

Teoria Elementar dos Campos

Frank Michael Forger

Departamento de Matemática Aplicada,
Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo,
Caixa Postal 66281,
BR-05315-970 São Paulo, S.P., Brazil

Resumo

Após uma introdução à evolução histórica da teoria dos campos até o início do século XX, apresentamos elementos das duas teorias clássicas de campos mais tradicionais – a hidrodinâmica (equações de Euler e de Navier-Stokes) e a eletrodinâmica (equações de Maxwell).

Estas notas constituem uma tradução dos primeiros três capítulos do livro *Elementare Feldtheorie (Elektrodynamik, Hydrodynamik, Spezielle Relativitätstheorie)* (em alemão), de H. Römer e M. Forger, publicado pela VCH-Verlagsgesellschaft, Weinheim, Alemanha, em 1993.

Universidade de São Paulo
Novembro de 1999

1 A noção de campo e suas origens

1.1 Mecânica discreta e física do contínuo

A noção de campo originou-se e evoluiu durante o século XIX, paralelamente ao aparecimento da eletrodinâmica. Alguns eventos importantes para o desenvolvimento da teoria dos campos, a partir de 1780, estão registrados na seguinte tabela.

Tab. 1.1: Eventos importantes para o desenvolvimento da teoria dos campos

1780	Descoberta de Galvani
1785	Lei de Coulomb
1799	Pilha de Volta
~ 1800	Experiências eletroquímicas de J.W. Ritter
1820	Lei de Oersted
1822	Interpretação de Ampère do magnetismo como eletricidade em movimento
1826	Lei de Ohm
1831	Lei da indução de Faraday
1856	Experiência de W. Weber e R. Kohlrausch
1862	Equações de Maxwell: integração da ótica ao eletromagnetismo
1870	Confirmação da relação $n = \sqrt{\epsilon}$ por L. Boltzmann
1888	Exibição de ondas eletromagnéticas por H. Hertz
1890	Formulação moderna das equações de Maxwell por H. Hertz
1905	Relatividade restrita
1915	Relatividade geral

1 A noção de campo e suas origens

O estado do conhecimento na física em torno do ano 1800 pode, grosso modo, ser caracterizado pela seguinte dicotomia:

Tab. 1.2: Conceitos básicos da física em torno do ano 1800

MECÂNICA DOS PONTOS MATERIAIS (Atomismo)	FÍSICA DO CONTÍNUO (Dinamismo)
<p>Lei da gravitação universal de Newton</p> <p>Lei de Coulomb</p>	<p>Hidroestática e Hidrodinâmica</p> <p>Mecânica dos meios rígidos e elásticos e dos gases (acústica)</p> <p>Termodinâmica</p> <p>Ótica</p> <p>Elettricidade Magnetismo Galvanismo</p> <p>Vida</p>
Ação a longa distância instantânea	Ação a curta distância retardada

Nesta época, a mecânica Newtoniana constituía o maior triunfo não somente da física mas de toda a ciência, descrevendo corretamente tanto as trajetórias dos corpos celestes como o movimento de uma pedra lançada na terra. O cálculo diferencial e integral, em conjunto com a mecânica, se tornara uma ferramenta afiada e de múltiplo uso. Os sucessores de Newton completaram, de forma convincente, a extensão da mecânica dos pontos materiais à mecânica dos corpos rígidos e elásticos, dos gases e dos líquidos (hidroestática e hidrodinâmica), iniciada pelo próprio Newton. Finalmente, em 1788, foi publicada a "Mécanique Analytique" de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) – uma apresentação fechada da mecânica que inclui a mecânica dos meios contínuos, baseada em alguns poucos princípios, e que continua válida até hoje.

Além de seu próprio domínio de aplicação, a mecânica serviu como modelo de disciplina científica, sendo que outros ramos da ciência tentaram imitar sua abordagem e seus métodos. Em particular, a lei da gravitação universal de Newton, $F = -\gamma m_1 m_2 x / |x|^3$, havia se tornado o exemplo padrão de uma lei de força simples com um amplo espectro de aplicações. O que nos tempos de Newton causara estranheza e até um certo mal-estar por parte do próprio Newton, a saber, o fato de que, segundo esta lei, a força gravitacional atua instantaneamente e a longa distância, acabou sendo visto como completamente natural e – depois de mais

1.1 Mecânica discreta e física do contínuo

de um século de sedimentação – até como uma característica de uma formulação verdadeiramente científica. Em contrapartida, especulações sobre a natureza da gravitação foram geralmente consideradas ociosas; o que se esperava era poder descrever outras esferas do mundo físico por leis semelhantes.

A descoberta da lei de Coulomb descrevendo a força entre duas cargas foi amplamente comemorada como um passo importante nesta direção. Ademais, a mecânica dos pontos materiais de Newton combinava perfeitamente com a idéia de que toda a matéria seria composta de partículas microscópicas e indivisíveis, os átomos.

Fora do domínio firmemente estabelecido da mecânica, havia uma série de outras áreas da física, na sua maioria conhecidas de longa data, que ainda estavam longe de alcançar o mesmo nível de desenvolvimento. Entre elas estavam a termodinâmica, a ótica, a eletricidade, o magnetismo e o que na época se chamava galvanismo. No entanto, não faltaram esforços para incorporar estas disciplinas à mecânica ou pelo menos formulá-las segundo o mesmo modelo.

Na *termodinâmica*, estes esforços foram finalmente coroados de sucesso, através da formulação da teoria cinética dos gases e da mecânica estatística.

Na *ótica*, a teoria corpuscular dos fenômenos óticos vingou até que as experiências de interferência de Augustin Jean Fresnel (1788–1827) evidenciaram, além de qualquer dúvida, a natureza ondulatória da luz. No entanto, a teoria corpuscular da luz foi reanimada em 1905 por Albert Einstein (1879–1955), no contexto de sua interpretação do efeito foto-elétrico, e o chamado dualismo onda-partícula assim criado forneceu o ímpeto para o desenvolvimento da teoria quântica que, de forma sutil e sofisticada, esclarece e supera o confronto entre estas duas interpretações aparentemente tão incompatíveis.

Na *eletricidade*, o progresso teórico estava vinculado ao progresso tecnológico que permitiu, passo a passo, produzir e exibir cargas e correntes cada vez maiores e com uma precisão cada vez melhor. Neste contexto, merecem destaque o desenvolvimento do eletroscópio, do capacitor (garrafa de Kleist ou de Leiden), da máquina eletrizadora (bastante popular e presente em inúmeros gabinetes de física) e, acima de tudo, em 1799, da pilha de Alessandro Volta (1745–1827), que constituiu a primeira fonte estável de voltagens e correntes estacionárias e sem a qual a subsequente evolução da eletrodinâmica teria sido impossível.

No *magnetismo*, devido à maior acessibilidade experimental e utilidade prática dos fenômenos magnéticos (bússola), os fatos básicos eram conhecidos há mais tempo do que no caso da eletricidade. Ademais, já no século XVIII, a área despertava um interesse filosófico especial – no mínimo depois de Franz Mesmer (1734–1815) ter causado sensação com suas curas magnéticas e apresentações de hipnose, providenciando argumentos para um parentesco especial entre fenômenos magnéticos e fenômenos vitais e espirituais.

É perante este cenário que deve ser entendida a grande excitação causada pela descoberta de Luigi Galvani (1737–1798), feita em 1780: Uma coxa de rã isolada, quando colocada em contato com dois metais diferentes ligados através de um eletrolito, apresentou uma convulsão. Durante algum tempo, acreditava-se que estava aberto um caminho para o entendimento da vida e da relação entre a matéria animada e a matéria inanimada. Apenas em 1792, Volta argumentou que a coxa de rã serve somente para exibir uma voltagem gerada por uma simples bateria,

formada por dois metais diferentes e um eletrólito, e em 1799, ele conseguiu multiplicar o efeito na pilha por ele inventada, formada por discos alternativos de metais diferentes separados por camadas intermediárias de papelão molhado.

1.2 “Dinamismo” e a idéia de campo

Além das tentativas de reduzir novos fenômenos à mecânica Newtoniana, existiu um movimento contrário.

Durante séculos houveram esforços no sentido de entender, por exemplo, a mecânica celestial utilizando idéias provindo da hidrodinâmica. De fato, a lei de Coulomb e a lei da gravitação universal de Newton correspondem ao campo de velocidades de um fluido incompressível escoando de uma fonte pontual. A mesma dependência da distância r à fonte, do tipo $1/r^2$, é encontrada para a luminosidade aparente de uma fonte pontual de luz. Houve ainda outros motivos para tentar explicar fenômenos calóricos, óticos, elétricos, magnéticos e galvânicos através da hipótese de que existam certos “fluidos”, quantidades características que emanam de corpos quentes, luminosos, carregados, magnetizados ou galvânicos e, atravessando o espaço, influenciam outros corpos. Uma ação a curta distância deste tipo, por intermediário de fluidos em escoamento, pareceu intuitivamente evidente.

Tais argumentos também fazem parte de um complexo de pensamentos e idéias denominado “dinamismo”, desde aquela época. Em particular, a assim chamada filosofia romântica da natureza, do idealismo alemão, estava amplamente baseada em conceitos dinamísticos. O seu expoente filosófico foi Friedrich Schelling (1775–1854). Em contraposição deliberada à visão do mundo oferecida pelo atomismo e pela mecânica – que foi rejeitada exatamente por ser mecânica, i.e., grosseiramente materialística e anti-espiritual – o mundo foi imaginado como arena de uma multidão de “forças”, agindo uma com ou contra a outra. Existiu uma força calórica, uma força ótica, uma força química, uma força elétrica, uma força magnética e uma força galvânica, além de outras forças no âmbito das esferas da vida e do espírito. Todas estas forças eram apenas diferentes manifestações de uma única força universal, sendo que a transição de uma manifestação para outra, ou seja, a transformação entre diferentes forças, era a expressão e ao mesmo tempo o motor de todos os fenômenos físicos.

A noção de força já estava amplamente divulgada na física e na filosofia, mas ainda não havia sido completamente esclarecida, exceto na mecânica Newtoniana. O conceito dinamístico de força assemelhava-se mais com o que hoje chamamos de energia. Impôs-se a especulação de que a força universal não possa aumentar nem diminuir mas apenas mudar a forma de sua manifestação. De fato, o princípio da conservação da energia originou-se de idéias dinamísticas. Uma experiência chave para Robert Mayer (1814-1878), que em 1841 formulou seu princípio da “conservação da força”, foi uma observação feita como médico de bordo nos trópicos: o sangue venoso durante a sangria era mais claro do que nas latitudes moderadas. Como nos trópicos a manutenção do calor físico e das funções vitais requer menos energia, também se retira menos força química do sangue. No entanto, para encontrar uma escala para medir a força universal, era necessário determinar os fatores

1.2 "Dinamismo" e a idéia de campo

de conversão entre as diversas forças. Através de um argumento puramente teórico, a saber, pela comparação dos calores específicos de um gás com volume fixo e com temperatura fixa, Mayer conseguiu chegar a um valor aproximadamente correto para o equivalente mecânico do calor.

Um outro fruto das idéias dinâmísticas é, como veremos a seguir, o conceito de campo.

A contribuição própria de Schelling à física não é muito significativa. Contudo, nos seus arredores em Jena atuou Johann Wilhelm Ritter (1776-1810), que desempenharia um papel chave na realização das idéias dinâmísticas. Ritter foi uma personagem empolgante e um experimentador imaginativo. Ele descobriu, por exemplo, que a geração de uma corrente num elemento galvânico formado de metais e um eletrólito é sempre acompanhada por uma reação química. Houve portanto uma transformação de força química para força galvânica. Continuando este racocínio, Ritter se tornou um dos fundadores da eletroquímica. [Depois, em Munique, ele também fez esforços para entender a "força rhabdomântica" (força da varinha mágica).]

Hans Christian Oersted (1777-1851) deve ser considerado um aluno direto de Ritter. Ele passou o ano de 1802 em contato direto com Ritter em Jena e eles permaneceram em correspondência ativa e regular até a morte de Ritter. Em 1820, Oersted fez sua descoberta famosa que imediatamente causou enorme sensação em toda a Europa: Uma agulha magnetizada (bússola) na proximidade de uma corrente elétrica percorrendo um fio condutor reto sofre um desvio transversal ao fio.

O que também é instrutivo é a argumentação de Oersted. Ele interpretou o calor num condutor gerado por uma corrente elétrica que o percorre como decorrendo de um "conflito elétrico", devido à colisão entre cargas positivas e negativas, e durante o qual força elétrica seria transformada para força calórica. Convencido da liberdade de transformação entre forças diferentes, ele investigou se também sobrasse um pouco de força magnética. O tamanho do efeito o surpreendeu.

Após a descoberta revolucionária de Oersted, passou pouco tempo até que, em 1822, André Marie Ampère (1775-1836) chegou a interpretar, de forma completamente geral, o magnetismo como efeito de cargas em movimento e, em particular, a suspeitar a existência de correntes circulares permanentes dentro do ferro para explicar o ferromagnetismo.

Sem dúvida o maior pesquisador da direção dinâmística foi Michael Faraday (1791-1867). A descoberta de sua lei de indução em 1831 foi motivada pela busca do efeito inverso à observação de Oersted, que transformaria força magnética em força elétrica. Ademais, foi Faraday que, através do seu conceito de campo, iniciou a formulação conceitual e quantitativamente correta das idéias dinâmísticas. Concretamente, ele imaginou o espaço impregnado por campos constituídos de linhas de força elétrica e magnética que, dentro da visão hidrodinâmica acima descrita, corresponderiam às linhas de fluxo dos fluidos correspondentes. Faraday não foi capaz de dar uma descrição matemática das linhas de força, mas ele envolveu idéias claras sobre seu decurso e suas interações, o que lhe permitiu chegar a um entendimento intuitivo e semi-quantitativo dos fenômenos eletromagnéticos. Posteriormente, e adiante do seu tempo por muitas décadas, ele dedicou seu trabalho à tentativa de estabelecer uma noção unificada de campo que incluiria a

gravitação. Por exemplo, ele procurou com afinho efeitos de indução gravitacional e permaneceu convicto que esta busca não teve êxito apenas por motivos quantitativos.

O mérito fundamental de Faraday consiste na introdução do conceito de campo, uma noção completamente nova e alheia à mecânica Newtoniana. O espaço, ao invés de ser simplesmente transposto por uma ação a distância, adquiriu um papel ativo como sendo o substrato para linhas de força e campos. Desta forma, Faraday possibilitou a formulação exata de um conceito até então considerado místicamente confuso e anti-científico, apontando o caminho para uma nova maneira de pensar cuja fertilidade seria colocada em evidência logo em seguida.

1.3 A descoberta das equações de Maxwell

Após trabalhos preparatórios realizados em 1845 por William Thomson (1824–1907), que posteriormente se tornaria o Lord Kelvin, o passo final foi dado por James Clerk Maxwell (1831–1879): foi ele quem – como ele mesmo enfatizou – colocou as idéias de Faraday na sua formulação matemática definitiva. No entanto, Maxwell ultrapassou Faraday num ponto decisivo: a introdução do seu termo adicional, também chamado a corrente de deslocamento. É justamente por causa deste termo adicional que as equações do campo eletromagnético por ele formuladas, publicadas em 1862 e hoje conhecidas como as equações de Maxwell, além de reunir as forças elétricas e magnéticas dentro de uma teoria unificada do eletromagnetismo, permitem soluções ondulatórias, com uma velocidade de propagação que, como Maxwell percebeu, coincide com a velocidade da luz. Portanto, era de se suspeitar que a ótica também poderia ser vista como uma sub-área do eletromagnetismo. Aliás, um sinal claro (e acolhido por Maxwell) de que existe um parentesco entre eletromagnetismo e ótica já havia sido fornecido em 1856 pela experiência de Wilhelm Weber (1804–1891) e Rudolf Kohlrausch (1809–1858): a comparação entre forças eletrostáticas e magnetostáticas resultou num fator de proporcionalidade que é numericamente igual ao quadrado da velocidade da luz.

Desde a sua introdução, as equações de Maxwell se estabeleceram como providenciando a teoria completa de todos os fenômenos eletromagnéticos e óticos clássicos (i.e., não quânticos). Constituem uma teoria de campos – um tipo de teoria física que na época era absolutamente novo e inédito – e do ponto de vista de sua importância para a física só se comparam com a mecânica Newtoniana, inclusive a lei da gravitação universal.

Durante as décadas a seguir, as equações de Maxwell foram testadas e comprovadas inúmeras vezes. Neste contexto, merecem destaque a confirmação experimental da relação prevista $n = \sqrt{\epsilon}$ entre o índice de refração e a constante dielétrica por Ludwig Boltzmann (1844–1906) em 1870 e – talvez como pedra final – a geração e demonstração de ondas eletromagnéticas no laboratório por Heinrich Hertz (1837–1894) em 1888.

Qual era a dimensão do progresso representado pelas equações de Maxwell e como elas se chocavam com os limites dos métodos matemáticos disponíveis na época também se evidencia através das dificuldades de sua recepção pelos físicos.

1.4 Considerações sobre a noção de campo

Apesar de serem quase imediatamente convencidos da grande importância da nova teoria, quase todos eles tiveram durante muito tempo problemas enormes com sua compreensão. Anedoticamente, isso pode ser ilustrado pelo caso de Johann Wilhelm Hittorf (1824–1914), professor titular de física na Universidade de Münster e altamente respeitado pelas suas contribuições à física das descargas elétricas em gases (até hoje, o espaço escuro diante do cátodo leva seu nome): em 1889, após longos esforços frustrados de entender a teoria de Maxwell, ele devolveu sua livre-docência declarando que não se sentia mais à altura das exigências de sua profissão. Neste sentido, devem ser valorizados os méritos de Ludwig Boltzmann e de Heinrich Hertz referentes a uma formulação mais simples das equações de Maxwell: em 1890, Hertz lhes deu a forma elegante utilizada até hoje.

1.4 Considerações sobre a noção de campo

Todos os fenômenos eletromagnéticos podem ser descritos através de dois campos, o *campo elétrico* \mathbf{E} e o *campo magnético* \mathbf{B} . A força eletromagnética exercida sobre um ponto material com carga q que no instante t se encontra na posição \mathbf{x} e se movimenta com a velocidade \mathbf{v} é a *força de Lorentz*¹

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = q(\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})) \quad (1.1)$$

A possibilidade de resumir a ação da força eletromagnética desta forma, usando apenas dois campos, constitui uma simplificação enorme, já que, “a priori”, a força sobre uma carga poderia depender de inúmeros fatores, como por exemplo do histórico completo do arranjo experimental e não somente do seu estado presente.

Mesmo tendo em vista o conhecimento sobre a estrutura das forças eletromagnéticas expresso pela equação (1.1), permanece a questão da realidade dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , pois formalmente, sempre é possível introduzir uma função \mathbf{F} definida tal que seu valor $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ indica a força exercida sobre um ponto material que no instante t se encontra na posição \mathbf{x} e se movimenta com a velocidade \mathbf{v} . Por exemplo, para um ponto material com massa m e carga q em repouso (sob a influência de um outro ponto material com massa M e carga Q em repouso na origem), esta função teria a forma

$$\mathbf{F}^g(\mathbf{x}) = -\gamma M m \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}^e(\mathbf{x}) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (1.2)$$

para a força gravitacional e a força eletrostática, conforme a lei da gravitação universal de Newton e a lei de Coulomb, respectivamente. Todavia, poderíamos objetar que, por exemplo, $\mathbf{F}^e(\mathbf{x})$ descreve apenas a força que *seria* exercida sobre um ponto material com carga q em repouso na posição \mathbf{x} se ele estivesse lá. Logo, o campo de força $\mathbf{F}^e = q\mathbf{E}$ mesmo, assim como o campo elétrico \mathbf{E} , seria uma quantidade útil mas não indispensável e sem realidade própria, ou seja, independente da presença ou ausência da carga teste. Realidade própria continuaria ser atribuída apenas às forças entre pontos materiais, atuando à distância e sem intermediário.

¹ Neste capítulo introdutório, trabalhamos em unidades SI; veja o Capítulo 3.2.

1 A noção de campo e suas origens

Existem dois argumentos que podem ser invocados contra a correteza desta interpretação, ou pelo menos contra sua utilidade.

- a) Segundo as equações de Maxwell, a força \mathbf{F} exercida por um ponto material com carga q_1 na posição \mathbf{x}_1 com velocidade \mathbf{v}_1 e sob aceleração \mathbf{a}_1 sobre um ponto material com carga q_2 na posição \mathbf{x}_2 com velocidade \mathbf{v}_2 e sob aceleração \mathbf{a}_2 vale

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{E}'_{\text{ret}} + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}'_{\text{ret}}) , \quad (1.3)$$

onde

$$\mathbf{E}' = (1 - v_1^2/c^2) \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_1/c}{r^2(1 - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_1/c)^3} + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}_0 \times ((\mathbf{r}_0 - \mathbf{v}_1/c) \times \mathbf{a}_1/c)}{r(1 - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_1/c)^3} \quad (1.4)$$

e

$$\mathbf{B}' = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{E}' \quad (1.5)$$

com

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 , \quad r = |\mathbf{r}| , \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}/r . \quad (1.6)$$

O índice "ret" significa que todas as quantidades cinemáticas do ponto material (posição, velocidade, aceleração) devem ser calculadas não no instante t mas no chamado instante retardado

$$t_{\text{ret}} = t - r/c , \quad (1.7)$$

ou seja, adiantado pelo tempo requerido para a propagação de um sinal de luz entre os dois pontos materiais.

Com certeza, esta lei mecânica é tão complicada que não lhe pode ser atribuído um caráter fundamental. Ademais, a necessidade do retardamento mostra que a ação de forças eletromagnéticas não é instantânea, mas propaga com velocidade finita, que coincide com a velocidade da luz.

