta^{2v-1}}{2v-1} - m \frac{\delta^{2v}}{2v} \right] F(o)$$

Efetuando-se a semi-diferença dessas expressões e dividindo ambos os membros por m , obtemos

$$\frac{F(m) - F(-m)}{2m} = \sum_1^m S_{2v-2}(m) \frac{\square \delta^{2v-1}}{2v-1} F(o) .$$

Introduzindo-se a operação

$$\delta_s = E^{\frac{s}{2}} - E^{-\frac{s}{2}} ,$$

podemos escrever

$$\frac{F(m) - F(-m)}{2m} = \frac{\delta_{2m}}{2m} F(o) ,$$

donde, afinal,

$$\frac{\delta_{2m} F(o)}{2m} = \sum_1^m S_{2v-2}(m) \frac{\square \delta^{2v-1}}{2v-1} F(o) .$$

Esta expressão permite exprimir as operações

$$\square \delta^{2k-1} \text{ e } \delta^{2k}$$

em função de $\frac{1}{2m} \delta_{2m}$ e suas potencias.

Para que estas operações possam ser executadas com a tabela inicial é necessario que os pontos

$$+m \text{ e } -m$$

pertencam à série (1), ou, em outras palavras, que os valores

$$F(+m) \text{ e } F(-m)$$

correspondam a valores de

$$f\left(a + m \frac{h}{n}\right) \text{ e } f\left(a - m \frac{h}{n}\right),$$

onde a designa um valor a determinar de maneira a satisfazer essa condição.

Em particular, para dois valores consecutivos da série (1)

$$a_i, a_i + h ,$$

devemos ter

$$a + m \frac{h}{n} = a_i + h$$

$$a - m \frac{h}{n} = a_i$$

donde

$$a = a_i + \frac{h}{2}$$

$$n = 2m .$$

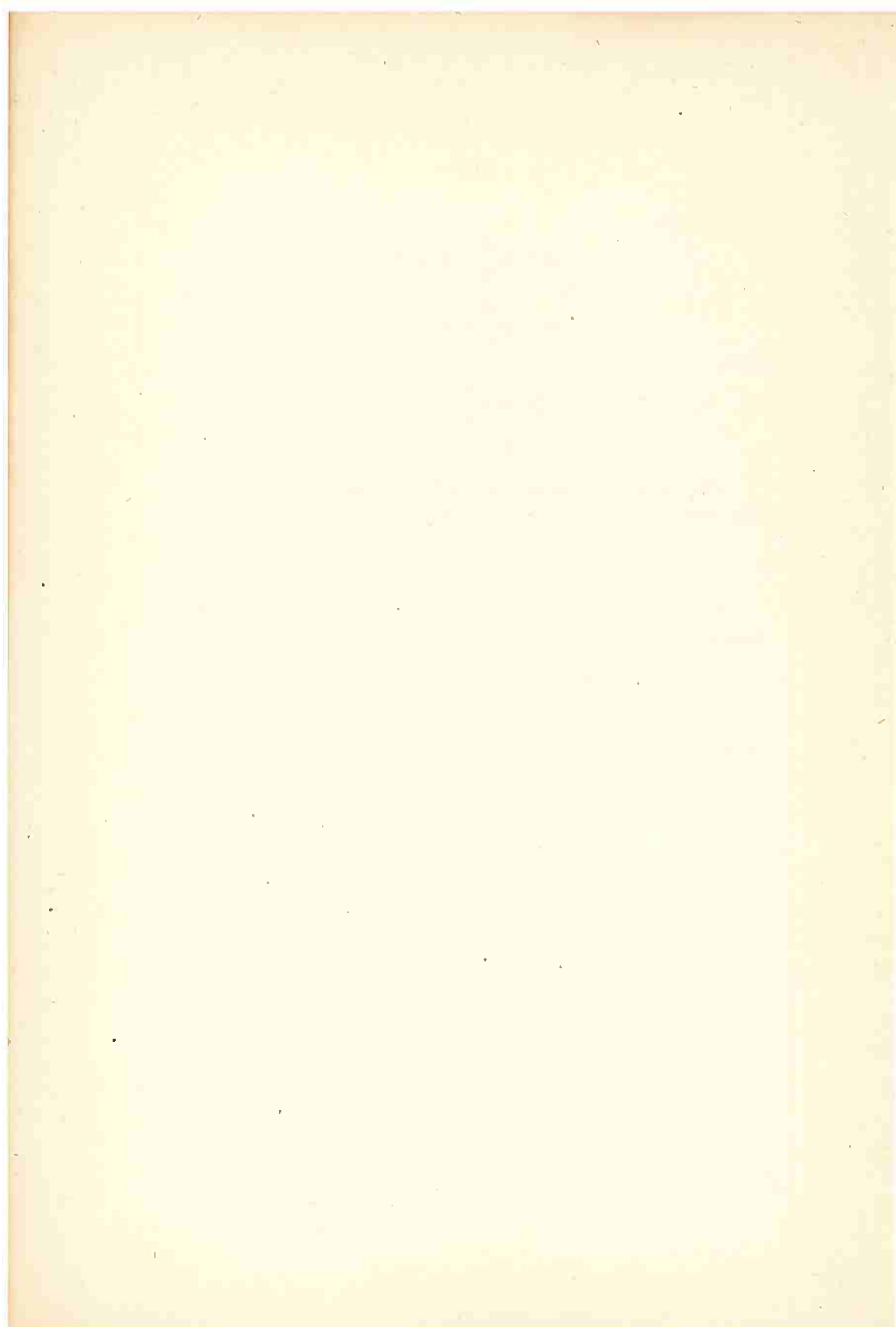
Conhecidos os valores de $\square \delta^{2k-1}$, podemos obter δ^{2k-1} pela relação