- b) As equações de Maxwell possuem soluções ondulatórias que propagam no vácuo, i.e., em regiões onde não há cargas ou correntes. Portanto, o campo eletromagnético não descreve apenas a ação de forças entre cargas, mas pode de certo modo adquirir uma vida independente, por exemplo na forma de ondas.

Uma vez convencidos que o campo eletromagnético pode ser considerado tão real quanto, por exemplo, uma partícula, enfrentamos imediatamente a questão de qual seria o meio material subjacente, uma vez que os campos clássicos bem conhecidos são todos vinculados a algum meio material. Por exemplo, o campo de velocidades de um fluido em escoamento é vinculado ao fluido e campos de ondas acústicas são vinculados ao material (sólido, líquido ou gás) no qual as ondas propagam. O meio material hipotético para o campo eletromagnético, chamado o *éter*, deveria possibilitar a propagação de ondas eletromagnéticas e portanto ser uma espécie de meio elástico, porém de um tipo muito especial: muito mais fino do que qualquer gás porque sua presença não impede de forma alguma o movimento dos corpos e porque eventuais correntes no éter não apresentam nenhum efeito mecânico.

1.4 Considerações sobre a noção de campo

Na dedução de suas equações, Maxwell utilizou um modelo mecânico que hoje, devido a sua grande complexidade, nos parece até absurdo, mas que mostra como naquela época, pareceu imprescindível dispor de um meio material como portador de qualquer campo. De certo modo, o fato de Maxwell ter se sentido na obrigação de empregar um modelo mecânico do éter significava um recuo conceitual relativo ao nível de abstração já alcançado por Faraday. Posteriormente, e parcialmente até hoje, a história da relatividade restrita demonstra a resistência do preconceito que norteia a idéia do éter.

O modelo mecânico do éter de Maxwell pode ser descrito da seguinte forma (veja Fig. 1.1). O espaço é repleto de vórtices elementares, que na Fig. 1.1 são representados por hexágonos. A velocidade angular da rotação dos vórtices determina o valor absoluto e a direção do campo magnético em cada ponto. Entre os vórtices encontram-se partículas carregadas, arranjadas como as esferas dentro de um rolamento, cujo movimento corresponde a uma corrente elétrica.

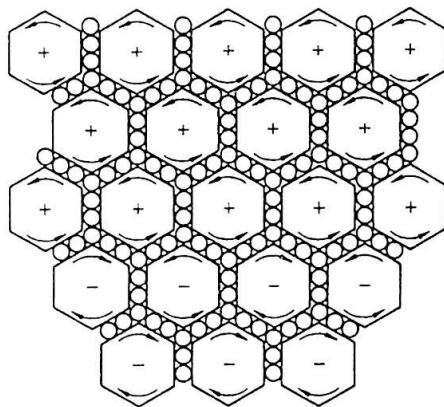


Fig. 1.1: O modelo mecânico do éter de Maxwell

É possível analisar, através deste modelo, como uma corrente de partículas carregadas em forma de fio causa uma rotação dos vórtices elementares que corresponde exatamente à lei de Oersted. Na direção oposta, uma diferença de velocidade de rotação entre vórtices elementares adjacentes causa uma corrente, conforme a lei de indução.

Veremos mais adiante como, no final do século XIX, a idéia do éter entrou em crise, devido à impossibilidade de detectar qualquer movimento relativo ao éter (experiência de Michelson-Morley), até ser abolida na teoria da relatividade restrita (1905) de Einstein. Finalmente, na teoria da relatividade geral (1915), o campo gravitacional adquiriu uma posição semelhante à do campo eletromagnético. De fato, a teoria de Einstein foi mais longe, pois nela o campo gravitacional não

é dado sobre um espaço (ou mais exatamente, espaço-tempo) fixo, mas retroage dinamicamente sobre sua geometria e até topologia.

1.5 A noção de campo na física contemporânea

É uma característica da física moderna que o conceito de campo ocupa uma posição central, ao contrário da noção do ponto material que, através da teoria quântica dos campos, sofreu uma regressão ao estado de uma aproximação: o dualismo onda-partícula identifica ambas – a onda e a partícula – como aspectos diferentes de um conceito mais geral e mais abrangente, o de campo.

Além das forças eletromagnéticas e das forças gravitacionais, conhecemos hoje outras duas interações fundamentais, a saber a *interação forte* e a *interação fraca* que, entre outras coisas, são responsáveis pela coesão dos núcleos e pelo fenômeno da radioatividade, respectivamente, sendo que a última permite certos decaimentos de partículas que sem ela seriam proibidos.² Em conjunto, a interação forte e a interação fraca também regulam a liberação de energia por fusão nuclear nas estrelas, particularmente no sol.

Na seguinte tabela, estão listadas as quatro interações fundamentais, em conjunto com dados aproximativos sobre suas intensidades relativas nas zonas de distância em torno de 10^{-15} m e de energia em torno de 1 GeV que são típicas para a física nuclear e a física de altas energias, assim como sobre seu alcance.

Tab. 1.3: As quatro interações fundamentais

INTERAÇÃO	INTENSIDADE RELATIVA	ALCANCE
Forte	1	10^{-15} m
Eletromagnética	10^{-2}	∞
Fraca	10^{-5}	10^{-18} m
Gravitação	10^{-40}	∞

Cada uma destas interações é descrita por uma teoria de campos. Contudo, a força eletromagnética e a força gravitacional são as únicas que, sendo de longo alcance, se fazem notar a distâncias macroscópicas e, neste domínio, podem ser descritas por uma teoria clássica de campos. A força forte e a força fraca são restritas a distâncias tão pequenas (tipicamente o diâmetro de um núcleo de um átomo) que previsões fisicamente relevantes só podem ser obtidas através de uma teoria quântica de campos.

Também deve ser observado que a força eletromagnética é imensamente mais forte do que a força gravitacional. Por exemplo, o quociente entre repulsão eletrostática e atração gravitacional vale aproximadamente 10^{36} para dois prótons e

²Evitamos a expressão “partícula elementar” pois a maioria das partículas assim chamadas acabaram ser identificadas como sendo compostas.

1.5 A noção de campo na física contemporânea

$4 \cdot 10^{42}$ para dois elétrons. Um outro exemplo numérico que serve para elucidar este ponto é o seguinte. Imaginamos dois corpos de 1 mol de substância cada um, por exemplo duas bolas de ferro com uma massa de 56 g cada uma, e conferimos a cada um dos dois corpos uma carga positiva, privando-o de um em cada mil dos seus elétrons. Neste caso, e se a distância entre os dois corpos for de um metro, a repulsão eletrostática entre eles seria de aproximadamente 10^{14} Newton, o que corresponde ao peso de um cubo de ferro com arestas de 1 km.

O fato de que as forças elétricas, apesar de sua intensidade e seu longo alcance, pouco se fazem notar e portanto, do ponto de vista histórico, foram descobertas tarde, deve-se à existência de cargas de ambos os sinais e ao fato de que cargas do mesmo sinal se repelem enquanto que cargas de sinais opostos se atraem. Portanto, a nível macroscópico, toda a matéria é constituída por uma mistura fina e essencialmente homogênea de cargas positivas e negativas, cujas forças eletrostáticas se neutralizam quase completamente. Em contrapartida, massas são sempre positivas e forças gravitacionais são sempre atrativas, não podendo ser compensadas. Assim se explica por que no nosso ambiente as forças gravitacionais, apesar de serem tão enormemente mais fracas, podem sob condições normais predominar sobre as forças elétricas.

As teorias de campos para as interações eletromagnéticas, fracas e fortes apresentam uma forte semelhança estrutural: todos são exemplos de uma *teoria de calibre*. Ademais, a relatividade geral também apresenta traços de uma teoria de calibre. Tais analogias norteiam a busca por uma unidade fundamental de todas as interações fundamentais.

Nesta direção, houve um progresso considerável durante as últimas décadas, assinalado pelo aparecimento de uma teoria de calibre que unifica as interações eletromagnéticas com as interações fracas e para a qual Sheldon Glashow, Abdus Salam e Steven Weinberg receberam o Prêmio Nobel de Física do ano 1979. Esta teoria das interações eletrofracas encaixa-se perfeitamente na tradição de Maxwell que, na sua época, unificara forças elétricas com forças magnéticas e, ainda, com a ótica, dentro de uma teoria universal do eletromagnetismo. Contudo, o parentesco entre interações eletromagnéticas e interações fracas se evidencia apenas no regime de altas energias. (Constata-se que no regime de baixas energias, a simetria entre os dois tipos de interação é quebrada.) Por outro lado, a unificação de todas as interações, inclusive a gravitação, que já fora imaginada e procurada por Faraday, permanece até hoje um problema em aberto e uma das metas principais da física.

Do ponto de vista da teoria quântica dos campos, o conceito de partícula é subordinado ao do campo. Geralmente, cada partícula é associada a algum campo quântico, da mesma forma como o fóton é associado ao campo eletromagnético, e vice versa. Como na teoria quântica existem não apenas partículas no sentido tradicional, estáveis como o próton e o elétron, mas também partículas mais fugazes como o fóton, que pode ser visto como o mediador da interação eletromagnética entre cargas, a teoria quântica dos campos acaba abolindo a diferença fundamental entre partículas e forças, na medida que ambas são descritas por campos.

Finalmente, deve ser enfatizado que a importância da teoria dos campos não se reduz aos campos fundamentais acima mencionados, ou seja, à física de altas energias. Muito pelo contrário, no ambiente do mundo macroscópico ao nosso redor,

a teoria clássica dos campos constitui a ferramenta para a descrição de sistemas contínuos. O escoamento de líquidos e gases, o transporte do calor, a ótica, os diversos fenômenos associados com processos de mistura e reações químicas entre diferentes substâncias, o comportamento de plasmas, e assim por diante, ou seja, todo o espectro de fenômenos macroscópicos, de experiências no laboratório até a meteorologia e a astrofísica, tornam-se acessíveis apenas através dos conceitos e métodos da teoria dos campos.

1.6 Formulação matemática da noção de campo: considerações preliminares

Como já foi mencionado várias vezes, a noção de campo reflete a idéia de que cada ponto do espaço se torna portador de qualidades e quantidades adicionais, tais como: densidade de massa, temperatura, pressão, velocidade de escoamento, campo gravitacional, campo elétrico, campo magnético etc..

Matematicamente, um *campo*, ou mais exatamente uma *configuração de campo*, é simplesmente uma aplicação do *espaço* – ou mais geralmente no caso de campos que dependem do tempo e particularmente no âmbito da teoria da relatividade, do *espaço-tempo* – para um conjunto F que descreve os valores possíveis do campo. A estrutura deste codomínio F não é fixada “a priori”, mas depende da natureza do campo. Por exemplo, no caso de um campo de densidade, de temperatura ou de pressão, F é o conjunto \mathbb{R}^+ dos números reais não-negativos, enquanto que no caso de um campo de velocidades descrevendo o escoamento de um fluido, F é um espaço vetorial tri-dimensional. A teoria dos campos, geralmente falando, trata do problema de determinar as configurações fisicamente possíveis e de calcular sua evolução temporal. Depreende-se que campos – ao contrário de sistemas de pontos materiais – são sistemas dinâmicos com um número infinito de graus de liberdade, uma vez que o estado de um sistema formado por campos será determinado apenas quando fixarmos os valores de todos os campos presentes em cada ponto do espaço.

Queremos formular estas idéias de uma maneira um pouco mais concreta, restringindo-nos inicialmente ao âmbito da física clássica, i.e., sem levar em conta a teoria da relatividade (restrita ou geral). Neste caso, o espaço físico pode ser descrito matematicamente como um espaço afim tri-dimensional E^3 , modelado sobre um espaço vetorial Euclidiano tri-dimensional que denotaremos por V^3 . Um campo A é então uma aplicação

$$A : E^3 \longrightarrow F, \quad (1.8)$$

onde

$$\mathbf{x} \in E^3 \longmapsto A(\mathbf{x}) \in F. \quad (1.9)$$

Obviamente, campos podem depender explicitamente do tempo. Uma possibilidade de incorporar tal dependência é permitir que a aplicação A dependa do tempo t . Uma outra possibilidade, obviamente equivalente à primeira, consiste em considerar campos não como aplicações do espaço mas de um contínuo formado pelo espaço em conjunto com o eixo temporal para o codomínio F . Um campo A com dependência

1.6 Formulação matemática da noção de campo: considerações preliminares

do tempo é então uma aplicação

$$A: \mathbb{R} \times E^3 \longrightarrow F, \quad (1.10)$$

onde

$$(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times E^3 \longmapsto A(t, \mathbf{x}) \in F. \quad (1.11)$$

Esta interpretação é particularmente conveniente na teoria da relatividade (restrita ou geral), onde espaço e tempo são unificados dentro de um único contínuo.

Campos de densidade, de temperatura ou de pressão são exemplos de *campos escalares* cujo codomínio é, por definição, o corpo dos números reais \mathbb{R} ou um subconjunto adequado de \mathbb{R} , enquanto que campos de velocidades descrevendo o escoamento de um fluido e campos gravitacionais, elétricos ou magnéticos são exemplos de *campos vetoriais* cujo codomínio é, por definição, um espaço vetorial real V^3 . Mais exatamente, V é aqui o espaço vetorial Eulideano V^3 associado com o espaço afim E^3 , sendo que a direção do campo em cada ponto do seu domínio é uma direção no espaço físico. Isso pode ser verificado pelo comportamento destes campos sob rotações: Se girarmos um sistema contendo campos, por exemplo um capacitor carregado (inclusive o campo elétrico que ele gera) ou uma bobina percorrida por uma corrente (inclusive o campo magnético que ela gera), efetuando uma rotação R no espaço, a aplicação A será transformada em uma nova aplicação A^R caracterizada pela propriedade de associar ao ponto rotacionado no espaço E^3 o vetor rotacionado no espaço V^3 . Matematicamente, isto significa que

$$A^R(R\mathbf{x}) = R A(\mathbf{x}),$$

ou substituindo \mathbf{x} no lugar de $R\mathbf{x}$

$$A^R(\mathbf{x}) = R A(R^{-1}\mathbf{x}). \quad (1.12)$$

Em outras palavras, a aplicação A^R é obtida da aplicação A conforme

$$A^R = R \circ A \circ R^{-1}, \quad (1.13)$$

ou seja, A^R é a composição de A com R^{-1} pela direita e com R pela esquerda. É esta a lei de transformação padrão para aplicações quando as transformações agem tanto no domínio como no codomínio, uma lei que também pode ser expressa – como é bastante comum na matemática moderna – através de um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} E^3 & \xrightarrow{A} & V^3 \\ R \downarrow & & \downarrow R \\ E^3 & \xrightarrow{A^R} & V^3 \end{array}$$

O comportamento de campos vetoriais sob translações é diferente: Quando deslocarmos o capacitor ou a bobina por um vetor \mathbf{a} , o campo transformado associará ao ponto deslocado no espaço E^3 o vetor original no espaço V^3 , i.e.,

$$A^{T(\mathbf{a})}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = A(\mathbf{x}), \quad (1.14)$$

³Em muitas áreas da física, principalmente na teoria quântica, também aparecem campos onde o corpo dos números reais é substituído pelo corpo dos números complexos.

1 A noção de campo e suas origens

ou substituindo x no lugar de $x + a$

$$A^{T(a)}(x) = A(x - a) . \quad (1.15)$$

Em outras palavras, a aplicação $A^{T(a)}$ é obtida da aplicação A conforme

$$A^{T(a)} = A \circ T(a)^{-1} . \quad (1.16)$$

As translações agem não-trivialmente no domínio E^3 mas agem trivialmente no codomínio $F = V^3$. É que o codomínio F para campos vetoriais não é o espaço afim E^3 e sim o espaço vetorial associado V^3 , sendo que no cálculo de velocidades ou forças, a origem do sistema de coordenadas é irrelevante.

Também teremos oportunidade de utilizar *campos tensoriais* cujo codomínio F é, por definição, alguma potência tensorial de V^3 , talvez adequadamente simetrizada ou antisimetrizada.

Na teoria da relatividade, como já foi indicado, o espaço e o tempo deixam de ser independentes e sem nenhuma interrelação. Pelo contrário, são fundidos para formar um contínuo quadri-dimensional chamado o espaço-tempo. Na relatividade restrita, o espaço-tempo físico pode ser descrito matematicamente como um espaço afim quadri-dimensional E^4 , modelado sobre um espaço vetorial pseudo-Euclidiano quadri-dimensional que denotaremos por V^4 ; ambos são hoje conhecidos como o *espaço de Minkowski*. Nesta situação, as considerações anteriores sobre a natureza de campos em geral e sobre campos escalares, vetoriais e tensoriais em particular permanecem essencialmente inalteradas, desde que substituirmos E^3 e $\mathbb{R} \times E^3$ por E^4 e V^3 por V^4 . Na relatividade geral, porém, a estrutura do espaço-tempo é muito mais flexível, e nós encontraremos um tipo ainda mais geral de campo onde, essencialmente, o codomínio para o campo em cada ponto do espaço-tempo é um espaço vetorial diferente; no entanto, estes espaços vetoriais dependem diferenciavelmente dos pontos do espaço-tempo aos quais estão associados. (A formulação técnica desta idéia leva à definição do conceito de um fibrado vetorial.) Como exemplo provisório mas intuitivo, podemos pensar num campo vetorial tangencial v na esfera bi-dimensional S^2 que pode representar, por exemplo, um campo de velocidades para o vento sobre a superfície da terra (quando negligenciarmos correntes verticais): a cada ponto x da esfera está associado um vetor $v(x)$ pertencendo ao espaço tangente à esfera no ponto x . Obviamente, este espaço tangente depende não-trivialmente e, falando intuitivamente, diferenciavelmente do seu ponto base.

Finalmente, podemos considerar campos cujo codomínio F é um espaço vetorial (ou uma coleção de espaços vetoriais no sentido do parágrafo anterior) cujas direções não têm nada a ver com direções no espaço físico, ou seja, sobre o qual as rotações no espaço físico agem trivialmente. Apesar de não haver exemplos não-artificiais de tais campos na física clássica, eles desempenham um papel importante na teoria quântica, com aplicações na teoria da supercondutividade e na física de altas energias. Neste caso, as direções no codomínio correspondem a certos fatores de fase ou direções num espaço interno ou "iso-espaço", no qual podem agir transformações internas ou simetrias internas que não têm nada a ver com transformações no espaço-tempo: são estas as simetrias nas quais se baseiam as teorias de calibre.

2 Elementos da Hidrodinâmica

Neste capítulo, queremos apresentar algumas noções fundamentais da teoria dos fluidos. Na física, a noção geral de "fluido" engloba líquidos e gases. Trata-se de uma teoria de campos particularmente simples e concreta, na qual o campo fundamental é o *campo de velocidades* \mathbf{v} cujo valor $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ no instante t e no ponto \mathbf{x} indica a velocidade de fluxo do fluido neste instante e neste ponto. *Linhas de fluxo* são curvas cujo vetor tangente, em cada um dos seus pontos, coincide com o valor do campo de velocidades neste ponto, num determinado instante t . Em termos matemáticos, são curvas $\tau \mapsto \mathbf{x}(\tau)$ que satisfazem a equação diferencial ordinária

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau}(\tau) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}(\tau)) . \quad (2.1)$$

Para um campo de velocidades independente do tempo as linhas de fluxo são idênticas às trajetórias percorridas pelas partículas que constituem o fluido.

Para outros campos vetoriais, linhas de fluxo podem ser definidas de forma completamente análoga e, normalmente, são chamadas *linhas de campo*. Geralmente, os conceitos da dinâmica dos fluidos, particularmente as equações de balanço a serem discutidas a seguir, são de importância fundamental para todas as teorias de campos.

2.1 Equações de Balanço

Num fluido em escoamento, seja $\rho(t, \mathbf{x})$ a *densidade de massa* e $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ a *densidade de fluxo de massa* no instante t e no ponto \mathbf{x} ; portanto, ρ é um campo escalar e \mathbf{j} é um campo vetorial descrevendo o fluxo de massa através de superfícies, por unidade de tempo e por unidade de superfície. Mais exatamente, se introduzirmos a *taxa de fluxo de massa* no instante t através de uma superfície S , $\mu_S(t)$, podemos representar a massa total atravessando a superfície S entre o instante t_1 e o instante t_2 como a integral

$$m_S(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt \mu_S(t) , \quad (2.2)$$

2 Elementos da Hidrodinâmica

enquanto que a função $\mu_S(t)$ é dada pela integral de superfície

$$\mu_S(t) = \int_S d\sigma \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) . \quad (2.3)$$

A densidade de massa e a densidade de fluxo de massa são relacionadas por

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} . \quad (2.4)$$

Consideremos agora um volume fixo V com bordo ∂V . A massa total contida em V no instante t é

$$m_V(t) = \int_V d^3x \rho(t, \mathbf{x}) .$$

Se no interior de V não há fontes ou sumidouros que criem ou aniquilem massa, então a massa contida em V só pode ser alterada por escoamento de massa através do bordo ∂V de V . Portanto, com orientação da normal de ∂V para fora, vem

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \mathbf{x}) &= \frac{dm_V}{dt}(t) = -\mu_{\partial V}(t) = -\int_{\partial V} d\sigma \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \\ &= -\int_V d^3x (\nabla \cdot \mathbf{j})(t, \mathbf{x}) , \end{aligned}$$

onde no último passo foi utilizado o teorema de Gauss. Como este argumento vale para volumes V quaisquer, obtemos assim a *equação de balanço* ou *equação de continuidade* para a massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 , \quad (2.5)$$

que é a expressão matemática da lei da *conservação da massa*.