$$E^{\pm \frac{1}{2}} \delta^r = \square \delta^r \pm \frac{1}{2} \delta^{r+1} .$$

O preenchimento das colunas δ^r pode ser feito de acordo com a fórmula

$$E^{\frac{1}{2}} \delta^r = \delta^{r+1} + E^{-\frac{1}{2}} \delta^r .$$

Obtidos estes valores, podemos achar as diferenças finitas Δ^k pela fórmula fundamental. Com estas, completamos a tabela.



EXERCICIO SÔBRE A CONSTRUÇÃO DE TABELAS

Dada a tabela de valores de um polinômio do 3.º grau,

x	$f(x)$
0	1
8	577
16	4353
24	14401
32	33793

com um intervalo $h = 8$, sub-tabula-la para uma frequência $n = 4$.

Temos

$$h = 8$$

$$n = 4$$

$$2m = 4 \quad \therefore \quad m = 2$$

$$0,25\delta_4 = \sum_1^2 S_{2v-2}(2) \frac{\square \delta^{2v-1}}{2v-1} = \square \delta + \frac{1}{2} \square \delta^3 .$$

$$(0,25\delta_4)^2 = \delta^2$$

$$(0,25\delta_4)^3 = \square \delta^3$$

$$(0,25\delta_4)^4 = 0 .$$

Construidas as tres últimas colunas com a operação $\frac{1}{4} \delta_4$ reiterada, passamos a preencher as tres seguintes pelas operações

$$\frac{1}{4} \delta^4 = \square \delta + \frac{1}{2} \square \delta^3$$

$$\left(\frac{1}{4} \delta^4\right)^2 = \square^2 \delta^2 = \delta^2$$

$$\left(\frac{1}{4} \delta^4\right)^3 = \square^3 \delta^3 = \square \delta^3 .$$

Obtidas estas colunas, passamos ao cálculo de δ , δ^2 , δ^3 pela relação

$$E^{\pm \frac{1}{2}} \delta^r = \square \delta^r \pm \frac{1}{2} \delta^{r+1} .$$

Para $r = 3$, resulta

$$E^{\pm \frac{1}{2}} \delta^3 = \square \delta^3 ,$$

ou

$$\delta^3 F\left(\frac{1}{2}\right) = \square \delta^3 F(o) .$$

Como estas diferenças são constantes, podemos preencher a coluna.

δ^2 pode ser obtido de $\left(\frac{1}{4} \delta^4\right)^2$.

Para completar a sua coluna, utilizamos as relações

$$\delta^r F\left(\frac{1}{2}\right) = \delta^{r+1} F(o) + \delta^r F\left(-\frac{1}{2}\right) .$$

Para $r = 2$ resulta

$$\delta^2 F\left(\frac{1}{2}\right) = \delta^3 F(o) + \delta^2 F\left(-\frac{1}{2}\right)$$

δ pode ser obtido de $\square \delta$ pela expressão

$$\delta F\left(\pm \frac{1}{2}\right) = \square \delta F(o) \pm \frac{1}{2} \delta^2 F(o) .$$

A sua coluna pode ser completada pela relação

$$\delta F\left(\frac{1}{2}\right) = \delta^2 F(o) + \delta F\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Para passarmos das diferenças δ às diferenças Δ , utilizamos a relação

$$\Delta^k = E^{\frac{k}{2}} \delta^k.$$

Para $k = 1$ temos

$$\Delta = E^{\frac{1}{2}} \delta$$

ou, ainda

$$\Delta F(o) = E^{\frac{1}{2}} \delta F(o) = \delta F\left(\frac{1}{2}\right).$$

Reiterando as operações, temos

$$\Delta^2 F(o) = E \delta^2 F(o) = \delta^2 F(1)$$

$$\Delta^3 F(o) = E^{\frac{3}{2}} \delta^3 F(o) = \delta^3 F\left(\frac{3}{2}\right)$$

Com a aplicação do operador de deslocamento E obteremos para um ponto p da sucessão

$$a_i + p \frac{h}{n}$$

a expressão de $\Delta^k F(p)$ pela operação

$$\Delta^k F(p) = E^p \Delta^k F(o).$$

Nestas condições, temos

$$\Delta F(p) = F\left(p + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta^2 F(p) = \delta^2 F(p+1)$$

$$\Delta^3 F(p) = \delta^3 F\left(p + \frac{3}{2}\right).$$

Como $\delta^3 F\left(p + \frac{3}{2}\right)$ é constante, concluímos

$$\Delta^3 F(p) = 48.$$

Para $\Delta^2 F(p)$, temos

$$\Delta^2 F(p) = \delta^2 F(p+1)$$

e para $\Delta F(p)$, vem

$$\Delta F(p) = \delta F\left(p + \frac{1}{2}\right).$$

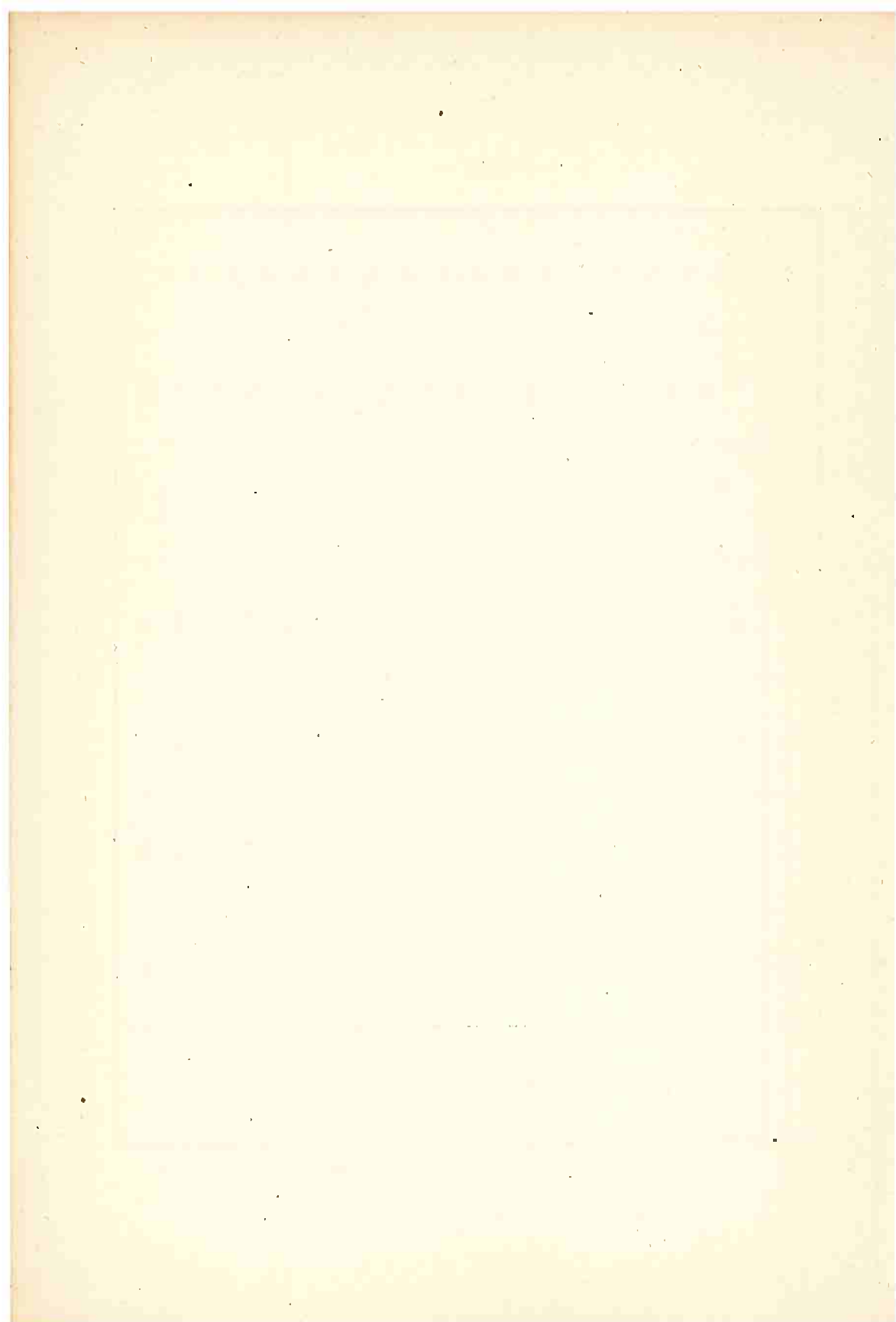
Com estes elementos, preenchemos a tabela.