Equações de balanço podem ser formuladas não apenas para a massa mas também para outras quantidades extensivas com distribuição contínua no espaço e dependência do tempo. Uma quantidade associada a um sistema físico é chamada *extensiva* se seu valor duplica, triplica, ... quando duplicamos, triplicamos, ... o sistema. Exemplos são a massa, o número de partículas, a carga elétrica, a energia, o momento linear, o momento angular, a entropia, a energia livre, etc.; contra-exemplos são a temperatura ou a pressão. No entanto, quando formularmos uma equação de balanço para uma quantidade extensiva qualquer a , temos que levar em conta a possibilidade da existência de fontes ou sumidouros, que também podem apresentar uma distribuição contínua no espaço, assim como uma dependência do tempo. Portanto, a forma geral da *equação de balanço* ou *equação de continuidade* para uma quantidade extensiva a é

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}^a = q^a , \quad (2.6)$$

onde ρ^a é a *densidade*, \mathbf{j}^a é a *densidade de fluxo* e q^a é a *densidade de produção* da quantidade a ; a última descreve então a taxa de criação por fontes ($q^a > 0$) ou de aniquilação por sumidouros ($q^a < 0$) da quantidade a , por unidade de tempo e de volume. Em termos de formas diferenciais, a equação (2.6) assume a forma

$$\frac{\partial \hat{\rho}^a}{\partial t} + d\hat{\mathbf{j}}^a = \hat{q}^a , \quad (2.7)$$

com as 3-formas $\hat{\rho}^a = *\rho^a$ e $\hat{q}^a = *q^a$ assim como a 2-forma $\hat{\mathbf{j}}^a = *\mathbf{j}^a$.

2.1 Equações de Balanço

A existência de fontes e sumidouros ($q^a \neq 0$) indica, em geral, que a quantidade a não é conservada ou, ainda, que o sistema físico considerado não é fechado. De fato, uma quantidade extensiva a é chamada uma *quantidade conservada* e a equação de balanço correspondente é chamada uma *lei de conservação* se, em sistemas físicos fechados, a correspondente densidade de produção q^a se anula, ou seja, se vale

$$\frac{\partial \rho^a}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}^a = 0. \quad (2.8)$$

Sistemas fechados são os sistemas físicos que não estão trocando quantidades extensivas com outros sistemas físicos. Para um entendimento correto deste conceito, é necessário observar que troca de uma quantidade extensiva a entre dois sistemas físicos 1 e 2 pode contribuir, em ambos os sistemas, tanto à densidade de fluxo \mathbf{j}_1^a e \mathbf{j}_2^a como à densidade de produção q_1^a e q_2^a . O primeiro caso ocorre quando os dois sistemas estão localizados em regiões separadas mas adjacentes no espaço e a troca está sendo efetuada por fluxo através da interface entre os dois, enquanto que o segundo caso ocorre quando os dois sistemas se sobrepõem no espaço, parcial ou totalmente. Portanto, num sistema aberto, mesmo uma quantidade conservada a pode ter uma densidade de produção $q^a \neq 0$, mas neste caso as fontes e os sumidouros que existem podem ser explicitamente identificados e atribuídos a um outro sistema aberto que está em interação com o primeiro.

Como exemplo típico, consideremos a troca de energia e momento entre um conjunto de cargas elétricas (sistema 1) e o campo eletromagnético (sistema 2) ao qual estão sujeitos e que geram: energia e momento só do sistema de partículas carregadas, assim como energia ou momento só do campo eletromagnético, não são conservadas – uma vez que, por exemplo, a troca de momento entre os dois é expressão da força de Lorentz que o campo eletromagnético exerce sobre as cargas. Mas ambos os sistemas, 1 e 2, que se sobrepõem totalmente no espaço, são subsistemas abertos de um sistema total 1 + 2 que é fechado, e portanto a soma das respectivas quantidades (energia das partículas + energia do campo e momento das partículas + momento do campo), esta sim, é conservada.

A título de exemplo de uma quantidade extensiva não conservada, podemos mencionar a entropia S . No entanto, esta ocupa uma posição híbrida entre quantidades conservadas e não conservadas, pois o segundo teorema fundamental da termodinâmica afirma exatamente que, em sistemas fechados, vale a desigualdade $\dot{q}^S \geq 0$, ou seja, entropia pode ser criada mas não pode ser aniquilada.

Ao contrário do que acontece no caso da massa, a relação entre o campo de velocidades, a densidade e a densidade de fluxo de uma quantidade extensiva geral a em fluidos pode ser complicada, pois o transporte da quantidade a pode se efetuar por dois processos distintos.

- a) Por *convecção* (transporte com o fluxo):

Isto gera a *parte convectiva* $\mathbf{j}_{\text{conv}}^a$ da densidade de fluxo, definida por

$$\mathbf{j}_{\text{conv}}^a = \rho^a \mathbf{v}. \quad (2.9)$$

b) Por condução:

Isto gera a *parte condutiva* j_{cond}^a da *densidade de fluxo* que pode estar presente mesmo quando $v \equiv 0$ ou $\rho^a \equiv 0$ - por exemplo no caso da condução térmica ou da condução elétrica ao longo de um fio eletricamente neutro.

Portanto, a densidade de fluxo total é dada pela soma

$$j^a = j_{\text{conv}}^a + j_{\text{cond}}^a = \rho^a v + j_{\text{cond}}^a, \quad (2.10)$$

e a equação (2.4) pode ser vista como a afirmação de que, no caso da massa, não há transporte por condução.

2.2 Balanço de momento linear e de momento angular

Formular a equação de balanço para o momento linear constitui um caso particularmente interessante e importante. Como o momento linear é uma quantidade de natureza vetorial, teremos que estabelecer, separadamente, três equações de balanço: uma para cada componente. Escrevemos ρ_i^P para a densidade do i -ésimo componente do momento e j_{ik}^P para o k -ésimo componente da densidade de fluxo do i -ésimo componente do momento. Portanto, neste caso, a densidade já é um campo vetorial e a densidade de fluxo é um campo tensorial de grau 2.

Fontes do momento são forças externas que agem sobre o sistema, ou seja, a densidade de produção de momento é a *densidade de força* que denotaremos por f . Com estas convenções, a equação de balanço para o momento torna-se

$$\frac{\partial \rho_i^P}{\partial t} + \partial_k j_{ik}^P = f_i. \quad (2.11)$$

A presença de um campo gravitacional externo g , por exemplo, requer introduzir uma densidade de força $f = \rho g$.

A densidade de fluxo de momento possui uma outra interpretação que é muito importante, pois o momento atravessando uma superfície por unidade de tempo pode ser visto como força de pressão exercida sobre esta superfície. Mais exatamente, j_{ik}^P descreve o i -ésimo componente da força de pressão exercida sobre um elemento de superfície com normal na k -ésima direção e, portanto, a integral de superfície

$$F_i = \int_S d\sigma_k j_{ik}^P \quad (2.12)$$

descreve o i -ésimo componente da força de pressão exercida sobre uma superfície S pelo fluxo de momento considerado. Se, em particular, S for o bordo ∂V de um volume V , a equação (2.12) pode ser reescrita na forma

$$F_i = \int_{\partial V} d\sigma_k j_{ik}^P = \int_V d^3x \partial_k j_{ik}^P, \quad (2.13)$$

representando o i -ésimo componente da força de pressão que o volume V exerce sobre sua vizinhança.

2.2 Balanço de momento linear e de momento angular

Em fluidos, temos

$$\rho_i^P = \rho v_i \quad (2.14)$$

e

$$j_{ik}^P = \rho v_i v_k + \sigma_{ik}, \quad (2.15)$$

onde ρ é a densidade de massa e σ é a parte condutiva da densidade de fluxo de momento, sobre a qual não há nenhuma informação adicional dada "a priori". Segundo a interpretação descrita acima, σ representa as forças de pressão que não são geradas pelo escoamento das partículas do fluido, o que justifica chamar σ o *tensor de pressão*.

De forma completamente análoga à equação de balanço para o momento linear, podemos formular a equação de balanço para o momento angular. Seja ρ_i^L a densidade do i -ésimo componente do momento angular e j_{ik}^L o k -ésimo componente da densidade de fluxo do i -ésimo componente do momento angular.

Fontes do momento angular são torques externos que agem sobre o sistema, ou seja, a densidade de produção de momento angular é a *densidade de torque* que denotaremos por t . Com estas convenções, a equação de balanço para o momento angular torna-se

$$\frac{\partial \rho_i^L}{\partial t} + \partial_k j_{ik}^L = t_i. \quad (2.16)$$

Para o escoamento de fluidos normais, podemos justificar as seguintes hipóteses:

- a) Não há momento angular "interno", ou seja, existe apenas momento angular orbital. Isto significa que, para volumes suficientemente pequenos, o momento angular já é determinado pelo momento linear, segundo a fórmula $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. Portanto, a densidade e a densidade de fluxo de momento angular podem ser expressas em termos da densidade e da densidade de fluxo de momento linear, respectivamente, como segue:

$$\rho_i^L = \epsilon_{ijl} x_j \rho_l^P, \quad (2.17)$$

$$j_{ik}^L = \epsilon_{ijl} x_j j_{lk}^P. \quad (2.18)$$

- b) Não há torque "interno", ou seja, existe apenas torque orbital. Isto significa que, para volumes suficientemente pequenos, o torque já é determinado pela força, segundo a fórmula $\mathbf{T} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$. Portanto, a densidade de torque pode ser expressa em termos da densidade de força, como segue:

$$t_i = \epsilon_{ijl} x_j f_l. \quad (2.19)$$

Em particular, temos $t \equiv 0$ quando $\mathbf{f} \equiv 0$.

Na sua grande maioria, os sistemas encontrados na hidrodinâmica e na mecânica dos meios contínuos satisfazem as hipóteses a) e b). Um contraexemplo seria um sistema de partículas com spin e portanto com momento magnético, tal como um gas de elétrons, dentro de um campo magnético externo.

Sob as hipóteses a) e b), a equação de balanço (2.16) para o momento angular implica

$$\epsilon_{ijl} x_j \frac{\partial \rho_l^P}{\partial t} + \partial_k (\epsilon_{ijl} x_j j_{lk}^P) = \epsilon_{ijl} x_j f_l ,$$

i.e.

$$\epsilon_{ijl} x_j \left(\frac{\partial \rho_l^P}{\partial t} + \partial_k j_{lk}^P \right) + \epsilon_{ikl} j_{lk}^P = \epsilon_{ijl} x_j f_l .$$

Usando a equação de balanço (2.11) para o momento linear, concluímos que

$$\epsilon_{ikl} j_{lk}^P = 0 ,$$

i.e.

$$j_{lk}^P = j_{kl}^P , \quad (2.20)$$

afirmando que a densidade de fluxo de momento linear deve ser um campo tensorial *simétrico*.

2.3 As equações de Navier-Stokes

Em fluidos, temos, de acordo com as equações (2.15) e (2.20)

$$j_{ik}^P = \rho v_i v_k + \sigma_{ik}$$

com um tensor de pressão simétrico σ . Uma parte deste tensor pode ser facilmente identificada: a pressão escalar p providencia uma contribuição isotrópica $p \delta_{ik}$ a σ_{ik} , ou seja, temos

$$\sigma_{ik} = p \delta_{ik} + \sigma'_{ik} . \quad (2.21)$$

A parte restante σ' do tensor de pressão σ descreve *fricção interna* no fluido. Voltaremos a discutir este termo mais adiante.

Com as expressões obtidas até agora, a equação de continuidade (2.11) para o momento linear no fluido torna-se

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \partial_k (\rho v_i v_k + p \delta_{ik} + \sigma'_{ik}) = f_i ,$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \partial_k (\rho v_k) + \rho v_k \partial_k v_i + \partial_i p + \partial_k \sigma'_{ik} = f_i .$$

Usando a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (2.22)$$

para a massa (veja as equações (2.4) e (2.5)) podemos simplificar:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \partial_k v_i \right) + \partial_i p + \partial_k \sigma'_{ik} = f_i . \quad (2.23)$$

2.3 As equações de Navier-Stokes

Um *fluido ideal* é, por definição, um fluido no qual não há fricção interna e, portanto, vale $\sigma' = 0$. Neste caso, a equação (2.23) se reduz à *equação de Euler* para o escoamento de fluidos ideais:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla p = \mathbf{f} . \quad (2.24)$$

Os diferentes termos nesta equação têm uma interpretação simples. Primeiro, definimos para qualquer campo A um novo campo DA/Dt por

$$\begin{aligned} \frac{DA}{Dt}(t, \mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) A \right)(t, \mathbf{x}) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t, \mathbf{x} + \mathbf{v}(t, \mathbf{x})\Delta t) - A(t, \mathbf{x})}{\Delta t} . \end{aligned} \quad (2.25)$$

DA/Dt é chamado a *derivada substantiva* de A ; ela descreve a variação temporal de A que observamos quando nos movimentamos junto com o fluido – ao contrário da derivada parcial $\partial A/\partial t$ de A , que descreve a variação temporal de A num ponto fixo do espaço. Em particular, $D\mathbf{v}/Dt$ descreve a variação temporal de \mathbf{v} , ou seja, a aceleração à qual está sujeito um elemento de massa do fluido na sua trajetória. Ademais, $-\nabla p$ é a força de pressão agindo sobre um elemento de massa do fluido, direcionada da região de pressão mais alta para a região de pressão mais baixa. Assim, reconhecemos a equação de Euler, escrita na forma

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f} - \nabla p , \quad (2.26)$$

como sendo a equação de movimento de Newton para um fluido ideal. Usando a identidade

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \nabla(v^2) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (2.27)$$

a equação de Euler também pode ser escrita na forma

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(v^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \right) + \nabla p = \mathbf{f} . \quad (2.28)$$

Faremos agora algumas hipóteses adicionais:

a) O fluido é *incompressível*:

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho_0 = \text{const.} . \quad (2.29)$$

(Obviamente, isto é uma aproximação útil apenas no caso de líquidos, não no de gases.)

b) O escoamento é *estacionário*:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 . \quad (2.30)$$

2 Elementos da Hidrodinâmica

c) O escoamento é irrotacional:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 . \quad (2.31)$$

d) A força externa deriva de um potencial:

$$\mathbf{f} = -\nabla \phi . \quad (2.32)$$

Então a equação (2.28) torna-se

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \rho_0 v^2 + p + \phi \right) = 0 , \quad (2.33)$$

i.e.

$$\frac{1}{2} \rho_0 v^2 + p + \phi = \text{const.} . \quad (2.34)$$

Esta é a bem conhecida *lei de Bernoulli*, expressando a lei da conservação da energia para fluidos ideais incompressíveis. (Se omitirmos a condição (2.31), a expressão no lado esquerdo da equação (2.34) será constante apenas ao longo de cada linha de fluxo.) O caso mais simples é o da *hidrostática*:

$$\mathbf{v} \equiv 0 . \quad (2.35)$$

A equação de Euler se reduz então à condição de *equilíbrio hidrostático*

$$\nabla p = \mathbf{f} . \quad (2.36)$$

No campo gravitacional homogêneo, temos $\mathbf{f} = \rho \mathbf{g}$ e, para fluidos incompressíveis (veja a equação (2.29))

$$\nabla (p - \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) = 0 , \quad (2.37)$$

com a solução

$$p(\mathbf{x}) = \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} , \quad (2.38)$$

que é o bem conhecido aumento linear da pressão com a profundidade. Finalmente, segundo a equação (2.13), o i -ésimo componente F_i da força de pressão exercida pelo fluido sobre um corpo nele inserido é

$$F_i = - \int_{\partial V} df_k j_{ik}^P = - \int_V d^3x \partial_k j_{ik}^P . \quad (2.39)$$

Naturalmente, a distribuição da pressão no interior de um corpo inserido no fluido é diferente da que encontraríamos na ausência do corpo. A última equação mostra, porém, que o resultado só depende dos valores da densidade de fluxo de momento na superfície ∂V da região do espaço ocupada pelo corpo. Portanto, para calcular a integral nesta equação, podemos empregar um campo tensorial qualquer, desde que tenha os valores corretos na superfície ∂V de V . No presente caso, podemos usar $j_{ik}^P = p \delta_{ik}$ e obtemos

$$\partial_k j_{ik}^P = \partial_i p = \rho_0 g_i ,$$

2.3 As equações de Navier-Stokes

com o resultado

$$\mathbf{F} = -\rho_0 |\mathbf{V}| \mathbf{g} , \quad (2.40)$$

onde $|\mathbf{V}|$ é o volume da região V : isto é a bem conhecida *lei do empuzo* de Arquimedes.

Finalmente, queremos levar em conta os efeitos da fricção, que se manifestam no *tensor de fricção* σ' , a parte do tensor de pressão σ introduzida na equação (2.21). Fricção é uma consequência do movimento relativo entre as partículas do fluido e portanto só pode existir quando $\partial_i v_k \neq 0$.

A hipótese mais simples é a de uma dependência linear entre o tensor de fricção σ'_{ik} e o gradiente do campo de velocidades $\partial_i v_k$. O campo tensorial simétrico de grau 2 mais geral que depende de forma linear e rotacionalmente covariante de $\partial_i v_k$ é

$$\sigma'_{ik} = -\eta (\partial_i v_k + \partial_k v_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} \partial_r v_r) - \zeta \delta_{ik} \partial_r v_r , \quad (2.41)$$

onde já separamos a parte $\partial_r v_r$ responsável pelas deformações do fluido que alteram o volume. A quantidade η se chama *viscosidade* e a quantidade ζ *viscosidade de volume*. Fluidos que satisfazam a simples lei (2.41) são chamados *fluidos Newtonianos*. Para fluidos não-Newtonianos (tais como sangue, mel, areia húmida etc.), no entanto, a relação entre σ'_{ik} e $\partial_i v_k$ pode ser muito mais complicado.

Substituindo a equação (2.41) na equação de continuidade (2.23) para o momento e supondo que η e ζ são constantes, obtemos as *equações de Navier-Stokes*:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \nabla p - \eta \Delta \mathbf{v} - \left(\frac{1}{3} \eta + \zeta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{f} . \quad (2.42)$$

Em conjunto com a equação de continuidade (2.22) para a massa, são quatro equações para cinco funções a serem determinadas: \mathbf{v} , ρ , p . Portanto, o sistema ainda é subdeterminado, até que seja exibida uma quinta equação, por exemplo na forma de uma *equação de material*

$$p = p(T, \rho) , \quad (2.43)$$

onde T é a temperatura. Mesmo assim, o sistema permanece subdeterminado - exceto quando mudanças de temperatura podem ser negligenciadas. Caso contrário, devemos levar em conta também os efeitos da condução do calor.

As equações de Navier-Stokes são as equações fundamentais da hidrodinâmica. Devido ao fato de serem não-lineares, sua solução é extremamente difícil e, em situações gerais, impossível. Atualmente, o entendimento de fenômenos especiais, principalmente o da turbulência, é tema da pesquisa. Uma discussão de questões desta natureza ultrapassaria os limites de um texto introdutório e deve ser reservada para a literatura mais avançada.

3 As equações de Maxwell

3.1 Introdução às equações de Maxwell

A experiência, acumulada durante quase dois séculos, demonstra que todos os fenômenos eletromagnéticos estão ligados à existência de uma nova quantidade extensiva denominada *carga elétrica* ou simplesmente *carga*. Ela é uma quantidade conservada e está sujeita a uma equação de balanço do tipo descrito no capítulo anterior. No que segue, denotaremos a densidade de carga por ρ e a densidade de fluxo de carga, ou densidade de corrente, por \mathbf{j} , o que permite escrever a lei de conservação da carga na forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (3.1)$$

Outro fato de caráter experimental é que todos os fenômenos eletromagnéticos podem ser entendidos em termos de dois campos vetoriais: o *campo elétrico* \mathbf{E} e o *campo magnético* \mathbf{B} ; frequentemente, \mathbf{B} também é chamado *indução magnética*. Mais exatamente, temos a seguinte afirmação.

A força eletromagnética exercida sobre uma carga pontual q que no instante t se encontra na posição \mathbf{x} e se move com velocidade \mathbf{v} é a *força de Lorentz*

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = q \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \kappa q \mathbf{v} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}).$$

Abreviando, podemos escrever esta equação – como é de costume – na forma

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E} + \kappa q \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.2)$$

A constante κ será determinada apenas quando fixarmos as unidades de medida para a carga, o campo elétrico e o campo magnético; este assunto será abordado mais adiante.

A lei de força (3.2) permite uma definição operacional dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} – pelo menos na medida em que a retroação da carga q sobre os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} pode ser negligenciada. Isto é o caso para *cargas teste*, ou seja, no limite de cargas pequenas,

3 As equações de Maxwell

de modo que \mathbf{E} e \mathbf{B} podem ser determinados, pelo menos em princípio, através da passagem ao limite

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}$$

e subsequente separação em uma parte que não depende da velocidade e uma parte que depende (linearmente) da velocidade.

Quando consideramos, ao invés de uma carga pontual q , uma distribuição geral de cargas e correntes, caracterizada por uma densidade de carga ρ e uma densidade de corrente \mathbf{j} , temos que substituir a força de Lorentz pela *densidade de força de Lorentz*, dada por

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \kappa \mathbf{j} \times \mathbf{B} . \quad (3.3)$$

As leis de força (3.2) e (3.3) determinam a influência que um dado campo eletromagnético exerce sobre cargas e correntes, mas não dizem nada a respeito da dinâmica do próprio campo eletromagnético, ou seja, a respeito das leis que regem sua geração e propagação. Estas leis são as equações de Maxwell. Trata-se de um sistema de equações diferenciais parciais que expressam a divergência e o rotacional de \mathbf{E} e de \mathbf{B} em termos de uma dada densidade de carga ρ e uma dada densidade de corrente \mathbf{j} , além das primeiras derivadas parciais de \mathbf{E} e de \mathbf{B} em relação ao tempo, conforme segue:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = k_1 \rho , \quad (3.4-a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -k_2 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (3.4-b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (3.4-c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = k_3 \mathbf{j} + k_4 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (3.4-d)$$

com constantes k_1, k_2, k_3 e k_4 ainda a serem especificadas. Este sistema de equações determina \mathbf{E} e \mathbf{B} unicamente, pois sob condições de fronteira apropriadas (como, por exemplo, decaimento suficientemente rápido ao infinito), um campo vetorial \mathbf{A} é unicamente determinado por sua divergência $D = \nabla \cdot \mathbf{A}$ e seu rotacional $\mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{A}$ (sendo que este deve satisfazer à condição suplementar $\nabla \cdot \mathbf{R} = 0$).