TABELA I

x	$f(x)$	δ	δ^2	δ^3	$\square \delta$	$\square \delta^2$	δ^3	$(0,25\delta_4)^3$	$(0,25\delta_4)^2$	$0,25\delta_4$
0	1	12	8	48						
2		68	56	48						
4		172	104	48	120		48			144
6		324	152	48						
8	577	524	200	48		200			200	
10		772	248	48						
12		1068	296	48	920		48	48		944
14		1412	344	48						
16	4353	1804	392	48		392			392	
18		2244	440	48						
20		2732	488	48	2488		48	48		2512
22		3268	536	48						
24	14401	3852	584	48		584			584	
26		4484	632	48						
28		5164	680	48						
30		5892	728	48			48			4848
32	33793	6668	776	48			48			

TABELA II

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	δ	δ^2	δ^3
0	1	12	56	48	12	8	48
2	13	68	104	48	68	56	48
4	81	172	152	48	172	104	48
6	253	324	200	48	324	152	48
8	577	524	248	48	524	200	48
10	1101	772	296	48	772	248	48
12	1873	1068	344	48	1068	296	48
14	2941	1412	392	48	1412	344	48
16	4353	1804	440	48	1804	392	48
18	6157	2244	448	48	2244	440	48
20	8401	2732	536	48	2732	488	48
22	11133	3268	584	48	3268	536	48
24	14401	3852	632	48	3852	584	48
26	18253	4484	680	48	4484	632	48
28	22737	5164	728	48	5164	680	48
30	27901	5892	776	48	5892	728	48
32	33793	6668	824	48	6668	776	48
34	40461	7492		48	7492	824	48



CAPÍTULO QUINTO

INTERPOLAÇÃO INVERSA

Determinação do intervalo de convergência de uma raiz dada.

Exercício sobre interpolação inversa.

THE

LIBRARY OF THE

UNIVERSITY OF MICHIGAN

18

DETERMINAÇÃO DO INTERVALO DE CONVERGÊNCIA DE UMA RAIZ DADA

A teoria das funções implícitas estabelece que, para que uma expressão da forma

$$(1) \quad \Phi(x, z) = 0$$

defina uma função $z = f(x)$ da variável x , reduzindo-se a z_0 para um valor de $x = x_0$ e apresentando uma esteira diferencial continua no ponto (z_0, x_0) , é necessário que a derivada $\Phi_z'(x, z)$ seja diferente de zero no ponto (x_0, z_0) e conserve um sinal constante ao menos num intervalo $|z - z_0| < \alpha$.

Em particular, para $x_0 = 0$, temos uma solução de (1) desde que $\Phi_z'(x, z)$ seja diferente de zero no ponto $z = z_0, x = x_0 = 0$ e conserve um sinal constante.

O problema da interpolação inversa consiste em determinar o valor z_0 para esta hipótese particular de x_0 ser nulo.