De fato, sejam \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 dois campos vetoriais tais que $\nabla \cdot \mathbf{A}_1 = D = \nabla \cdot \mathbf{A}_2$ e $\nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{A}_2$. Então sua diferença $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ satisfaz às condições $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e $\nabla \times \mathbf{A} = 0$; portanto, podemos escrever $\mathbf{A} = -\nabla \phi$, onde $\Delta \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = 0$. Como será mostrado no Capítulo 4, a única solução limitada da equação de Laplace $\Delta \phi = 0$ que não apresente nenhum tipo de singularidade é a solução constante $\phi = \phi_0$, o que implica $\mathbf{A} = 0$ e $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$.

Deve-se ressaltar que – ao contrário da situação que prevalece nas leis de força – a distribuição de cargas e correntes nas equações de Maxwell deve ser interpretada como a *fonte* do campo elétrico e magnético e não como o objeto de ação das forças exercidas por estes campos.

3.1 Introdução às equações de Maxwell

No que segue, queremos primeiro reescrever estas equações diferenciais em forma integral e, ao mesmo tempo, esclarecer seu significado físico. Como veremos, a consistência deste sistema de equações com as leis de força de Lorentz (3.2) e (3.3) e com a lei de conservação da carga (3.1) impõe as seguintes relações entre as várias constantes:

$$k_2 = \kappa \quad \text{e} \quad k_4 = \frac{k_3}{k_1}.$$

Além disso, costuma-se expressar as constantes k_1 e k_3 em termos de duas constantes denotadas por ϵ_0 e μ_0 , como segue:

$$k_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad k_3 = \kappa \mu_0.$$

Assim, as equações de Maxwell assumem a forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.5-a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\kappa \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.5-b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.5-c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \kappa \mu_0 \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (3.5-d)$$

Fixando ϵ_0 determina as unidades de medida para \mathbf{E} e ρ , assim como para \mathbf{j} , enquanto que fixando μ_0 ou κ determina a unidade de medida para \mathbf{B} ; esta questão será discutida na próxima seção.

3.1.1 Lei de Gauss

O conteúdo físico da primeira equação de Maxwell (3.5-a) é o *teorema do fluxo para o campo elétrico*:

O fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada é proporcional à carga total contida no seu interior, i.e., para um volume V qualquer com bordo ∂V vale

$$\Phi_{\partial V}^{\mathbf{E}} \equiv \int_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho \equiv \frac{q_V}{\epsilon_0}. \quad (3.6)$$

De fato, o teorema de Gauss permite concluir que a equação (3.6) é equivalente à condição

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3x \rho,$$

e como esta vale para volumes V quaisquer, à equação (3.5-a). Intuitivamente, o teorema do fluxo afirma que as fontes e sumidouros do campo elétrico são exatamente as cargas elétricas: é nelas que começam e terminam as linhas do campo elétrico.

3 As equações de Maxwell

Para campos estáticos, o teorema do fluxo segue diretamente da lei de Coulomb, segundo a qual o campo eletrostático de uma carga pontual q localizada no ponto \mathbf{x}_0 é dado por

$$\mathbf{E}_C(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3}. \quad (3.7)$$

Após integração explícita sobre a superfície ∂B de uma bola B em torno do ponto \mathbf{x}_0 e de raio r , vem

$$\int_{\partial B} d\sigma \cdot \mathbf{E}_C = \frac{q}{\epsilon_0},$$

independentemente de r . De fato, o mesmo resultado vale para a integral sobre a superfície ∂V de um volume V qualquer em torno do ponto \mathbf{x}_0

$$\int_{\partial V} d\sigma \cdot \mathbf{E}_C = \frac{q}{\epsilon_0},$$

pois se B é uma bola em torno do ponto \mathbf{x}_0 e de raio suficientemente pequeno para que $B \subset V$ e se $W = V \setminus B$, então $\nabla \cdot \mathbf{E}_C = 0$ sobre W e portanto

$$\int_{\partial V} d\sigma \cdot \mathbf{E}_C - \int_{\partial B} d\sigma \cdot \mathbf{E}_C = \int_{\partial W} d\sigma \cdot \mathbf{E}_C = \int_W d^3x \nabla \cdot \mathbf{E}_C = 0.$$

(Veja Fig. 3.1.)

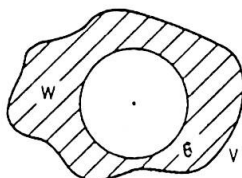


Fig. 3.1: Independência do fluxo elétrico de uma carga pontual da forma específica da superfície

Passando de uma única carga pontual a um sistema de cargas pontuais e, mais geralmente, a uma distribuição qualquer de cargas, obtemos o teorema do fluxo da eletrostática.

Reciprocamente, para campos estáticos, a lei de Coulomb é uma consequência do teorema do fluxo, em conjunto com o fato de que, de acordo com a equação de Maxwell (3.5-b), campos eletrostáticos são irrotacionais. Sem querer entrar em detalhes, podemos apresentar a idéia do argumento da seguinte forma. Inicialmente, a propriedade de que campos eletrostáticos são irrotacionais garante que o campo elétrico gerado por uma carga pontual localizada no ponto \mathbf{x}_0 é o gradiente de um campo escalar que, devido à invariância das equações sob rotações no espaço em torno do ponto \mathbf{x}_0 , depende apenas da variável radial $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$. O teorema do fluxo garante então que este potencial deve ser proporcional a $1/r$.

3.1 Introdução às equações de Maxwell

Concluindo, observamos que a equação de Maxwell (3.5-a) exige a validade do teorema do fluxo também para campos elétricos que dependem do tempo; ela e o teorema do fluxo são frequentemente chamados a *lei de Gauss*.⁴

3.1.2 Ausência de cargas magnéticas

O conteúdo físico da terceira equação de Maxwell (3.5-c) é o *teorema do fluxo para o campo magnético*:

O fluxo do campo magnético através de uma superfície fechada se anula, i.e., para um volume V qualquer com bordo ∂V vale

$$\Phi_{\partial V}^m \equiv \int_{\partial V} d\sigma \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.8)$$

De fato, o teorema de Gauss permite concluir que a equação (3.8) é equivalente à condição

$$\int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

e como esta vale para volumes V quaisquer, à equação (3.5-c). Intuitivamente, o teorema do fluxo afirma que o campo magnético não possui fontes ou sumidouros, ou seja, não existem cargas magnéticas: as linhas do campo magnético são sempre fechadas.

3.1.3 Lei de indução de Faraday

O significado físico da segunda equação de Maxwell (3.5-b) é a *lei de indução de Faraday*:

A circulação do campo elétrico ao longo de uma curva fechada é proporcional à derivada total, em relação ao tempo, do fluxo magnético que a atravessa, i.e., para uma superfície S qualquer com bordo ∂S vale

$$\int_{\partial S} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = -\kappa \frac{d}{dt} \int_S d\sigma \cdot \mathbf{B} \equiv -\kappa \frac{d}{dt} \Phi_S^m. \quad (3.9)$$

Observe que não apenas o lado esquerdo mas também o lado direito desta equação depende apenas de ∂S e não de S mesmo; isto vale até para o próprio fluxo magnético Φ_S^m : De fato, se S_1 e S_2 são duas superfícies cujo bordo é a mesma curva γ , então juntas elas formam a superfície ∂V de um volume V , e usando o teorema de Gauss em conjunto com a equação de Maxwell (3.5-c), vem

$$\Phi_{S_1}^m - \Phi_{S_2}^m = \int_{\partial V} d\sigma \cdot \mathbf{B} = \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

⁴É importante distinguir claramente entre a lei de Gauss e o teorema de Gauss, sendo que o último é usado para demonstrar a equivalência entre as duas formulações da primeira – a formulação diferencial (3.5-a) e a formulação integral (3.6).

3 As equações de Maxwell

(O sinal negativo no primeiro termo deve-se ao fato de que o campo normal sobre ∂V , orientado para fora, é necessariamente antiparalelo ao campo normal de uma das duas superfícies (digamos, S_2) se for escolhido a ser paralelo ao campo normal da outra (digamos, S_1), pois temos que exigir que ambas as superfícies sejam orientadas da mesma forma, segundo a regra usual da mão direita, relativamente ao seu bordo comum γ .)

A denominação “lei de indução” decorre do fato de que, segundo a equação de Maxwell (3.9), a variação temporal do fluxo magnético através de uma superfície S cujo bordo é formado por um fio condutor fechado γ induz uma voltagem

$$U_{\text{ind}} = -\kappa \frac{d}{dt} \Phi_F^m \quad (3.10)$$

ao longo do condutor. O sinal negativo nas equações (3.5-b), (3.9) e (3.10) indica que a corrente no condutor gerada por esta voltagem, em conjunto com o campo magnético por ela criado, tenta se opor à variação original do fluxo – um aspecto do fenômeno de indução conhecido como a *regra de Lenz*.

A equação de Maxwell (3.5-b) é a formulação diferencial de um caso particular da lei de indução – o caso onde a superfície S permanece constante no decorrer do tempo. De fato, nesta situação, o teorema de Stokes permite concluir que a equação (3.9) é equivalente à condição

$$\int_S d\sigma \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\kappa \frac{d}{dt} \int_S d\sigma \cdot \mathbf{B} = -\kappa \int_S d\sigma \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

e como esta vale para superfícies S quaisquer, à equação (3.5-b).

No entanto, uma variação do fluxo magnético Φ_S^m através de uma superfície S pode resultar tanto de uma mudança do próprio campo magnético como de um movimento da superfície S e do seu bordo ∂S . Como veremos a seguir, a lei de indução de Faraday, na forma da equação (3.10), cobre ambos os casos. desde que – como já foi afirmado anteriormente e antecipado pela notação utilizada na equação de Maxwell (3.5-b) – a constante k_2 na equação de Maxwell (3.4-b) e a constante κ nas leis de força de Lorentz (3.2) e (3.3) sejam idênticas.

Para demonstrar esta afirmação, consideremos um fio condutor fechado, movimentado (e até deformado) de maneira arbitrária, dentro de um campo magnético \mathbf{B} . No instante t , calculamos o fluxo magnético $\Phi_{S(t)}^m$ através de uma superfície $S(t)$ cujo bordo é uma curva fechada $\gamma(t)$ que descreve a localização do referido fio condutor neste instante. Ademais, suponhamos que no decorrer do tempo, por exemplo entre dois instantes t_1 e t_2 , as curvas $\gamma(t)$ percorrem uma superfície $M(t_1, t_2)$ e as superfícies $S(t)$ percorrem um volume $V(t_1, t_2)$ – tipicamente o manto e o interior de um cilindro deformado, respectivamente. As curvas $\gamma(t)$ e as superfícies $S(t)$ serão parametrizadas em termos de um parâmetro τ e de dois parâmetros σ, τ , respectivamente, sendo que a escolha destes parâmetros não deve depender de t , o que garante que a superfície $M(t_1, t_2)$ e o volume $V(t_1, t_2)$ serão parametrizados por τ, t e por σ, τ, t , respectivamente, com $t_1 \leq t \leq t_2$. (Veja Fig. 3.2.)

3.1 Introdução às equações de Maxwell

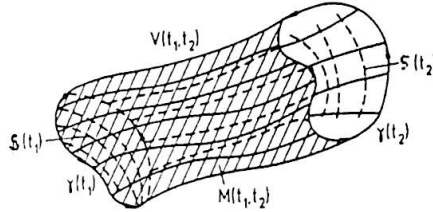


Fig. 3.2: Um fio condutor fechado movimentado que, em cada instante t , forma uma curva $\gamma(t)$ fechada que é o bordo de uma superfície $S(t)$ e que, entre dois instantes t_1 e t_2 , percorre uma superfície $M(t_1, t_2)$ que inclui o volume $V(t_1, t_2)$.

Então para qualquer campo vetorial \mathbf{A} , vale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(t)} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} &= \int d\tau \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}(t, \tau) \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}(t, \tau)) , \\ \int_{S(t)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} &= \int d\sigma d\tau \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \sigma}(t, \sigma, \tau) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}(t, \sigma, \tau) \right) \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}(t, \sigma, \tau)) \\ \int_{M(t_1, t_2)} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} &= \int_{t_1 \leq t \leq t_2} dt d\tau \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}(t, \tau) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t, \tau) \right) \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}(t, \tau)) . \end{aligned}$$

Diferenciando a segunda destas três equações em relação a t e usando a regra da cadeia, vemos que a derivada total do fluxo de \mathbf{A} através de uma superfície S em relação ao tempo pode ser escrita como a soma de duas contribuições – uma que reflete a dependência explícita de \mathbf{A} e uma que reflete a dependência de S , em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{d'}{dt} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} . \quad (3.11)$$

No cálculo da segunda contribuição, podemos fingir que \mathbf{A} não apresente nenhuma dependência explícita do tempo, pois temos, por definição,

$$\frac{d'}{dt} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}_{t_0} \Big|_{t=t_0} , \quad (3.12)$$

onde \mathbf{A}_{t_0} é definido por “congelamento” do argumento temporal de \mathbf{A} no valor t_0 :

$$\mathbf{A}_{t_0}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t_0, \mathbf{x}) . \quad (3.13)$$

Isso posto, podemos concluir da equação (3.5-c), em conjunto com o teorema de Gauss, que para uma campo magnético \mathbf{B} estático, i.e., sem dependência explícita do tempo, vale

3 As equações de Maxwell

$$\begin{aligned}
 \int_{S(t_2)} d\sigma \cdot \mathbf{B} - \int_{S(t_1)} d\sigma \cdot \mathbf{B} &= \int_{V(t_1, t_2)} d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} - \int_{M(t_1, t_2)} d\sigma \cdot \mathbf{B} \\
 &= - \int_{M(t_1, t_2)} d\sigma \cdot \mathbf{B} \\
 &= - \int_{t_1 \leq t \leq t_2} dt d\tau \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}(t, \tau) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t, \tau) \right) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}(t, \tau))
 \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_S d\sigma \cdot \mathbf{B} \Big|_{t=t_0} &= - \int d\tau \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}(t_0, \tau) \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t_0, \tau) \right) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}(t_0, \tau)) \\
 &= - \int d\tau \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}(t_0, \tau) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t_0, \tau) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}(t_0, \tau)) \right) .
 \end{aligned}$$

Para um campo magnético arbitrário \mathbf{B} , podemos aplicar este argumento ao campo magnético estático \mathbf{B}_{t_0} para concluir que

$$\frac{d}{dt} \int_S d\sigma \cdot \mathbf{B} \Big|_{t=t_0} = - \int d\tau \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau}(t_0, \tau) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(t_0, \tau) \times \mathbf{B}(t_0, \mathbf{x}(t_0, \tau)) \right) ,$$

ou mais brevemente (usando que t_0 era arbitrário),

$$- \frac{d}{dt} \int_S d\sigma \cdot \mathbf{B} = \int_{\gamma} d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) .$$

Ademais, aplicando o teorema de Stokes à equação (3.4-b), obtemos

$$-k_2 \int_S d\sigma \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \int_{\gamma} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} .$$

Portanto, a equação (3.11) fornece para o lado direito da lei de indução a expressão

$$-k_2 \frac{d}{dt} \int_S d\sigma \cdot \mathbf{B} = \int_{\gamma} d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{E} + k_2 \mathbf{v} \times \mathbf{B}) .$$

Por outro lado, em cada instante t fixo, a voltagem induzida entre dois pontos no fio condutor é igual ao trabalho virtual necessário para transportar uma carga pontual q que se encontra no fio de um ponto para o outro, dividido por q . Explicitamente, tendo em vista a lei de força (3.2), isto significa que a voltagem circular induzida ao longo do fio condutor, que corresponde ao trabalho virtual necessário para dar uma volta completa, dividido pelo valor da carga, vale

$$U_{\text{ind}} = \int_{\gamma} d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{E} + \kappa \mathbf{v} \times \mathbf{B}) .$$

Isto conclui a demonstração da afirmação: A equação (3.10) é válida geralmente, para campos magnéticos arbitrários e fios condutores fechados movimentados de maneira arbitrária, se e somente se $k_2 = \kappa$.

3.1 Introdução às equações de Maxwell

3.1.4 Lei de Ampère

O significado físico da quarta equação de Maxwell (3.5-d) é a *lei de Ampère*, inclusive o *termo adicional de Maxwell*:

A circulação do campo magnético ao longo de uma curva fechada é composta de a) um termo proporcional à corrente total que a atravessa e b) um termo proporcional à derivada total, em relação ao tempo, do fluxo elétrico que a atravessa, i.e., para uma superfície S qualquer com bordo ∂S vale

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} &= \kappa\mu_0 \left(\int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \right) \\ &\equiv \kappa\mu_0 \left(I_S + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_S^e \right) .\end{aligned}\quad (3.14)$$

Novamente, observe que não apenas o lado esquerdo mas também o lado direito desta equação depende apenas de ∂S e não de S mesmo: De fato, se S_1 e S_2 são duas superfícies cujo bordo é a mesma curva γ , então juntas elas formam a superfície ∂V de um volume V , e usando o teorema de Gauss em conjunto com a equação de Maxwell (3.5-a) e a lei de conservação da carga (3.1), vem

$$\begin{aligned}\left(I_{S_1} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{S_1}^e \right) - \left(I_{S_2} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi_{S_2}^e \right) \\ = \int_{\partial V} d\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ = \int_V d^3x \nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 .\end{aligned}$$

A equação de Maxwell (3.5-d) é a formulação diferencial de um caso particular da lei de Ampère – o caso onde a superfície S permanece constante no decorrer do tempo. De fato, nesta situação, o teorema de Stokes permite concluir que a equação (3.14) é equivalente à condição

$$\begin{aligned}\int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \kappa\mu_0 \left(\int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \right) \\ &= \kappa\mu_0 \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) ,\end{aligned}$$

e como esta vale para superfícies S quaisquer, à equação (3.5-d).

As equações (3.5-d) e (3.14) contêm, entre outros, o efeito magnético de correntes elétricas observado pela primeira vez por Oersted. Quantitativamente, este fenômeno é expresso pela *lei de fluxo de Ampère*, segundo a qual a circulação do campo magnético ao longo de uma curva fechada contornando uma corrente é proporcional a esta mesma corrente:

$$\int_{\partial S} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = \kappa\mu_0 \int_S d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{j} = \kappa\mu_0 I_S .\quad (3.15)$$

3 As equações de Maxwell

Em formulação diferencial, esta lei pode, usando o teorema de Stokes, ser escrita na forma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \kappa \mu_0 \mathbf{j} . \quad (3.16)$$

No entanto, esta lei vale apenas para correntes estacionárias, pois para campos que dependem do tempo, ela é inconsistente com a lei de conservação da carga (3.1). De fato, aplicando a divergência à equação (3.16), obtemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{j} , \quad (3.17)$$

o que pode ser interpretado como a definição do termo “correntes estacionárias”. No caso geral, a lei de fluxo de Ampère deve ser corrigida pela adição de um termo que venha a garantir a compatibilidade com a lei de conservação da carga:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \kappa \mu_0 \mathbf{j} + \mathbf{C} \quad \text{com} \quad \nabla \cdot \mathbf{C} = -\kappa \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = \kappa \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

Devido à equação de Maxwell (3.5-a), uma escolha possível e natural é a seguinte:

$$\mathbf{C} = \kappa \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} .$$

Este é o termo adicional originalmente proposto por Maxwell que, subseqüentemente, foi confirmado por todas as experiências.

Com esta modificação, a lei de conservação da carga (3.1) torna-se uma conseqüência das equações de Maxwell, desde que – como já foi afirmado anteriormente e antecipado pela notação utilizada na equação de Maxwell (3.5-d) – as constantes k_1 , k_3 e k_4 nas equações de Maxwell (3.4-a) e (3.4-d) satisfaçam à condição $k_4 = k_3/k_1$. Note que sem o termo adicional de Maxwell, não haveria campos elétricos ou magnéticos não-triviais em regiões onde $\rho = 0$ e $\mathbf{j} = 0$; em particular, não haveria ondas eletromagnéticas propagando no vácuo. De fato, $\rho = 0$ e $\mathbf{j} = 0$ implicaria $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, assim como $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, levando à conclusão de que $\mathbf{B} = 0$, assim como $\mathbf{E} = 0$.

Finalmente, queremos apresentar a formulação das equações de Maxwell em termos de formas diferenciais. Como regra geral, podemos afirmar que campos cuja interpretação física envolve quantidades obtidas por integração sobre subvariedades de dimensão p devem ser representados por p -formas. Assim, a densidade de carga ρ corresponde a uma 3-forma e a densidade de corrente \mathbf{j} a uma 2-forma. Ademais, invariância das leis de força de Lorentz (3.2) e (3.3) sob as transformações de paridade P e de reversão temporal T exige que o campo elétrico \mathbf{E} e o campo magnético \mathbf{B} satisfaçam à seguinte lei de transformação:

$$P : \begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &\rightarrow -\mathbf{E}(t, -\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &\rightarrow +\mathbf{B}(t, -\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{Paridade}) \quad (3.18)$$

$$T : \begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &\rightarrow +\mathbf{E}(-t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &\rightarrow -\mathbf{B}(-t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{Reversão temporal}) \quad (3.19)$$

3.2 Sistemas de unidades na eletrodinâmica

Isto significa que E é um campo vetorial *polar* enquanto que B é um campo vetorial *axial*. Usando o chamado operador estrela, podemos nos convencer que um campo vetorial polar corresponde a uma 1-forma enquanto que um campo vetorial axial resulta da aplicação do operador estrela a uma 2-forma. Portanto, introduzimos as seguintes formas diferenciais:

$$\bar{\rho} = \rho e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \in \Omega^3(E^3), \quad (3.20)$$

$$\bar{j} = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} j_k e_l \wedge e_m \in \Omega^2(E^3), \quad (3.21)$$

$$E = E_i e_i \in \Omega^1(E^3), \quad (3.22)$$

$$B = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} B_k e_l \wedge e_m \in \Omega^2(E^3). \quad (3.23)$$

Então as equações de Maxwell assumem a seguinte forma:

$$d * E = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0}, \quad (3.24-a)$$

$$dE = -\kappa \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (3.24-b)$$

$$dB = 0, \quad (3.24-c)$$

$$d * B = \kappa \mu_0 \left(\bar{j} + \epsilon_0 \frac{\partial * E}{\partial t} \right). \quad (3.24-d)$$

Observe que o operador estrela aparece apenas nas equações de Maxwell não homogêneas (3.24-a) e (3.24-d), enquanto que as equações de Maxwell homogêneas (3.24-b) e (3.24-c) podem ser escritas sem referência à métrica ou à orientação do espaço Euclidiano.

3.2 Sistemas de unidades na eletrodinâmica

Como veremos nos Capítulos 4 e 5, as equações de Maxwell e as leis de força de Lorentz implicam que o módulo da força eletrostática F^e entre duas cargas pontuais q_1 e q_2 separadas pela distância r é

$$|F^e| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (3.25)$$

enquanto que o módulo da força magnetostática F^m entre dois fios condutores lineares, de comprimento l (no limite $l \rightarrow \infty$), alinhados paralelamente, separados pela distância r e percorridos por correntes estacionárias I_1 e I_2 , é

$$|F^m| = \frac{\kappa^2 \mu_0}{4\pi} \frac{2l I_1 I_2}{r}. \quad (3.26)$$

A relação entre estas duas forças não tem dimensão (i.e., é uma quantidade puramente numérica) e não depende das unidades de força ou de carga escolhidas.

3 As equações de Maxwell

O quociente entre os dois pré-fatores que aparecem nestas duas equações pode ser escrito na forma

$$\kappa^2 \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad (3.27)$$

onde c tem a dimensão de uma velocidade. Esta velocidade é uma constante universal, independente do sistema de unidades utilizado e característica do fenômeno do eletromagnetismo como um todo; ela será identificada mais adiante como a velocidade de propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo, ou seja, a velocidade da luz.

A partir da equação (3.27), os sistemas de unidades amplamente utilizados podem ser divididos em dois grupos:

3.2.1 Sistemas de unidades assimétricos

$$\kappa = 1, \quad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}. \quad (3.28)$$

A vantagem principal de sistemas de unidades deste grupo são a forma simples das leis de força de Lorentz e da lei de indução de Faraday, enquanto que a desvantagem principal reside no fato de que \mathbf{E} e \mathbf{B} têm dimensões diferentes. Em considerações gerais de natureza teórica, particularmente na teoria da relatividade, isso se torna inconveniente – por exemplo devido ao fato de que, como veremos mais adiante, \mathbf{E} e \mathbf{B} se misturam sob transformações que levam um sistema inercial para outro. Exemplos de sistemas de unidades assimétricos são:

- Sistema de unidades eletrostático:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}, \quad \mu_0 = \frac{4\pi}{c^2}. \quad (3.29)$$

Neste sistema, a lei de Coulomb assume uma forma particularmente simples. A dimensão da carga é $[q] = \sqrt{\text{força} \cdot \text{distância}}$.

- Sistema de unidades magnetostático:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2}, \quad \mu_0 = 4\pi. \quad (3.30)$$

Neste sistema, a lei de Biot-Savart (veja Capítulo 5) assume uma forma particularmente simples. A dimensão da carga é $[q] = \sqrt{\text{força} \cdot \text{tempo}}$.

- **SI = Sistema Internacional:** O SI é caracterizado pela introdução de uma unidade básica própria para o eletromagnetismo. Atualmente, esta é a unidade da corrente, o Ampère (A), fixado por lei (!) da seguinte forma: “A unidade básica de um Ampère (1 A) é a quantidade de uma corrente elétrica constante no tempo que, fluindo em dois fios condutores lineares, de comprimento infinito e de seção transversal circular com raio negligenciável, alinhados paralelamente no vácuo e separados pela distância de um metro (1 m), gera entre eles uma força eletrodinâmica de $2 \cdot 10^{-7}$ Newton por metro de comprimento dos condutores.” A unidade da carga é então o Coulomb (C),

3.2 Sistemas de unidades na eletrodinâmica

i.e., o Ampère-segundo: $1C = 1As$. Esta definição da unidade do Ampère equivale à condição

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi} \frac{1}{c^2} \frac{A^2}{N}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}. \quad (3.31)$$

Para fins práticos, o SI é o mais adequado e hoje é quase universalmente aceito.

3.2.2 Sistemas de unidades simétricos

$$\kappa = \frac{1}{c}, \quad \epsilon_0 \mu_0 = 1. \quad (3.32)$$

A vantagem principal de sistemas de unidades deste grupo reside no fato de que E e B têm a mesma dimensão. Velocidades são medidas em unidades de c , e nas equações de Maxwell, a derivada em relação ao tempo sempre aparece na combinação com um fator $1/c$, sendo que o produto tem a dimensão de uma derivada em relação a uma variável espacial. Para fins práticos, no entanto, isto se torna inconveniente, pois a velocidade da luz é por muitas ordens de grandeza maior do que as velocidades que aparecem nas aplicações típicas. Exemplos de sistemas de unidades simétricos são:

- Sistema de unidades de Gauss:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi}, \quad \mu_0 = 4\pi. \quad (3.33)$$

Como no caso do sistema de unidades eletrostático, a lei de Coulomb assume uma forma particularmente simples, e a dimensão da carga é $[q] = \sqrt{\text{força} \cdot \text{distância}}$. Este sistema de unidades é amplamente utilizado na literatura teórica sobre eletrodinâmica.

- Sistema de unidades de Heaviside:

$$\epsilon_0 = 1, \quad \mu_0 = 1. \quad (3.34)$$

Este é o sistema de unidades mais simples e mais simétrico de todos. Ele é amplamente utilizado na literatura sobre mecânica quântica, teoria quântica dos campos e física das partículas.

No que segue, não adotaremos nenhum sistema de unidades específico – apesar de que isso acarreta a necessidade de complementar as duas constantes tradicionais ϵ_0 e μ_0 por uma terceira constante κ , sujeita à equação (3.27) que estabelece sua relação com as outras duas e a velocidade universal c . Este procedimento possui a vantagem de que todas as fórmulas são válidas em qualquer sistema de unidades: ao invés do processo penoso de conversão de um sistema para um outro, precisamos apenas substituir os respectivos valores das constantes especificadas acima. De modo geral, é conveniente lembrar que

$$\kappa = 1 \quad \text{no SI}, \quad (3.35)$$

$$\kappa = \frac{1}{c} \quad \begin{array}{l} \text{no sistema de unidades} \\ \text{de Gauss ou Heaviside} \end{array}. \quad (3.36)$$

3 As equações de Maxwell

Para a conversão de fórmulas entre diferentes sistemas de unidades, a regra mais simples e útil é o fato de que, em qualquer sistema de unidades, as quantidades

$$E_H = \sqrt{\epsilon_0} E, \quad B_H = \frac{B}{\sqrt{\mu_0}}, \quad \rho_H = \frac{\rho}{\sqrt{\epsilon_0}}, \quad j_H = \frac{j}{\sqrt{\epsilon_0}} \quad (3.37)$$

são idênticas às quantidades correspondentes do sistema de unidades de Heaviside e portanto satisfazem às equações de Maxwell e às leis de força de Lorentz neste sistema.

3.3 Condições iniciais e de fronteira

As equações de Maxwell, em conjunto com a lei de força de Lorentz, descrevem completamente os fenômenos eletromagnéticos macroscópicos e certamente constituem a maior conquista da física do século 19, de abrangência e profundidade comparável apenas às equações de movimento de Newton. Não foi à toa que Ludwig Boltzmann iniciou sua apresentação da teoria de Maxwell com a citação de Faust: "Foi um deus que escreveu estas linhas?" Contudo, o pleno impacto desta teoria se evidenciou apenas no início do século 20, devido à sua incompatibilidade com a mecânica Newtoniana. De fato, esta inconsistência foi a motivação principal para o desenvolvimento da teoria da relatividade, que acabou resolvendo o problema por uma modificação das equações de movimento de Newton, mantendo as equações de Maxwell inalteradas.

A afirmação de que as equações de Maxwell providenciam uma descrição completa dos fenômenos eletromagnéticos macroscópicos significa, em particular, que elas devem fixar a evolução temporal do campo eletromagnético, a partir de uma dada configuração inicial. Para discutir este problema inicial, ou problema de Cauchy, consideramos primeiro o caso de fontes externas, ou seja, a situação em que a distribuição de cargas e de correntes, $\rho(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$, é previamente dada e fixa. Fisicamente, isto significa que negligenciamos a retroação dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} sobre a distribuição de cargas e correntes que os gera. Neste caso, as equações de Maxwell constituem um sistema não-homogêneo de equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem para \mathbf{E} e \mathbf{B} . Portanto, dado o campo elétrico $\mathbf{E}(t_0, \mathbf{x})$ e o campo magnético $\mathbf{B}(t_0, \mathbf{x})$ no instante t_0 , os valores do campo elétrico $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ e do campo magnético $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ deveriam ser determinadas para todo t . Isto realmente é o caso, como podemos ver usando o seguinte argumento. Devido às equações (3.5-b) e (3.5-d), os valores de \mathbf{E} e \mathbf{B} num determinado instante t_0 determinam os valores das derivadas parciais $\partial \mathbf{E} / \partial t$ e $\partial \mathbf{B} / \partial t$ neste mesmo instante t_0 . Diferenciando as equações (3.5-b) e (3.5-d) n vezes em relação ao tempo, concluímos da mesma forma que as n -ésimas derivadas parciais de \mathbf{E} e \mathbf{B} em relação ao tempo no instante t_0 já determinam as $(n+1)$ -ésimas derivadas parciais de \mathbf{E} e \mathbf{B} em relação ao tempo no instante t_0 . Por indução sobre n , segue que os valores de \mathbf{E} e \mathbf{B} num determinado instante t_0 determinam completamente os valores de todas as derivadas parciais de \mathbf{E} e \mathbf{B} em relação ao tempo neste mesmo instante t_0 . Portanto, se os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} dependem analiticamente do tempo, i.e., se podem ser expandidos em séries de Taylor na variável t com raio de convergência maior do

3.3 Condições iniciais e de fronteira

que 0, então as equações (3.5-b) e (3.5-d) já fixam a evolução temporal do campo eletromagnético. (Usando teoremas matemáticos mais sofisticados da teoria de equações diferenciais parciais, a hipótese de analiticidade dos campos na variável t pode ser relaxada, sem afetar a conclusão de existência e unicidade da solução.) Por outro lado, as equações (3.5-a) e (3.5-c) não contêm derivadas parciais em relação ao tempo e portanto não são equações de evolução mas devem ser interpretadas como vínculos que definem quais são as configurações de campo admissíveis, em cada instante fixo. A existência de vínculos gera um problema de consistência, pois torna-se necessário verificar que campos satisfazendo aos vínculos (3.5-a) e (3.5-c) no instante t_0 e evoluindo segundo as equações (3.5-b) e (3.5-d) também satisfarão aos vínculos (3.5-a) e (3.5-c) em qualquer outro instante t . Isso no entanto segue da lei de conservação da carga (3.1), pois conforme a equação (3.5-d), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) &= \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\kappa \epsilon_0 \mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0,\end{aligned}$$

e segundo a equação (3.5-b), temos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = 0.$$

Ao invés de $\mathbf{E}(t_0, \mathbf{x})$ e $\mathbf{B}(t_0, \mathbf{x})$, podemos também usar $\mathbf{E}(t_0, \mathbf{x})$ e $(\partial \mathbf{E} / \partial t)(t_0, \mathbf{x})$, ou $\mathbf{B}(t_0, \mathbf{x})$ e $(\partial \mathbf{B} / \partial t)(t_0, \mathbf{x})$, como condições iniciais, desde que sejam respeitados os vínculos pertinentes

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(t_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(t_0, \mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t_0, \mathbf{x}),$$

ou

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t_0, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t_0, \mathbf{x}) = 0.$$

De fato, no primeiro caso, as equações (3.5-c) e (3.5-d) fixam $\nabla \cdot \mathbf{B}$ e $\nabla \times \mathbf{B}$ no instante t_0 , o que sob condições de fronteira apropriadas (como, por exemplo, decaimento suficientemente rápido ao infinito) também determina \mathbf{B} no instante t_0 . De forma análoga, no segundo caso, as equações (3.5-a) e (3.5-b) fixam $\nabla \cdot \mathbf{E}$ e $\nabla \times \mathbf{E}$ no instante t_0 , o que sob condições de fronteira apropriadas (como, por exemplo, decaimento suficientemente rápido ao infinito) também determina \mathbf{E} no instante t_0 .

Quando a distribuição de cargas e de correntes, ρ e \mathbf{j} , não está fixa mas está sujeita à retroação do próprio campo eletromagnético, coloca-se a tarefa de resolver as equações de movimento acopladas de um sistema mecânico-eletromagnético, onde as forças mecânicas são dadas pela força de Lorentz e talvez por outras forças de origem não eletromagnética. Trata-se de um sistema complexo e altamente não linear de equações diferenciais para um sistema dinâmico com um número infinito de graus de liberdade, onde a existência e unicidade da solução do problema inicial só pode ser garantida para pequenos intervalos de tempo, enquanto que a questão da estabilidade do sistema para grandes intervalos de tempo constitui um problema extremamente difícil.

3 As equações de Maxwell

Ao invés ou além da condição de decaimento suficientemente rápido ao infinito, os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} frequentemente são sujeitos a outras condições de fronteira. Como exemplo importante, consideremos a situação em que esta fronteira é uma superfície S carregando uma densidade superficial de carga ω ou uma densidade superficial de corrente \mathbf{k} . Localmente, podemos então decompor o espaço em dois domínios V_1 e V_2 , separados por S . Supondo que os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , assim como suas derivadas parciais em relação ao tempo, são infinitamente diferenciáveis no interior de cada uma das duas regiões V_1 e V_2 e apresentam, no máximo, descontinuidades finitas na interface S entre elas, obtemos as seguintes condições de contato para \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \frac{\omega}{\epsilon_0} \quad , \quad \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad , \quad (3.38)$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad , \quad \mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = \kappa \mu_0 \mathbf{k} \quad . \quad (3.39)$$

Aqui, \mathbf{E}_1 , \mathbf{B}_1 e \mathbf{E}_2 , \mathbf{B}_2 são os valores de \mathbf{E} e \mathbf{B} na superfície S obtidos por passagem ao limite a partir do interior de V_1 e de V_2 , respectivamente, e \mathbf{n}_{12} é o campo vetorial normal a S , direcionado de V_2 para V_1 . De fato, as equações para os componentes normais

$$E_1^n - E_2^n = \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \quad \text{e} \quad B_1^n - B_2^n = \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)$$

resultam das equações de Maxwell (3.5-a) e (3.5-c) por integração sobre a superfície do pequeno volume \tilde{V} mostrado na Fig. 3.3, onde o adjetivo “pequeno” se refere à extensão d do volume \tilde{V} em direção da normal \mathbf{n}_{12} à superfície S :

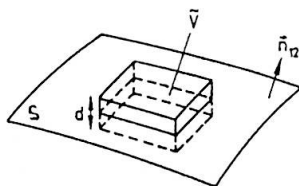


Fig. 3.3: Cálculo da descontinuidade do componente normal do campo elétrico e do campo magnético na interface entre duas regiões quando esta interface carrega uma densidade superficial de carga e uma densidade superficial de corrente dada, através do teorema de Gauss: veja texto

$$\begin{aligned} \int_{S \cap \tilde{V}} d\sigma \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\partial \tilde{V}} d\sigma \cdot \mathbf{E} = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\tilde{V}} d^3x \nabla \cdot \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\tilde{V}} d^3x \rho = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S \cap \tilde{V}} d\sigma \omega \quad , \\ \int_{S \cap \tilde{V}} d\sigma \mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\partial \tilde{V}} d\sigma \cdot \mathbf{B} = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\tilde{V}} d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad . \end{aligned}$$

3.4 Potenciais e transformações de calibre

De forma análoga, as equações para os componentes tangenciais

$$\mathbf{E}_1^t - \mathbf{E}_2^t = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_1^t - \mathbf{B}_2^t = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)$$

(onde \mathbf{t} percorre os possíveis vetores tangentes à superfície S) resultam das equações de Maxwell (3.5-b) e (3.5-d) por integração sobre o bordo da pequena superfície \tilde{S} ortogonal a \mathbf{t} mostrada na Fig. 3.4, onde o adjetivo “pequeno” se refere à extensão d da superfície \tilde{S} em direção da normal \mathbf{n}_{12} à superfície S :

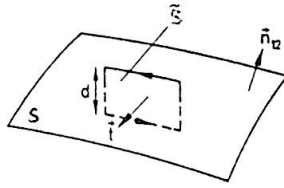


Fig. 3.4: Cálculo da descontinuidade do componente tangencial do campo elétrico e do campo magnético na interface entre duas regiões quando esta interface carrega uma densidade superficial de carga e uma densidade superficial de corrente dada, através do teorema de Stokes: veja texto

$$\begin{aligned} \int_{S \cap \tilde{S}} d\mathbf{x} (\mathbf{t} \times \mathbf{n}_{12}) \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\partial \tilde{S}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\tilde{S}} d\sigma \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\kappa \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\tilde{S}} d\sigma \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{S \cap \tilde{S}} d\mathbf{x} (\mathbf{t} \times \mathbf{n}_{12}) \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\partial \tilde{S}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\tilde{S}} d\sigma \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \kappa \mu_0 \lim_{d \rightarrow 0} \int_{\tilde{S}} d\sigma \cdot \left(\mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \kappa \mu_0 \int_{S \cap \tilde{S}} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{t}. \end{aligned}$$

3.4 Potenciais e transformações de calibre

A solução das equações de Maxwell (3.5-a)-(3.5-d) pode ser drasticamente simplificada pela introdução de *potenciais*. Primeiro, a equação homogênea (3.5-c) é equivalente à existência de um campo vetorial \mathbf{A} tal que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.40)$$

Este campo é chamado o *potencial vetorial*. Substituindo a equação (3.40) na equação homogênea (3.5-b), vem

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.41)$$

3 As equações de Maxwell

o que é equivalente à existência de um campo escalar ϕ tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.42)$$

Este campo é chamado o *potencial escalar*.

Os potenciais \mathbf{A} e ϕ não são unicamente determinados pelos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} . Pelo contrário, outros potenciais \mathbf{A}' e ϕ' podem levar aos mesmos campos, o que será o caso se e somente se eles provêm dos potenciais originais \mathbf{A} e ϕ através de uma *transformação de calibre*

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \kappa \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (3.43)$$

onde χ pode ser uma função arbitrária de t e \mathbf{x} . Esta liberdade pode ser utilizada para submeter os potenciais a condições suplementares apropriadas – um procedimento denominado *escolha de calibre*. As transformações de calibre que ainda são compatíveis com uma dada condição de calibre são chamadas *transformações de calibre residuais*.

As duas escolhas de calibre mais importantes são as seguintes.

- Calibre de Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (3.44)$$

As transformações de calibre residuais são as transformações de calibre (3.43) sujeitas à condição suplementar

$$\Delta\chi = 0. \quad (3.45)$$

- Calibre de Lorentz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{\kappa c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (3.46)$$

As transformações de calibre residuais são as transformações de calibre (3.43) sujeitas à condição suplementar

$$\square\chi \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \Delta\chi = 0. \quad (3.47)$$

No próximo passo, substituímos as equações (3.40) e (3.42), em conjunto com a equação (3.27) e a identidade

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A},$$

nas equações de Maxwell não homogêneas (3.5-a) e (3.5-d), obtendo

$$\Delta\phi + \kappa \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.48)$$

$$\Delta\mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{\kappa c^2} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\kappa \mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.49)$$

3.5 Energia do campo eletromagnético

No calibre de Coulomb, vem

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.50)$$

e

$$\square\mathbf{A} \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} = \kappa\mu_0 \mathbf{j}_t, \quad (3.51)$$

onde

$$\mathbf{j}_t = \mathbf{j} - \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \quad (3.52)$$

(veja a equação (3.27)) é a parte *transversal*, i.e., a parte sem divergência, da densidade de corrente:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_t = 0. \quad (3.53)$$

Esta última relação pode ser demonstrada tomando a divergência da equação (3.51) e substituindo a condição (3.44) ou, ainda, tomando a divergência da equação (3.52) e substituindo a equação (3.50) em conjunto com a lei de conservação da carga (3.1):

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_t = \nabla \cdot \mathbf{j} - \epsilon_0 \Delta \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

A equação (3.50) coincide com a equação correspondente da eletrostática, sendo que a variável tempo aparece apenas como um parâmetro adicional. Portanto, o potencial escalar correspondente ϕ é chamado o *potencial de Coulomb instantâneo*. O calibre de Coulomb é particularmente útil quando $\rho \equiv 0$, pois isto permite escolher $\phi \equiv 0$.

No calibre de Lorentz, vem

$$\square\phi \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.54)$$

$$\square\mathbf{A} \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} = \kappa\mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.55)$$

Neste caso, as equações de Maxwell não homogêneas assumem uma forma particularmente simétrica e simples, tornando-se um sistema de equações de onda não homogêneas e independentes.