Nessas condições, sendo

$$F(z) = 0$$

a equação cujas raízes queremos determinar, consideramos a função $\Phi(x, z)$ dada por

$$\Phi(x, z) = F(z) - x = 0.$$

O jacobiano desta inversão é dada por

$$\Phi_z'(x, z) = F'_z(z)$$

Sendo $F'(z_0) \neq 0$ e $\text{sg } F'(z_0 \pm \alpha) = \text{constante}$, no campo

$$|x| < \alpha$$

$$|z - z_0| < \alpha$$

existe uma função $f(x) = z$, ou, pelo menos uma de suas determinações, convergindo para o valor z_0 quando x tende para zero.

O intervalo definido por

$$\operatorname{sg} F'_z(z_0 \pm \alpha) = \text{constante},$$

é dito o intervalo de convergência da raiz z_0 .

No caso de $F(z)$ ser um polinômio em z , os intervalos de convergência são dados pelos intervalos das raízes reais do polinômio derivado $F'_z(z)$. No caso deste só ter raízes imaginárias, o intervalo em questão é evidentemente $(-\infty, \infty)$.

Com aplicação, consideremos as equações

$$F(z) = z^3 - 2z + 1,002 = 0$$

$$F_1(z) = z^3 - z^2 + z + 1 = 0$$

A 1.^a tem intervalos de convergência dados pelos intervalos das raízes reais de

$$F'_2(z) = 3z^2 - 2 = 0.$$

Estes intervalos são

$$1.^{\circ} \quad -\infty < z < -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$2.^{\circ} \quad -\sqrt{\frac{2}{3}} < z < \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$3.^{\circ} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} < z < \infty.$$

Para a 2.^a equação, temos, anulando a derivada do 1.^o membro,

$$F'_1(z) = 3z^2 - 2z + 1 = 0.$$

As raízes desta equação são imaginárias. Portanto só ha um intervalo de convergência dado por

$$-\infty < z < \infty.$$

EXERCICIO SOBRE INTERPOLAÇÃO INVERSA

Dada a equação

$$(1) \quad F(z) = z^3 - 2z + 1,002 = 0 ,$$

achar a raiz proxima da unidade.

Façamos
$$z^3 - 2z + 1,002 = x .$$

A função inversa terá por expressão genérica

$$z = f^{+++}(x).$$

As raizes de (1) correspondem aos valores das diferentes determinações de

$$f^{+++}(x) \text{ para } x = 0 .$$

Aplicando-se a fórmula de Newton à função $f(x)$, para uma dada rarefação

$$a_0, a_1, \dots, a_n,$$

temos

$$z = f(x) = f(a_0) + (x-a_0) f(a_0, a_1) + \dots + (x-a_0) (x-a_0) \dots (x-a_{n-1}) \\ f(a_0, a_1, \dots, a_n) + R_{n+1}$$

Fazendo-se nesta expressão $x = 0$, obtemos

$$(2) \quad z = f(a_0) - a_0 f(a_0|a_1) + a_0 a_1 f(a_0|a_1|a_2) + \dots + \\ + (-1)^n a_0 a_1 \dots a_{n-1} f(a_0|a_1| \dots |a_n) + R_{n+1} .$$

Escolhendo-se a rarefação $a_0, a_1, \dots, a_n$, dentro de intervalo de convergência de z para a raiz particular z_0 , obtemos por (2) o valor desejado.

Para o cálculo organizamos uma tabela dos valores de x em função de z , que é a seguinte :

z	$f(z)$	$f(z)$	${}^2F(z)$	${}^3F(z)$
0,8	-0,086	0,017	0,054	0,006
0,9	-0,069	0,071	0,060	
1,0	0,002	0,131		
1,1	0,133			

Por esta tabela, vemos que a raiz procurada acha-se entre os valores $z = 0,9$ e $z = 1,0$.