3.5 Energia do campo eletromagnético

Nesta seção, queremos estabelecer a equação de balanço para a energia do campo eletromagnético. A filosofia geral subjacente à teoria dos campos requer que a energia do campo eletromagnético seja distribuída continuamente no espaço e possa escoar no espaço – exatamente como a energia de um fluido. Segundo o Capítulo 2, esperamos portanto uma equação de balanço para a energia da forma

$$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}^E = q^E, \quad (3.56)$$

3 As equações de Maxwell

onde ρ^E , j^E e q^E são, respectivamente, a densidade, a densidade de fluxo e a densidade de produção de energia. Sendo o princípio da conservação da energia uma das leis mais fundamentais da física, consubstanciada por inúmeras experiências, o único candidato para q^E é a energia, por unidade de volume e de tempo, que é transferida do campo eletromagnético para um outro sistema físico, durante a interação entre ambos. Essa energia pode ser deduzida da lei de força de Lorentz. Por exemplo, segundo a equação (3.2), o trabalho exercido pelos campos E e B sobre uma carga pontual q entre os instantes t_1 e t_2 é

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \, v \cdot F = q \int_{t_1}^{t_2} dt \, v \cdot E .$$

Note que o campo magnético não exerce trabalho. Para uma distribuição geral de cargas e correntes, obtemos portanto

$$q^E = -j \cdot E , \quad (3.57)$$

onde o sinal negativo expressa o fato de que a energia transferida para a referida distribuição de cargas e correntes corresponde a uma diminuição da energia do campo eletromagnético. Utilizando as equações de Maxwell (3.5-d) e (3.5-b), em conjunto com a identidade

$$\nabla \cdot (E \times B) = (\nabla \times E) \cdot B - E \cdot (\nabla \times B) ,$$

obtemos

$$\begin{aligned} -j \cdot E &= \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{\kappa \mu_0} E \cdot (\nabla \times B) \\ &= \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{\kappa \mu_0} ((\nabla \times E) \cdot B - \nabla \cdot (E \times B)) \\ &= \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{\kappa \mu_0} \nabla \cdot (E \times B) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{\kappa \mu_0} E \times B \right) . \end{aligned}$$

Isto é uma equação de balanço do tipo (3.56), com a densidade de energia

$$\rho^E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (3.58)$$

e a densidade de fluxo de energia

$$j^E = \frac{1}{\kappa \mu_0} E \times B \quad (3.59)$$

idêntico com o tal chamado *vetor de Poynting*, geralmente denotado por S :

$$S = \frac{1}{\kappa \mu_0} E \times B . \quad (3.60)$$

3.5 Energia do campo eletromagnético

Conforme a equação (3.58), a energia de campo U dentro de um volume V se decompõe na soma de uma parte elétrica e de uma parte magnética,

$$U = U^e + U^m , \quad (3.61)$$

com

$$U^e = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \mathbf{E}^2 , \quad (3.62)$$

e

$$U^m = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \mathbf{B}^2 . \quad (3.63)$$

No caso de campos estáticos, a energia de campo pode ser representada de forma diferente, em termos do potencial escalar ϕ e do potencial vetorial \mathbf{A} , onde $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Se ϕ e \mathbf{A} apresentam decaimento suficientemente rápido ao infinito, podemos integrar por partes e assim escrever a energia eletrostática na forma

$$U^e = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \mathbf{E}^2 = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x \mathbf{E} \cdot \nabla\phi = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x (\nabla \cdot \mathbf{E}) \phi ,$$

ou seja,

$$U^e = \frac{1}{2} \int d^3x \rho \phi , \quad (3.64)$$

e a energia magnetostática na forma

$$U^m = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \mathbf{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} ,$$

ou seja,

$$U^m = \frac{\kappa}{2} \int d^3x \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} . \quad (3.65)$$

Se as cargas e as correntes se decompõem em duas partes, conforme

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 , \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 , \quad (3.66)$$

então devido à linearidade das equações de Maxwell, os campos por elas gerados também se decompõem em duas partes, conforme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 , \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 . \quad (3.67)$$

O mesmo vale para os potenciais:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 , \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 . \quad (3.68)$$

3 As equações de Maxwell

Como exemplo típico, imaginamos que ρ_1, j_1 e ρ_2, j_2 estejam localizadas em regiões disjuntas e distantes V_1 e V_2 , respectivamente. Neste caso, obtemos das equações (3.62) e (3.63)

$$U^e = U_1^e + U_2^e + U_{12}^e, \quad (3.69)$$

e

$$U^m = U_1^m + U_2^m + U_{12}^m, \quad (3.70)$$

onde

$$U_1^e = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x E_1^2, \quad U_2^e = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x E_2^2, \quad (3.71)$$

$$U_{12}^e = \epsilon_0 \int d^3x E_1 \cdot E_2, \quad (3.72)$$

e

$$U_1^m = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x B_1^2, \quad U_2^m = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3x B_2^2, \quad (3.73)$$

$$U_{12}^m = \frac{1}{\mu_0} \int d^3x B_1 \cdot B_2. \quad (3.74)$$

No caso estático, podemos reescrever estas expressões na forma

$$U_1^e = \frac{1}{2} \int d^3x \rho_1 \phi_1, \quad U_2^e = \frac{1}{2} \int d^3x \rho_2 \phi_2, \quad (3.75)$$

$$U_{12}^e = \int d^3x \rho_1 \phi_2 = \int d^3x \rho_2 \phi_1, \quad (3.76)$$

e

$$U_1^m = \frac{\kappa}{2} \int d^3x j_1 \cdot A_1, \quad U_2^m = \frac{\kappa}{2} \int d^3x j_2 \cdot A_2, \quad (3.77)$$

$$U_{12}^m = \kappa \int d^3x j_1 \cdot A_2 = \kappa \int d^3x j_2 \cdot A_1. \quad (3.78)$$

Assim, vemos que tanto a energia elétrica como a energia magnética são compostas de três contribuições: das *auto-energias* das duas distribuições de cargas e correntes e da *energia de interação* que leva em conta as forças que cada uma delas exerce sobre a outra; de fato, as expressões (3.76) e (3.78) se mostram particularmente úteis para discutir as forças exercidas por campos eletromagnéticos. Concluimos, portanto, que a energia elétrica e a energia magnética *não são aditivas*, i.e., a energia da distribuição total não é igual à soma das energias das duas distribuições parciais, sendo que esta deve ser complementada pela energia de interação, como termo de interferência.

Uma idéia que decorre naturalmente dessa discussão seria considerar a expressão

$$\tilde{\rho}^E = \frac{1}{2}(\rho\phi + \kappa j \cdot A) \quad (3.79)$$

como uma nova “densidade de energia”, já que ela leva à mesma energia total que a densidade de energia ρ^E introduzida anteriormente. Contudo, existe uma série de motivos para afirmar que a expressão ρ^E é mais adequada do que a expressão $\tilde{\rho}^E$:

3.5 Energia do campo eletromagnético

1. Ao contrário de ρ^E , $\tilde{\rho}^E$ fornece a energia total do campo eletromagnético apenas no caso estático.
2. Ao contrário de ρ^E , $\tilde{\rho}^E$ não é invariante sob transformações de calibre (3.43) dos potenciais, que deixam os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} invariantes.
3. Ao contrário de ρ^E , $\tilde{\rho}^E$ não é positiva (semi-) definida.
4. Ao contrário de ρ^E , $\tilde{\rho}^E$ se anula quando $\rho = 0$ e $\mathbf{j} = 0$. Em outras palavras, se $\tilde{\rho}^E$ fosse a expressão correta, a energia do campo eletromagnético seria localizada exclusivamente em regiões onde há cargas e correntes, o que certamente não é compatível com a realidade que observamos. Por exemplo, todos nós sentimos, quase diariamente e literalmente na pele, as consequências do transporte de energia por radiação eletromagnética propagando no vácuo, do sol para a terra.

De forma geral, observa-se que a equação de balanço por si só é insuficiente para determinar a densidade de energia e a densidade de fluxo de energia. De fato, dado campos vetoriais \mathbf{C} e \mathbf{F} arbitrários, temos que

$$\tilde{\rho}^E = \rho^E + \nabla \cdot \mathbf{C} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{j}}^E = \mathbf{j}^E - \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{F} \quad (3.80)$$

satisfarão à mesma equação de balanço que ρ^E e \mathbf{j}^E . Ademais, se \mathbf{C} apresentar decaimento suficientemente rápido ao infinito, as duas densidades resultam na mesma energia total:

$$\int d^3x \tilde{\rho}^E = \int d^3x \rho^E. \quad (3.81)$$

E mesmo quando fixarmos a densidade de energia, a densidade de fluxo de energia ainda não será unicamente determinada, pois o termo adicional $\nabla \times \mathbf{F}$ permanece livre. Frisa-se que este termo adicional contribui como termo de bordo apenas quando integrarmos sobre superfícies abertas, pois a equação (3.80), com $\mathbf{C} = 0$, implica que para qualquer superfície S , vale

$$\int_S d\sigma \cdot \tilde{\mathbf{j}}^E - \int_S d\sigma \cdot \mathbf{j}^E = \int_S d\sigma \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \int_{\partial S} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F},$$

e esta integral se anula trivialmente quando S for fechada. De fato, devido à equação de balanço, o fluxo de energia através do bordo de um volume já é determinado por ρ^E e \mathbf{j}^E , enquanto que o fluxo de energia através de uma superfície S aberta depende explicitamente de \mathbf{F} .

Apesar de todas as dificuldades, a questão de quais são as expressões corretas para a densidade e a densidade de fluxo de energia do campo eletromagnético deve ser decidida no laboratório, já que ρ^E e \mathbf{j}^E são quantidades mensuráveis, mesmo que os procedimentos experimentais para sua determinação sejam mais difíceis do que no caso da densidade de carga ρ e de corrente \mathbf{j} , onde desde o princípio não há dúvidas quanto à corretude de sua definição. O resultado é que as expressões corretas para ρ^E e \mathbf{j}^E são dadas pelas fórmulas (3.58) e (3.59): além de serem simples e naturais, mesmo após generalização ao âmbito da relatividade geral, elas passaram todos os testes experimentais.

3.6 Momento e momento angular do campo eletromagnético

Para o momento e o momento angular do campo eletromagnético, esperamos equações de balanço da forma

$$\frac{\partial \rho_i^P}{\partial t} + \nabla_k j_{ik}^P = f_i, \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial \rho_i^L}{\partial t} + \nabla_k j_{ik}^L = t_i, \quad (3.83)$$

onde ρ_i^P/ρ_i^L e j_{ik}^P/j_{ik}^L são, respectivamente, a densidade do i -ésimo componente do momento/momento angular e o k -ésimo componente da densidade de fluxo do i -ésimo componente do momento/momento angular do campo eletromagnético, enquanto que f_i/t_i denota o i -ésimo componente da densidade de força/torque.

Tratemos primeiro da equação de balanço para o momento. O lado direito da equação (3.82) é dado pela lei de força de Lorentz (3.3):

$$f_i = -\rho E_i - \kappa \epsilon_{ikl} j_k B_l. \quad (3.84)$$

Novamente, o sinal negativo expressa o fato de que o momento transferido para a distribuição de cargas e correntes corresponde a uma diminuição do momento do campo eletromagnético. Utilizando todas as equações de Maxwell e após manipulações semelhantes às executadas no caso do balanço de energia, chegamos às expressões

$$\rho_i^P = \kappa \epsilon_0 \epsilon_{ikl} E_k B_l \quad (3.85)$$

para a densidade de momento e

$$j_{ik}^P = \epsilon_0 \left(\frac{1}{2} E^2 \delta_{ik} - E_i E_k \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} B^2 \delta_{ik} - B_i B_k \right) \quad (3.86)$$

para a densidade de fluxo de momento; esta é - a menos de um sinal - idêntica ao *tensor de estresse de Maxwell*, geralmente denotado por T :

$$T_{ik} = \epsilon_0 \left(E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_k - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ik} \right). \quad (3.87)$$

Obviamente, a densidade de momento do campo eletromagnético é - a menos de um fator $1/c^2$ - idêntica à sua densidade de fluxo de energia, ou seja, ao vetor de Poynting (veja a equação (3.60)), enquanto que a densidade de fluxo de momento, conforme explicado no Capítulo 2, pode ser interpretada como um tensor de pressão. Portanto, o tensor de estresse de Maxwell descreve, para cada volume V , o momento do campo eletromagnético entrando em V , ou seja, a força total de pressão \mathbf{F} que o campo eletromagnético exerce sobre V :

$$F_i = \int_{\partial V} d\sigma_k T_{ik} = \int_V d^3x \nabla_k T_{ik}. \quad (3.88)$$

3.6 Momento e momento angular do campo eletromagnético

Qualitativa e intuitivamente, as forças exercidas pelo campo eletromagnético podem ser deduzidas de desenhos de linhas de campo, atribuindo às linhas de campo a tendência geral de se encurtar e de se repelir mutuamente.

Como exemplo elementar, consideremos um campo elétrico ou magnético homogêneo e estático, paralelo ao eixo 3, dentro de um volume V . Temos então $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_3$ (e $\mathbf{B} = 0$) ou $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$ (e $\mathbf{E} = 0$) e portanto

$$T_{ik} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad T_{ik} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Isto significa que ao longo do eixo 1 e do eixo 2, i.e., transversalmente às linhas de campo, há momento saindo do volume V , enquanto que ao longo do eixo 3, i.e., ao longo das linhas de campo, há momento entrando no volume V , ou seja, observamos forças agindo sobre o volume V que exercem tração ao longo das linhas de campo e pressão transversalmente às linhas de campo. (Veja Fig. 3.5.)

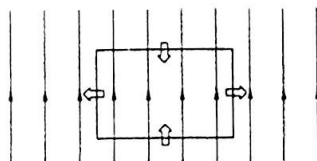


Fig. 3.5: Forças exercidas pelo campo eletromagnético sobre um volume: tração ao longo das linhas de campo, pressão transversalmente às linhas de campo

Uma propriedade notável da expressão para a densidade de fluxo de momento encontrada na equação (3.86) é sua simetria:

$$j_{ik}^P = j_{ki}^P. \quad (3.89)$$

Como foi demonstrado no Capítulo 2, esta simetria permite satisfazer a equação de balanço para o momento angular pondo

$$t_i = \epsilon_{ijl} x_j f_l. \quad (3.90)$$

$$\rho_i^L = \epsilon_{ijl} x_j \rho_l^P, \quad (3.91)$$

$$j_{ik}^L = \epsilon_{ijl} x_j j_{lk}^P, \quad (3.92)$$

São estas as expressões esperadas em qualquer teoria onde os campos carregam apenas momento angular orbital, sem momento angular próprio. Aqui, no entanto, o resultado surpreende, pois – falando na linguagem da teoria quântica – o fóton tem spin 1 e portanto possui um momento angular próprio, com módulo \hbar . Se, por

3 As equações de Maxwell

outro lado, a equação (3.83), em conjunto com as equações (3.90)–(3.92) (e (3.84)–(3.86)) fosse apenas a equação de balanço para a parte orbital do momento angular e se a equação de balanço para o momento angular total fosse outra, teríamos para o campo eletromagnético duas quantidades diferentes e separadamente conservadas com a natureza de um momento angular, o que seria difícil de entender.

De qualquer modo, coloca-se a questão se a densidade e a densidade de fluxo de momento e de momento angular para o campo eletromagnético são realmente dadas pelas equações (3.85), (3.84) e (3.91), (3.92), pois como já observamos no caso da energia, estas quantidades não são determinadas unicamente pela equação de balanço. De fato, dado campos tensoriais C_{ik} e F_{ikl} arbitrários, sujeitos apenas à condição de antisimetria $F_{ikl} + F_{ilk} = 0$, temos que

$$\hat{\rho}_i = \rho_i + \nabla_k C_{ik} \quad \text{e} \quad \hat{j}_{ik} = j_{ik} - \frac{\partial C_{ik}}{\partial t} + \nabla_l F_{ikl} \quad (3.93)$$

satisfarão à mesma equação de balanço que ρ_i e j_{ik} . E mesmo quando fixarmos a densidade, a densidade de fluxo ainda não será unicamente determinada, pois o termo adicional $\nabla_l F_{ikl}$ permanece livre. Novamente, este termo adicional contribui como termo de bordo apenas quando integrarmos sobre superfícies abertas, pois a equação (3.93), com $C_{ik} = 0$, implica que para qualquer superfície S ,

$$\int_S d\sigma_k \hat{j}_{ik} - \int_S d\sigma_k j_{ik} = \int_S d\sigma_k \nabla_l F_{ikl} = \int_{\partial S} dx_m F_{im} ,$$

onde $F_{im} = \frac{1}{2} \epsilon_{mkl} F_{ikl}$, e esta integral se anula trivialmente quando S for fechada. Em particular, a pressão exercida sobre uma superfície depende de F_{ikl} quando esta for aberta, mas não quando for fechada.

Como no caso da energia, a questão de quais são as expressões corretas para a densidade e a densidade de fluxo de momento e de momento angular do campo eletromagnético deve ser decidida no laboratório. As expressões dadas acima passaram este teste.

APLICAÇÕES ENTRE ESPAÇOS DE BANACH QUE PRESERVAM CONVERGÊNCIA DE SÉRIES

Mário C. Matos

IMECC, UNICAMP, Caixa postal 6065, CEP 13081-970

Campinas, S. P., Brasil

RESUMO

Sabemos que uma série numérica é absolutamente convergente, se, e só se, ela é incondicionalmente convergente. Um resultado de Dvoretzky e Rogers, datado de 1950, mostrou que, em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, existem séries que são incondicionalmente convergentes mas não são absolutamente convergentes. Tal resultado desencadeou o desenvolvimento da chamada Teoria de Operadores Lineares Absolutamente Somantes, que estuda aplicações lineares entre espaços de Banach, levando seqüências incondicionalmente somáveis em seqüências absolutamente somáveis. A teoria não linear teve início com Pietsch em 1983, que apresentou alguns resultados para aplicações n -lineares e polinômios n -homogêneos definidos em espaços de Banach com valores escalares. As aplicações analíticas f entre espaços de Banach, tais que $(f(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é absolutamente somável, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável, começaram a ser investigadas por Matos numa sucessão de palestras em Seminários Brasileiros de Análise. Esses resultados apareceram publicados por esse autor, em 1996, num artigo das Atas da Academia Brasileira de Ciências. No Quadragésimo Sexto Seminário Brasileiro de Análise, em 1997, Matos publicou um artigo abordando aplicações f entre espaços de Banach, não necessariamente analíticas, tais que $(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty}$ é absolutamente somável, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável. Nosso mini-curso, neste Quinquagésimo Seminário Brasileiro de Análise, além de apresentar os resultados conhecidos de 96 e 97, inclui novos teoremas e apresenta uma caracterização interessante das aplicações f , entre espaços de Banach, que são regularmente somantes, isto é, aquelas para as quais $(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty}$ é absolutamente somável, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é absolutamente somável.

APLICAÇÕES ENTRE ESPAÇOS DE BANACH QUE PRESERVAM CONVERGÊNCIA DE SÉRIES

Mário C. Matos

IMECC, UNICAMP, Caixa postal 6065, CEP 13081-970

Campinas, S. P., Brasil

1. INTRODUÇÃO

Nas disciplinas de Cálculo e Análise aprendemos que uma série numérica é absolutamente convergente, se, e somente se, ela é incondicionalmente convergente. O resultado correspondente para séries de elementos de um espaço de Banach não é verdadeiro. Antes de apresentar um contra-exemplo, recordemos os conceitos envolvidos. Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), com uma norma $\|\cdot\|$.

1.1. Definição - Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ de elementos de E é denominada *absolutamente convergente* (somável), se a série numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \|a_n\|$ é convergente (somável).

1.2. Definição - Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ de elementos de E é denominada *incondicionalmente convergente* (somável), se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\pi(n)}$ é convergente (somável), para cada bijeção π de \mathbb{N} sobre \mathbb{N} .

Pelo Critério de Cauchy, se E for um espaço de Banach, podemos garantir que toda série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, de elementos de E , que é absolutamente convergente, tem que ser conver-

gente. Portanto, pelo resultado do Cálculo, temos $\sum_{n=1}^{+\infty} \|a_{\pi(n)}\| < +\infty$, para cada aplicação

bijetora π de \mathbb{N} sobre \mathbb{N} . O Critério de Cauchy implica que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\pi(n)}$ converge. Isto mostra que *toda série absolutamente convergente de elementos de um espaço de Banach é incondicionalmente convergente*.

1.3. Exemplo - Seja c_0 o espaço vetorial das seqüências de escalares $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ convergentes a 0, que é um espaço de Banach sob a norma

$$\|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|.$$

Se $n \in \mathbb{N}$, seja ϵ_n a seqüência $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, com 1 situado na n -ésima posição. Designemos por v a seqüência $\left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$, que pertence a c_0 . Seja π uma bijeção de \mathbb{N} sobre si mesmo. Dado $\epsilon > 0$, existe n_ϵ natural, tal que

$$n \geq n_\epsilon \implies \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Temos $1 = \pi(j_1), 2 = \pi(j_2), \dots, n_\epsilon = \pi(j_{n_\epsilon})$. Portanto,

$$j \geq \max\{j_1, \dots, j_{n_\epsilon}\} \implies \left\| \sum_{k=1}^j \frac{1}{\pi(k)} e_{\pi(k)} - v \right\|_\infty < \epsilon.$$

Isto mostra que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi(k)} e_{\pi(k)}$ converge a v . Portanto, a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e_k$ é incondicionalmente convergente. É claro que tal série não é absolutamente convergente.