Para obtermos uma convergência mais rápida com a fórmula de Newton, ha conveniência em subtabularmos êste intervalo. Chamando de ϑ as novas diferenças finitas, temos para calcula-las a seguinte relação para $n = 5$:

$$(1 + \vartheta)^5 = 1 + \Delta$$

donde

$$\vartheta = (1 +)^{\frac{1}{5}} - 1 = \frac{1}{125} \left[25\Delta - 10\Delta^2 + 6\Delta^3 \right] .$$

Daqui tiramos

$$\vartheta^2 = \left(\frac{1}{5} \Delta \right)^2 - \frac{4}{125} \Delta^3$$

$$\vartheta^3 = \left(\frac{1}{5} \Delta \right)^3$$

Calculando para o valor $z = 0,9$, obtemos

$$\vartheta^3 F(0,9) = \frac{1}{125} \times 0,006 = 0,000\,048$$

$$\vartheta^2 F(0,9) = \frac{0,60}{25} = \frac{4 \times 0,006}{125} = 0,002208$$

$$\vartheta F(0,9) = \frac{1}{125} \left[25 \times 0,071 - 10 \times 0,060 + 6 \times 0,006 \right] = 0,009.688$$

Com estes valores construímos a seguinte tabela :

z	$F(z)$	$\mathfrak{F}F(z)$	$\mathfrak{F}^2F(z)$	$\mathfrak{F}^3F(z)$
0,90	-0,69000	0,009688	0,002208	0,000048
0,92	-0,059312	0,011896	0,002256	0,000048
0,94	-0,047416	0,014152	0,002304	0,000048
0,96	-0,033264	0,016456	0,002352	0,000048
0,98	-0,016808	0,018808	0,002400	0,000048
1,00	+0,002000	0,031208	0,002448	
1,02	0,033208			

Dêste quadro tiramos então a seguinte tabela para a função inversa :

a_i	x	$f(x)$
a_0	-0,047416	0,94
a_1	-0,033264	0,96
a_2	-0,016808	0,98
a_3	+0,002000	1,00

Com estes valores passamos ao cálculo das diferenças divididas que se encontram na tabela seguinte:

De acôrdo com esta tabela, temos para a fórmula (2), sem o resto, o aspeto :

$$\begin{aligned} z = f(o) &= 0,94 + 0,047416 \times 1,413228 - \\ &- 0,047416 \times 0,033264 \times 6,464509 - \\ &+ 0,047416 \times 0,033264 \times 0,016808 \times 32,442332 . \end{aligned}$$

Para efetuarmos os cálculos, começamos pela última diferença dividida de acôrdo com a seguinte disposição :

$$\begin{array}{r} 0,016808 \times 32,442332 = \quad 0,545291 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad -6,464509 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad -5,919218 \\ \times \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0,033264 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad -0,196897 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1,413228 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad +1,216331 \\ \times \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0,047416 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad +0,057674 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad +0,94 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad +0,997674 \end{array}$$

Para sabermos com quantas decimais podemos contar, temos necessidade de estimar o resto, que podemos por sob a forma

$$R_4 = - 0,04716 \times 0,033264 \times 0,016708 \times 0,002000 \times f^{(4)}(\xi) ,$$

ou, seja, efetuando o produto destes fatores

$$R_4 = - 0,000000053 f^{(4)}(\xi) .$$

Para o cálculo de $f^{(4)}(\xi)$ vamos utilizar as seguintes relações :

$$z^3 - 2z + 1.002 = x$$

$$(3z^2 - 2) \frac{dz}{dx} = 1$$

$$6z \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + (3z^2 - 2) \frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

$$6 \left(\frac{dz}{dx} \right)^3 + 18z \left(\frac{dz}{dx} \right) \frac{d^2z}{dx^2} + (3z^2 - 2) \frac{d^3z}{dx^3} = 0$$

$$(3z^2 - 2) \frac{d^4z}{dx^4} + 24z \frac{d^3z}{dx^3} + 18z \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)^2 + 36 \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right) \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = 0$$

Adotando-se para (ξ) o valor aproximado $\xi = 1$, obtemos sucessivamente os seguintes valores :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dx} \right)_{z=1} &= 1 & \left(\frac{d^3z}{dx^3} \right)_{z=1} &= 102 \\ \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)_{z=1} &= -6 & \left(\frac{d^4z}{dx^4} \right)_{z=1} &= -2880 \end{aligned}$$

donde para o termo complementar o valor aproximado

$$R_4 = 0,000000053 \times 2880 = 0,00015,$$

quer dizer que podemos contar com 3 decimais exatas sôbre o valor de z , seja $z = 0,997$.

Para uma melhor aproximação poderíamos subtabular o intervalo 0,98 - 1,00.

Oferta
18-7-1953