Durante algum tempo conjecturou-se que em *qualquer* espaço de Banach de dimensão infinita deveria existir uma série incondicionalmente convergente, mas não absolutamente convergente. Em 1950, A. Dvoretzky e C. A. Rogers provaram que essa conjectura é verdadeira (vide [4]). A. Grothendieck, num artigo publicado em São Paulo, em 1956 ([5]), além de dar uma prova diferente do resultado de Dvoretzky-Rogers, introduziu os operadores semi-integrais à direita, agora chamados absolutamente somantes, entre espaços de Banach.

1.4. Definição - Um operador linear T , definido em um espaço de Banach E , com valores em outro espaço de Banach F , é denominado *absolutamente somante*, se $(T(x_j))_{j=1}^\infty$ é absolutamente convergente, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty$ é incondicionalmente convergente em E .

No mesmo artigo de 1956, Grothendieck provou um teorema, reformulado magistralmente por J. Lindenstrauss e A. Pelczyński em 1968 ([7]), mostrando que todo operador linear contínuo de l_1 em l_2 é absolutamente somante. Os operadores absolutamente (p, q) -somantes, para $p, q \in]0, +\infty[$, começaram a ser estudados e desenvolvidos, em meados dos anos sessenta, por A. Pietsch ([12]), B. S. Mitjagin e A. Pelczyński ([10]). Antes de enunciar esse conceito, vamos introduzir algumas notações, que serão úteis também para a nossa teoria posterior.

De agora em diante, E e F indicarão espaços de Banach sobre \mathbb{K} e A um aberto não vazio em E .

1.5. Definição - Seja $p \in]0, +\infty[$. Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^\infty$ de elementos de E é *absolutamente p -somável*, e escreve-se $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_p(E)$, quando

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p := \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

1.6. Definição - Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^\infty$ de elementos de E é *fracamente absolutamente p -somável*, e escreve-se $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_p^w(E)$, quando $\langle x', x_n \rangle_{n=1}^\infty \in l_p(\mathbb{K}) = l_p$, para cada x' no dual topológico E' de E .

Se $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_p^w(E)$, uma aplicação do Teorema de Banach-Steinhaus garante que

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} := \sup_{\|x'\| \leq 1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x', x_n \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

1.7. Definição - Uma sequência fracamente p -somável $(x_n)_{n=1}^\infty$ de elementos de E é incondicionalmente p -somável, e escreve-se $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_p^u(E)$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} = 0$.

Para justificar a nomenclatura acima, notemos que, no caso $p = 1$, tal definição é equivalente a pedir que $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ seja convergente em E , para cada bijeção π de \mathbb{N} sobre si mesmo.

1.8. Definição - Sejam $p, q \in]0, +\infty[$. Uma aplicação linear T de E em F é absolutamente (p, q) -somante, se $(T(x_n))_{n=1}^\infty \in l_q(F)$, sempre que $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_p^u(E)$. Se $p = q$, diz-se que T é absolutamente p -somante (absolutamente somante, no caso $p = 1$).

A teoria de tais operadores lineares teve um desenvolvimento muito grande, após os resultados iniciais de Pietsch, Mitjagin e Pelczyński, acima mencionados. O livro de Diestel, Jarchow e Tonge [3] é um excelente manual para consulta sobre tal teoria. Não devemos esquecer também o livro de Pietsch [13] e o de Defant e Floret [2].

A teoria não linear começou a ser considerada por Pietsch [14], em 1983, que considerou aplicações multilineares e polinomiais sobre espaços de Banach, com valores escalares, apresentando alguns resultados iniciais interessantes. Em 1996, este autor (vide Matos [8]) apresenta os primeiros resultados envolvendo aplicações holomorfas absolutamente (p, q) -somantes entre espaços de Banach, resultantes de uma sequência de artigos, apresentados em anos anteriores, em diversos Seminários Brasileiros de Análise. Em 1997, no Quadragésimo Sexto Seminário Brasileiro de Análise, este autor apresentou novos resultados envolvendo aplicações absolutamente p -somantes, não necessariamente holomorfas ou analíticas, entre espaços de Banach.

Neste mini-curso, além de apresentar novos resultados sobre aplicações não lineares absolutamente (p, q) -somantes entre espaços de Banach, apresentamos uma caracterização das aplicações, por nós denominadas regularmente (p, q) -somantes, que levam sequências absolutamente q -somáveis de um espaço de Banach em sequências absolutamente p -somáveis de outro espaço de Banach.

2. APLICAÇÕES REGULARMENTE SOMANTES

Usaremos os símbolos E e F para designar espaços de Banach sobre \mathbb{K} e A para indicar um subconjunto aberto não vazio de E .

2.1. Definição - Sejam $p, q \in]0, +\infty[$. Uma aplicação f de A em F é denominada regularmente (p, q) -somante no ponto $a \in A$ se, para cada sequência $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_q(E)$, com $a + x_j \in A$, para cada $j \in \mathbb{N}$, tem-se $(f(a + x_j) - f(a))_{j=1}^\infty \in l_p(F)$. Se f for regularmente (p, q) -somante em cada ponto de A , diz-se que f é regularmente (p, q) -somante sobre A .

No caso em que $p = q$, diz-se que f é *regularmente p -somante* (*regularmente somante*, se $p = 1$) sobre A .

2.2. Definição - Seja r um número real estritamente positivo. Um aplicação f de A em F é chamada *r -regular no ponto $a \in A$* , se existem $M > 0$ e $\delta > 0$, tais que $\overline{B}_\delta(a) \subset A$ e $\|f(a+x) - f(a)\|^r \leq M\|x\|$, para cada $x \in \overline{B}_\delta(0)$. Diz-se que f é *r -regular sobre A* se f for r -regular em cada ponto de A . No caso em que $r = 1$, diz-se que f é *regular sobre A* .

A demonstração da proposição seguinte é imediata.

2.3. Proposição - Um aplicação f de A em F , que é r -regular num ponto $a \in A$, é regularmente (p, q) -somante no ponto a , sempre que $p = qr$.

2.4. Exemplos

1. Todo operador linear contínuo T de E em F é regular (portanto, regularmente p -somante, para cada $p \in]0, +\infty[$) sobre E , pois

$$\|T(a+x) - T(a)\| = \|T(x)\| \leq \|T\|\|x\| \quad \forall x \in E.$$

2. Todo polinômio n -homôgeneo contínuo de E em F é regular (portanto, regularmente p -somante, para cada $p \in]0, +\infty[$) sobre E .

Lembremos que $P : E \rightarrow F$ é um polinômio n -homôgeneo, se existe uma aplicação n -linear $T : E^n \rightarrow F$, tal que $P(x) = T(x, \dots, x)$, para cada $x \in E$. Neste caso costumamos escrever que $P = \hat{T}$. Por outro lado, dado um polinômio n -homôgeneo P de E em F , podemos considerar

$$\hat{P}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \dots \epsilon_n P(\epsilon_1 x_1 + \dots \epsilon_n x_n),$$

que define uma aplicação n -linear simétrica de E^n em F , tal que $\hat{\hat{P}} = P$. Podemos ver que

$$P(a+x) - P(a) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \hat{P} a^{n-k} x^k,$$

onde $\hat{P} a^{n-k} x^k = \hat{P}(a, \dots, a, x, \dots, x)$, com a repetido $n-k$ vezes e x repetido k vezes. A correspondência $P \longleftrightarrow \hat{P}$ estabelece um isomorfismo entre o espaço vetorial dos polinômios n -homôgeneos e o espaço vetorial das aplicações n -lineares simétricas. Além disso, P é contínuo se, e só se, \hat{P} é contínuo, com

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\| \leq \|\hat{P}\| = \sup_{\|x_j\| \leq 1} \|\hat{P}(x_1, \dots, x_n)\| \leq \frac{n^n}{n!} \|P\|.$$

Neste caso, podemos escrever

$$\|P(a+x) - P(a)\| \leq \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \|\hat{P}\| \|a\|^{n-k} \|x\|^k \leq \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \|\hat{P}\| \|a\|^{n-k} \right) \|x\|,$$

para todo $\|x\| \leq 1$. Isto mostra que P é regular em cada ponto $a \in E$.

3. Toda aplicação analítica de A em F é regular (portanto, regularmente p -somante, para cada $p \in]0, +\infty[$) sobre A .

Recordemos: Uma aplicação $f : A \rightarrow F$ é analítica no ponto $a \in A$, se existem $r > 0$ e uma seqüência $(P_n)_{n=1}^\infty$ de polinômios n -homôgeneos contínuos P_n , tais que $B_r(a) \subset A$ e

$$f(a+x) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n(x) \quad (\forall x \in B_r(0)).$$

Neste caso, graças a uma fórmula do tipo Chauchy-Hadamard, sabemos que existem $C > 0$ e $c > 0$, tais que $\|P_n\| \leq Cc^n$, para todo n natural. Portanto, para $\|x\| \leq \frac{1}{2c}$, obtemos

$$\|f(a+x) - f(a)\| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|P_n\| \|x\|^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} Cc^n \|x\|^n \leq Cc2\|x\|.$$

Isso mostra que f é regular em a .

4. Se $f : A \rightarrow F$ é diferenciável no sentido de Fréchet em cada ponto de A e sua diferencial $df : A \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ é localmente limitada sobre A , então, f é regular (portanto, regularmente p -somante, para cada $p \in]0, +\infty[$) sobre A . Aqui $\mathcal{L}(E; F)$ indica o espaço vetorial dos operadores lineares contínuos de E em F munido com a norma natural: $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|$, para cada $T \in \mathcal{L}(E; F)$.

Para cada $a \in A$ fixado, existem $M > 0$ e $r > 0$, tais que $\|df(x)\| \leq M$, para cada $x \in B_r(a)$. O Teorema da Desigualdade do Valor Médio garante que, para cada $\|x\| \leq r$, temos

$$\|f(a+x) - f(a)\| \leq \sup_{|t| \leq 1} \|df(a+tx)\| \|x\| \leq M\|x\|.$$

Isso mostra que f é regular em a .

5. Dado $r > 0$, a função $f(x) = x^{1/r}$ é r -regular (portanto, regularmente (qr, q) -somante, para cada $q \in]0, +\infty[$) sobre $]0, +\infty[$. Use o Teorema do Valor Médio.

6. Todos os exemplos anteriores foram de aplicações diferenciáveis. A função $f(x) = x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$, para $x \neq 0$, $f(0) = 0$, é uma função regular na origem, que não é derivável nesse ponto.

2.5. Teorema - Sejam $p, q \in]0, +\infty[$. Uma aplicação f de A em F é regularmente (p, q) -somante no ponto a de A se, e só se, f é (p/q) -regular em a .

Demonstração - Uma implicação é a Proposição 2.3, cuja demonstração é trivial. Vamos, então, supor que f é regularmente (p, q) -somante no ponto a , mas não é (p/q) -regular nesse ponto. Se $g(x) = f(a+x) - f(a)$, para $x \in A - a = \{y \in E; y+a \in A\}$, vemos que $g(0) = 0$, g é regularmente (p, q) -somante no ponto 0 e g não é (p/q) -regular em 0. Assim, sem perda de generalidade, podemos começar pensando que $0 \in A$, $a = 0$ e $f(a) = 0$. Seja $\rho > 0$, tal que $B_\rho(0) \subset A$. Podemos achar, para cada $j \in \mathbb{N}$, um $x_j \in E$, tal que $\|x_j\|^q < \frac{\rho}{j^3}$ e

$\|f(x_j)\|^p > j\|x_j\|^q$. Como $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_q(E)$, obtemos $\sum_{j=1}^{+\infty} \|f(x_j)\|^p < +\infty$. Portanto,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j\|x_j\|^q \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \|f(x_j)\|^p < +\infty.$$

Observação: se $(k_j)_{j=1}^{\infty}$ for uma seqüência de naturais tal que $\sum_{j=1}^{+\infty} k_j \|x_j\|^q < +\infty$, então.

$\sum_{j=1}^{+\infty} k_j \|f(x_j)\|^p < +\infty$. No nosso caso, temos

$$\sum_{j=1}^{+\infty} k_j \|x_j\|^q < +\infty \implies \sum_{j=1}^{+\infty} j k_j \|x_j\|^q \left(\leq \sum_{j=1}^{+\infty} k_j \|f(x_j)\|^p \right) < +\infty.$$

Agora, aplicando a observação acima, com $j k_j$ substituindo k_j , obtemos

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j k_j \|x_j\|^q < +\infty \implies \sum_{j=1}^{+\infty} j k_j \|f(x_j)\|^p < +\infty.$$

Finalmente, podemos escrever que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j^2 k_j \|x_j\|^q \left(\leq \sum_{j=1}^{+\infty} j k_j \|f(x_j)\|^p \right) < +\infty,$$

sempre que $\sum_{j=1}^{+\infty} k_j \|x_j\|^q < +\infty$. Escolhamos

$$k_j = \left\lfloor \frac{1}{j^2 \|x_j\|^q} \right\rfloor := \sup \left\{ m \in \mathbb{N}; m \leq \frac{1}{j^2 \|x_j\|^q} \right\},$$

para cada j natural. Como temos

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{1}{j^2 \|x_j\|^q} \right\rfloor \|x_j\|^q \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} < +\infty,$$

devemos ter

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j^2 \left\lfloor \frac{1}{j^2 \|x_j\|^q} \right\rfloor \|x_j\|^q < +\infty \quad (*)$$

Mas,

$$\frac{1}{j^2 \|x_j\|^q} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{j^2 \|x_j\|^q} \right\rfloor \leq \frac{1}{j^2 \|x_j\|^q}$$

e, multiplicando por $j^2 \|x_j\|^q$,

$$1 - j^2 \|x_j\|^q \leq \left\lfloor \frac{1}{j^2 \|x_j\|^q} \right\rfloor j^2 \|x_j\|^q \leq 1 \quad (**)$$

Lembremos que x_j foi escolhido de modo a satisfazer $j^2 \|x_j\|^q \leq \frac{\rho}{j}$. Agora, tomando o limite em (**), para j tendendo ∞ , obtemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{1}{j^2 \|x_j\|^q} \right\rfloor j^2 \|x_j\|^q = 1,$$

que contradiz (*). \square

Conforme teremos oportunidade de mostrar na próxima secção, este resultado tem conseqüências na teoria das aplicações absolutamente (p, q) -somantes.

2.6. Exemplo - Não é verdade que uma aplicação regular f num ponto a seja localmente Lipschitziana nesse ponto. Dizemos que f , definida em A , com valores em F , é *localmente Lipschitziana* em $a \in A$, se existem $M > 0$ e $\delta > 0$, tais que $B_\delta(a) \subset A$ e

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\| \quad \forall x, y \in B_\delta(a).$$

Notemos que, se $E = \mathbb{R}$, podemos escrever que, para cada $x \in B_{\frac{\delta}{2}}(a)$ fixado, vale

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|}{|x - y|} \leq M \quad \forall y \in B_{\frac{\delta}{2}}(x).$$

Portanto, se supomos ainda que f é derivável em cada $x \neq a$, as desigualdades acima mostram que $\|f'(x)\| \leq M$, para cada $x \in B_{\frac{\delta}{2}}(a), x \neq a$. A função f do exemplo 2.4.6 é regular na origem, tem derivada em cada ponto $x \neq 0$, mas não podemos ter $\|f'(x)\| \leq M$, para cada $x \in B_r(0), x \neq 0$, seja qual for o valor que escolhemos para $r > 0$. Logo essa função não pode ser localmente Lipschitziana na origem.

3. APLICAÇÕES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

Vamos começar com a noção de aplicação absolutamente (p, q) -somante, que é mais geral que aquela usada nos artigos de Pietsch [14] e de Matos [8].

3.1. Definição - Dados $p, q \in]0, \infty[$, diz-se que uma aplicação f de A em F é *absolutamente (p, q) -somante no ponto $a \in A$* se $(f(a + x_j) - f(a))_{j=1}^\infty \in l_p(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_q^u(E)$ e $a + x_j \in A$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Se f for absolutamente (p, q) -somante em cada $a \in A$, diz-se que f é *absolutamente (p, q) -somante sobre A* . No caso em que $p = q$ diz-se que f é *absolutamente p -somante (somante, se $p = 1$) sobre A* .

Notemos que se $a \in A$, o conjunto $A - a := \{b - a; b \in A\}$ é aberto em E e $0 \in A - a$. É fácil verificar que se $f_a(x) := f(a + x) - f(a)$, para $x \in A - a$, então, f é absolutamente (p, q) -somante em a se, e só se, f_a é absolutamente (p, q) -somante na origem. Em particular, se f for linear, $f = f_a$, para todo $a \in E$, e podemos afirmar que, se f é absolutamente (p, q) -somante na origem, então, f é absolutamente (p, q) -somante sobre E . O próximo exemplo mostra que não se pode esperar comportamento semelhante para aplicações não lineares.

3.2. Exemplo - Se E tem dimensão infinita, $x' \in E'$, $x' \neq 0$, consideremos um polinômio contínuo 2-homogêneo P de E em si mesmo, dado por $P(x) = \langle x', x \rangle x$, para todo $x \in E$. Para cada $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_p^u(E)$ e cada $a \in E$, existe $M \geq 0$, satisfazendo $\|a + x_j\| \leq M$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Se a está no núcleo $\ker(x')$ de x' , temos

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|P(a + x_j) - P(a)\|^p = \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle x', x_j \rangle|^p \|a + x_j\|^p \leq M^p \sum_{j=1}^{+\infty} |\langle x', x_j \rangle|^p < +\infty.$$

Isto mostra que P é absolutamente p -somante em cada ponto do núcleo de x' . Por outro lado, se $b \notin \ker(x')$, temos

$$P_b = \langle x', \cdot \rangle b + \langle x', b \rangle id_E + P.$$

Como P and $\langle x', \cdot \rangle b$ são absolutamente p -somantes em 0, segue que P_b é absolutamente p -somante em 0 se, e só se, id_E é absolutamente p -somante em 0. Mas, como E é de dimensão infinita, id_E não pode ser absolutamente p -somante em 0. Portanto, P não é absolutamente p -somante em b . Assim, podemos dizer que P não é absolutamente p -somante sobre qualquer subconjunto aberto não vazio de E . Um raciocínio análogo mostra que a diferencial de Fréchet $dP(b)$ de P num ponto $b \notin \ker(x')$ não pode ser absolutamente p -somante sobre E .

Em 1989, durante uma palestra realizada num Simpósio organizado em Campinas, por ocasião da entrega do Título de Professor Honorário da UNICAMP a Leopoldo Nachbin, o conceito de aplicação holomorfa absolutamente somante entre espaços de Banach complexos foi apresentado por este autor. Nessa palestra, uma aplicação holomorfa f de E em F era considerada absolutamente somante se, para cada seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_1^u(E)$, fosse verdade que $(f(x_j))_{j=1}^\infty \in l_1(F)$. Em termos da definição 3.1 acima, aquele conceito significava que $f(0) = 0$ e f era absolutamente somante em 0 $\in E$. É claro que eu havia privilegiado o comportamento de f na origem de E . O exemplo 3.2, também apresentado na época, indicava que aquela definição não levava à possibilidade de consideração de um tipo de holomorfia absolutamente somante. Naquela ocasião Richard Aron sugeriu a definição 3.1, com $p = q = 1$. Concordei com sua sugestão, mas preferi, antes de examinar o caso mais geral, explorar e entender melhor o conceito privilegiador da origem. Assim é que os resultados aparecidos em diversos Seminários Brasileiros de Análise e em Matos [8], são todos relativos a esse conceito mais restrito. O artigo Matos [9], publicado em 1997, no Quadragésimo Sexto Seminário Brasileiro de Análise, usa o conceito mais geral, dá o devido crédito a Richard Aron e permite a consideração do tipo absolutamente p -somante de holomorfia.

Notemos que $\|\cdot\|_{w,q}$ define uma norma, se $q \geq 1$, ou uma q -norma, se $0 < q < 1$, sobre $l_q^u(E)$. Por outro lado, $\|\cdot\|_p$ define uma norma, se $p \geq 1$, ou uma p -norma, se $0 < p < 1$, sobre $l_p(F)$. Em qualquer dos casos citados obtemos um espaço vetorial topológico metrizável completo. Notemos ainda que, para cada $a \in A$,

$$V_{q,A}(a) := \{(x_j)_{j=1}^\infty \in l_q^u(E); a + x_j \in A, \forall j \in \mathbb{N}\}$$

é um subconjunto aberto de $l_q^u(E)$. Portanto, se f for uma aplicação de A em F , que é absolutamente (p,q) -somante num ponto a , temos a seguinte aplicação naturalmente associada a ela:

$$\psi_{a,p,q}(f) : (x_j)_{j=1}^\infty \in V_{q,A}(a) \longrightarrow \psi_{a,p,q}(f)((x_j)_{j=1}^\infty) = (f(a + x_j) - f(a))_{j=1}^\infty \in l_p(F).$$

O resultado seguinte mostra que essa aplicação tem uma propriedade muito especial.

3.3. Teorema - Se f for uma aplicação de A em F , que é absolutamente (p,q) -somante num ponto a , então, $\psi_{a,p,q}(f)$ é regularmente (p,q) -somante no ponto 0 de $V_{q,A}(a)$.

Demonstração - Consideremos $(X_j)_{j=1}^\infty \in l_q(l_q^u(E))$, com $X_j = (x_{j,k})_{k=1}^\infty \in V_{q,A}(a)$, para cada j natural. Temos:

$$\sup_{x' \in B_{E'}} \sum_{j,k=1}^\infty |\langle x', x_{j,k} \rangle|^q \leq \sum_{j=1}^\infty (\|X_j\|_{w,q})^q < +\infty.$$

Isto mostra que a seqüência $(x_{j,k})_{j,k=1}^{\infty}$ pertence a $l_q^w(E)$. Além disso, temos $x_{j,k} + a \in A$, para quaisquer j, k naturais. Dado $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{j > j_0} (\|X_j\|_{w,q})^q \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, como $X_1, \dots, X_{j_0} \in l_q^u(E)$, existe k_0 natural tal que

$$(\|(x_{j,k})_{k > k_0}\|_{w,q})^q \leq \frac{\epsilon}{2j_0} \quad (\forall j = 1, \dots, j_0).$$

Se $J = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; j \leq j_0, k \leq k_0\}$, vamos obter que $(\|(x_{j,k})_{(j,k) \notin J}\|_{w,q})^q \leq \epsilon$. Portanto, $(x_{j,k})_{j,k=1}^{\infty}$ pertence a $l_q^u(E)$. Como f é absolutamente (p,q) -somante no ponto a , obtemos

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (\|\psi_{a,p,q}(f)(X_j)\|_p)^p = \sum_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \|f(a + x_{j,k}) - f(a)\|^p < +\infty,$$

o que conclui nossa demonstração. \square

3.4. Observação - Um exame da demonstração do Teorema 2.5 mostra que o mesmo pode ser enunciado para o caso em que E é r -normado completo e F é s -normado completo. Portanto, a tese do Teorema 3.3 é equivalente a afirmar que $\psi_{a,p,q}(f)$ é p/q -regular em 0.

Os resultados anteriores nos permitem enunciar o seguinte

3.5. Teorema - Sejam f uma aplicação de A em F e $a \in A$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) f é absolutamente (p,q) -somante no ponto a .
- (2) $\psi_{a,p,q}(f)$ é uma aplicação bem definida de $V_{q,A}(a)$ em $l_p(F)$.
- (3) Existem $M > 0$ e $\delta > 0$, tais que $B_\delta(0) \subset V_{q,A}(a)$ e

$$\sum_{j=1}^n \|f(a + x_j) - f(a)\|^p \leq M^q \sup_{x' \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n | \langle x', x_j \rangle |^q,$$

para todo n natural e quaisquer $x_j \in E$, tais que $\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,q} < \delta$.

- (4) Existem $M > 0$ e $\delta > 0$, tais que $B_\delta(0) \subset V_{q,A}(a)$ e

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|f(a + x_j) - f(a)\|^p \leq M^q \sup_{x' \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{+\infty} | \langle x', x_j \rangle |^q,$$

para qualquer $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^u(E)$, tal que $\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,q} < \delta$.

- (5) $\psi_{a,p,q}(f)$ é uma aplicação bem definida de $V_{q,A}(a)$ em $l_p(F)$, que é regularmente (p,q) -somante em 0.

Demonstração - Notemos que (2) é apenas uma reformulação de (1). É claro que (5) implica (2). Teorema 3.3 mostra que (1) implica (5). A observação 3.4 nos diz que (4) e (5) são equivalentes. A equivalência entre (3) e (4) é um exercício simples. \square

O resultado anterior nos fornece uma caracterização bem conhecida dos operadores lineares absolutamente (p,q) -somantes.

3.6. Teorema - Sejam T uma aplicação linear de E em F . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) T é absolutamente (p, q) -somante no ponto 0.
- (2) $\psi_{0,p,q}(T)$ é uma aplicação linear bem definida de $l_q^u(E)$ em $l_p(F)$.
- (3) Existe $L > 0$, tal que, para todo n natural e quaisquer $x_j \in E$, $j = 1, \dots, n$,

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n | \langle x', x_j \rangle |^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

- (4) Existe $L > 0$, tal que, para qualquer $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_q^u(E)$,

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} | \langle x', x_j \rangle |^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

- (5) $\psi_{0,p,q}(T)$ é uma aplicação linear bem definida contínua de $l_q^u(E)$ em $l_p(F)$.

Esse resultado usa o teorema anterior e o fato de que $\psi_{0,p,q}(T)$ é linear e, por ser contínua na origem, contínua sobre $l_q^u(E)$.

Por outro lado, como um polinômio m -homogêneo contínuo na origem, deve ser contínuo sobre o espaço todo, Teorema 3.5 também fornece o seguinte resultado.

3.7. Teorema - Sejam P uma aplicação m -homogênea de E em F . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (1) P é absolutamente (p, q) -somante no ponto 0.
- (2) $\psi_{0,p,q}(P)$ é uma aplicação m -homogênea bem definida de $l_q^u(E)$ em $l_p(F)$.
- (3) Existe $L > 0$, tal que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|P(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n | \langle x', x_j \rangle |^q \right)^{\frac{m}{q}},$$

para todo n natural e quaisquer $x_j \in E$, $j = 1, \dots, n$.

- (4) Existe $L > 0$, tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \|P(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} | \langle x', x_j \rangle |^q \right)^{\frac{m}{q}},$$

para qualquer $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_q^u(E)$.

- (5) $\psi_{0,p,q}(P)$ é uma aplicação m -homogênea bem definida contínua de $l_q^u(E)$ em $l_p(F)$.

Se P for um polinômio n -homogêneo absolutamente (p, q) -somante na origem, podemos estabelecer uma relação entre o valor de L do Teorema 3.7 e os valores de M e δ do Teorema 3.5.

3.8. Proposição - Seja P um polinômio n -homogêneo de E em F , para o qual existem $M > 0$, $\delta > 0$, tais que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|P(x_j)\|^p \leq M^q \sup_{x' \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{+\infty} | \langle x', x_j \rangle |^q,$$

para qualquer $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^n(E)$, tal que $\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,q} \leq \delta$. Então,

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \|P(y_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq L \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} | \langle x', y_j \rangle |^q \right)^{\frac{m}{q}},$$

para todo $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^n(E)$. Neste caso $L = M^{\frac{1}{p}} \delta^{\frac{q}{p} - n}$. Isto implica que

$$\|\psi_{0,p,q}(P)\| \leq M^{\frac{1}{p}} \delta^{\frac{q}{p} - n}.$$

Demonstração - Notemos que a desigualdade de nossa hipótese pode ser escrita na forma

$$(\|\psi_{0,p,q}(P)((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_p)^p \leq M (\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q})^q \leq M \delta^q,$$

para qualquer $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^n(E)$, tal que $\|(x_j)_{j=1}^n\|_{w,q} \leq \delta$. Assim, podemos escrever

$$\left\| \psi_{0,p,q}(P) \left(\frac{\delta(y_j)_{j=1}^{\infty}}{\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q}} \right) \right\|_p \leq (M \delta^q)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $(y_j)_{j=1}^{\infty} \neq 0$. Como $\psi_{0,p,q}(P)$ é n -homogêneo, essa desigualdade pode ser escrita na forma

$$\|\psi_{0,p,q}(P)((y_j)_{j=1}^{\infty})\|_p \leq (M \delta^q)^{\frac{1}{p}} \delta^{-n} (\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q})^n,$$

para todo $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^n(E)$, o que termina nossa demonstração. \square

4. EXEMPLOS DE APLICAÇÕES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

Os resultados desta secção mostram que a existência de aplicações absolutamente somantes não é um acontecimento raro.

4.1. Teorema - Seja f uma aplicação definida num aberto A de l_1 , com valores em l_2 , tal que $d^2 f$, sua diferencial de Fréchet de ordem 2, é localmente limitada sobre A . Então, f é absolutamente somante sobre A .

Demonstração - Lembremos que, pelo Teorema (Desigualdade) de Taylor, podemos escrever

$$\|f(a+x) - f(a) - df(a)(x)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0,1]} \|d^2 f(a+tx)\| \|x\|^2,$$

sempre que $a+tx \in A$, para todo $t \in [0,1]$. Seja $\delta > 0$, tal que $B_\delta(a) \subset A$ e $\|d^2 f\|$ é limitada por M sobre $B_\delta(a)$. Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^+(l_1)$ e $\|x_j\| < \delta$, para $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|f(a+x_j) - f(a)\| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \|df(a)(x_j)\| + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} M \|x_j\|^2.$$

Pelo Teorema de Grothendieck, $df(a)$ é absolutamente somante. Como E tem a Propriedade de Orlicz, id_E é absolutamente (2,1)-somante. Logo, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_2(l_1)$. Portanto,

esses resultados e a desigualdade acima mostram que $(f(a + x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty} \in l_1(l_2)$, como queríamos mostrar. \square

4.2 Corolário - Toda aplicação analítica sobre um aberto A de l_1 , com valores em l_2 , é absolutamente somante sobre A .

4.3. Teorema - Seja f é uma aplicação definida num aberto A de um espaço de Banach E , com a Propriedade de Orlicz, que toma valores em F e tem diferencial de ordem 2 localmente limitada sobre A . Então, se $df(a)$ for absolutamente somante no ponto $a \in A$, f é absolutamente somante em a .

Demonstração - Lembremos que, pelo Teorema (Desigualdade) de Taylor, podemos escrever

$$\|f(a + x) - f(a) - df(a)(x)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0,1]} \|d^2 f(a + tx)\| \|x\|^2,$$

sempre que $a + tx \in A$, para todo $t \in [0,1]$. Seja $\delta > 0$, tal que $B_\delta(a) \subset A$ e $\|d^2 f\|$ é limitada por M sobre $B_\delta(a)$. Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^u(E)$ e $\|x_j\| < \delta$, para $j \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|f(a + x_j) - f(a)\| \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \|df(a)(x_j)\| + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} M \|x_j\|^2.$$

Por nossas hipóteses, $df(a)$ é absolutamente somante. Como E tem a Propriedade de Orlicz, id_E é absolutamente (2,1)-somante. Logo, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_2(E)$. Portanto, esses resultados e a desigualdade acima mostram que $(f(a + x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty} \in l_1(F)$, como queríamos mostrar. \square

Lembremos que os espaços l_p , com $p \in [1, 2]$, têm a Propriedade de Orlicz, isto é, as identidades sobre esses espaços são absolutamente (2,1)-somantes.

4.4. Corolário - Seja A um aberto de um espaço de Banach E , com a Propriedade de Orlicz.

(1) Toda aplicação analítica f sobre A , com valores em F , que tem diferencial $df(a)$ absolutamente somante, é absolutamente somante no ponto $a \in A$.

(2) Se $n \geq 2$, todo polinômio n -homogêneo contínuo de E em F é absolutamente somante na origem.

4.5. Proposição - Se g é uma aplicação linear absolutamente (p, q) -somante definida em E , com valores em F , e f é uma aplicação regularmente (s, p) -somante sobre um aberto B de F , com valores em um espaço de Banach G , então, $f \circ g$ é absolutamente (s, q) -somante sobre o aberto $A = g^{-1}(B)$.

Demonstração - Se $a \in A$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_q^u(E)$, com $a + x_j \in A$, $j \in \mathbb{N}$, temos $(g(a + x_j) - g(a))_{j=1}^{\infty} \in l_p(F)$, por g ser absolutamente (p, q) -somante. Logo,

$$(f \circ g(a + x_j) - f \circ g(a))_{j=1}^{\infty} = (f(g(a) + (g(a + x_j) - g(a)))) \in l_s(G),$$

por f ser regularmente (s, p) -somante em $g(a)$. Isto mostra que $f \circ g$ é absolutamente (s, q) -somante no ponto a . \square

4.6. Consequências

(1) Se f for uma aplicação definida num aberto A de um espaço E com a Propriedade de Orlicz, que toma valores em F , e df é localmente limitada sobre A , então, f é absolutamente (2, 1)-somante sobre A . Portanto, aplicações analíticas de A em F são absolutamente (2, 1)-somantes sobre A .

Isto segue de 4.5, uma vez que id_E é absolutamente (2, 1)-somante e f é regularmente 2-somante sobre A , pelo exemplo 4 de 2.4 e por 2.5.

(2) Sejam $p \in [1, 2]$ e T uma aplicação linear contínua de c_0 em l_p . Se f é uma aplicação definida num aberto B de l_p , com valores em F , tal que df é localmente limitada sobre B , então, $f \circ T$ é absolutamente 2-somante sobre $A = T^{-1}(B)$. Em particular, se f for analítica sobre B , $f \circ T$ é absolutamente 2-somante sobre A .

Isto segue de 4.5, pois, T é absolutamente 2-somante (Lindenstrauss-Pelczynski [7]) e f é regularmente 2-somante por 4 de 2.4.

(3) Sejam $2 < p < r < +\infty$ e T uma aplicação linear contínua de c_0 em l_p . Se f é uma aplicação definida num aberto B de l_p , com valores em F , tal que df é localmente limitada sobre B , então, $f \circ T$ é absolutamente r -somante sobre $A = T^{-1}(B)$. Em particular, se f for analítica sobre B , $f \circ T$ é absolutamente r -somante sobre A .

Isto segue de 4.5, pois, T é absolutamente r -somante (Kwapień [6] e Schwartz [15]) e f é regularmente r -somante por 4 de 2.4.

5. APLICAÇÕES HOLOMORFAS ABSOLUTAMENTE SOMANTES

Nesta secção todos os espaços de Banach serão considerados sobre o corpo \mathbb{C} . Além disso, usaremos as notações usuais da Teoria de Holomorfia em Dimensão Infinita (vide Nachbin [11]).

Vamos descrever as funções generalizadas de Rademacher introduzidas por Aron e Grobevnik [1]. Para um $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, fixado, tomamos as n -ésimas raízes da unidade $1 = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, consideradas na ordem crescente de seus argumentos principais. O intervalo fechado $[0, 1]$ é dividido em n intervalos de comprimentos iguais I_1, \dots, I_n , escritos na ordem em que aparecem da esquerda para a direita. Consideramos a função complexa $s_1^{(n)}$, definida sobre $[0, 1]$, dada por $s_1^{(n)}(t) = \lambda_j$, para t no interior de I_j e $s_1^{(n)}(t) = 1$, se t for uma das extremidades de I_j , $j = 1, \dots, n$. Para $k \geq 1$, consideramos já definidas as funções $s_1^{(n)}, \dots, s_k^{(n)}$ e vamos construir a função $s_{k+1}^{(n)}$ da seguinte maneira. Cada intervalo J , usado na definição de $s_k^{(n)}$, é dividido em n intervalos de comprimentos iguais J_1, \dots, J_n , escritos na ordem em que aparecem da esquerda para a direita. Agora, consideramos $s_{k+1}^{(n)}$ definido por $s_{k+1}^{(n)}(t) = \lambda_j$, se t está no interior de J_j , e $s_{k+1}^{(n)}(t) = 1$, caso t seja uma das extremidades de J_j , $j = 1, \dots, n$. Como $\sum_{j=1}^n \lambda_j^m = 0$, para cada $m < n$, temos

$$\int_0^1 s_{j_1}^{(n)}(t) \dots s_{j_n}^{(n)}(t) dt = \delta_{j_1, \dots, j_n},$$

onde $\delta_{j_1, \dots, j_n} = 1$, se $j_1 = \dots = j_n$, e $\delta_{j_1, \dots, j_n} = 0$, nos outros casos. Diremos que $\left(s_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}$ é a sequência das n -funções de Rademacher.

5.1. Teorema - Se f for uma função holomorfa sobre um aberto A de E , com valores em \mathbb{C} , então, f é absolutamente somante sobre A .

Demonstração - Dado $a \in A$, sabemos que existe $\delta > 0$, tal que

$$f(a+x) - f(a) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\hat{d}f^k(a)}{k!}(x),$$

uniformemente para $x \in \overline{B}_r(0)$, sempre que $0 < r < \delta$. Para simplificar nossas notações, vamos escrever $P_k = \frac{\hat{d}f^k(a)}{k!}$. A convergência acima e as Fórmulas Integrais de Cauchy implicam que, para cada $0 < r < \delta$, existe $M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)| > 0$, tal que

$$\|P_k\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P_k(x)\| \leq M(r) \frac{1}{r^k},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Sejam $x_1, \dots, x_m \in E$, tais que $\|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,1} \leq \frac{r}{2} = \frac{\delta}{4}$. Temos

$$\sum_{j=1}^m |f(a+x_j) - f(a)| = \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_j) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^m |P_k(x_j)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^m P_k(\alpha_{k,j} x_j) \right|$$

onde $\alpha_{k,j}$ é um número complexo, de módulo 1, tal que $\alpha_{k,j} P_k(x_j) = |P_k(x_j)|$. Agora, notemos que

$$\left| \sum_{j=1}^m P_k(\alpha_{k,j} x_j) \right| = \left| \int_0^1 P_k \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{k,j} s_j^{(k)}(t) x_j \right) dt \right| \leq \|P_k\| \sup_{|t|=1} \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_{k,j} s_j^{(k)}(t) x_j \right\|^k.$$

Na primeira igualdade da expressão anterior usamos a multilinearidade da aplicação k -linear associada a P_k e as propriedades das k -funções de Rademacher. Como

$$\sup_{|t|=1} \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_{k,j} s_j^{(k)}(t) x_j \right\|^k \leq (\|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,1})^k,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m |f(a+x_j) - f(a)| &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|P_k\| (\|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,1})^k \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} M(r) r^{-k} (\|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,1})^k \leq M(r) \|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,1} \sum_{k=0}^{+\infty} r^{-k} (\|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,1})^k. \end{aligned}$$

Como $\|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,1} \leq \frac{\delta}{4} = \frac{r}{2}$, podemos concluir que

$$\sum_{j=1}^m |f(a+x_j) - f(a)| \leq 2M(r) \|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,1}.$$

Nosso resultado está demonstrado pelo uso de 3.5.(3). \square

A demonstração do resultado anterior prova que também vale o seguinte Teorema.

5.2. Teorema - Se f é uma função holomorfa sobre um aberto A de E com valores complexos, então, existe $r > 0$, tal que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |f(a+x_j) - f(a)| \leq 2 \sup_{|z-a|=r} |f(z)| \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,1} < +\infty,$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^u(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,1} \leq \frac{r}{2}$.

5.3. Proposição - Se f é uma aplicação holomorfa num aberto A de E , com valores em F , então, para cada $a \in E$, tem-se $(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty} \in l_1^u(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^u(E)$ e $a+x_j \in A$, $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração - Para cada $\phi \in F'$, temos $\phi \circ f$ absolutamente somante sobre A , por 5.1. Por outro lado, pelo Teorema 5.2, obtemos

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |\phi \circ f(a+x_j) - \phi \circ f(a)| \leq 2 \sup_{|z-a|=r} |\phi \circ f(z)| \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,1},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^u(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,1} \leq \frac{r}{2}$. Portanto, podemos escrever que, para cada $\|\phi\| \leq 1$,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |\phi \circ f(a+x_j) - \phi \circ f(a)| \leq 2 \sup_{|z-a|=r} \|f(z)\| \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,1},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^u(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,1} \leq \frac{r}{2}$. Agora, nossa tese segue facilmente dessa desigualdade. \square

5.4. Teorema - Se $f : A \rightarrow F$ é holomorfa sobre $A \subset E$ e g é uma aplicação absolutamente $(p, 1)$ -somante sobre um aberto B de F , contendo $f(A)$, com valores num espaço de Banach G , então, $g \circ f$ é absolutamente $(p, 1)$ -somante sobre A .

Demonstração - Seja $a \in A$. Para cada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_1^u(E)$, com $a+x_j \in A$, $j \in \mathbb{N}$, temos $(f(a+x_j) - f(a))_{j=1}^{\infty} \in l_1^u(F)$, pelo teorema anterior. Logo, como g é absolutamente $(p, 1)$ -somante no ponto $f(a)$, temos

$$(g \circ f(a+x_j) - g \circ f(a))_{j=1}^{\infty} = (g(f(a) + (f(a+x_j) - f(a))) - g(f(a)))_{j=1}^{\infty} \in l_p(G)$$

e nosso resultado está demonstrado. \square

5.5. Proposição - Seja f holomorfa sobre um aberto A de E , tomando valores em F . Se f for absolutamente (p, q) -somante no ponto $a \in A$, então, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\hat{d}^n f(a)$ é um polinômio n -homôgeneo absolutamente (p, q) -somante na origem.

Demonstração - Se $B_\delta(a) \subset A$, pela Fórmula Integral de Cauchy, podemos escrever

$$\hat{d}^n f(a)(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \frac{f(a+\lambda x) - f(a)}{\lambda^{n+1}} d\lambda,$$

para cada $x \in B_\delta(0)$. Portanto, existe $|\lambda_{n,x}| = 1$, tal que

$$\|\hat{d}^n f(a)(x)\| \leq n! \sup_{|\lambda|=1} \|f(a + \lambda x) - f(a)\| = n! \|f(a + \lambda_{n,x} x) - f(a)\|.$$

Agora, para $(x_j)_{j=1}^\infty \in l_q^u(E)$, com $a + x_j \in A$, $j \in \mathbb{N}$, existe j_0 , tal que, $x_j \in B_\delta(0)$, se $j > j_0$. Como vimos acima, existe $|\lambda_j| = 1$, tal que

$$\|\hat{d}^n f(a)(x_j)\| \leq n! \|f(a + \lambda_j x_j) - f(a)\|,$$

para cada $j > j_0$. Portanto,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|\hat{d}^n f(a)(x_j)\|^p \leq \sum_{j=1}^{j_0} \|\hat{d}^n f(a)(x_j)\|^p + n! \sum_{j>j_0} \|f(a + \lambda_j x_j) - f(a)\|^p < +\infty.$$

pois $(\lambda_j x_j)_{j>j_0} \in l_q^u(E)$. Isto completa nossa demonstração. \square

Uma consequência deste resultado e de 4.3 é o seguinte teorema.

5.6 Teorema - Uma aplicação holomorfa f de um aberto A num espaço de Banach E , com a Propriedade de Orlicz, em F é absolutamente somante no ponto $a \in A$, se, e só se, $df(a)$ é absolutamente somante.

5.7. Teorema - Seja f holomorfa sobre um aberto A de E , tomando valores em F . Se f for absolutamente (p, q) -somante no ponto $a \in A$, então, existem $\delta > 0$ e $M > 0$, tais que

$$\left\| \psi_{0,p,q} \left(\frac{\hat{d}^n f(a)}{n!} \right) \right\| \leq M^{\frac{1}{p}} \delta^{\frac{q}{p} - n},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração - Pelo Teorema 3.5, existem $M > 0$ e $\delta > 0$, tais que $B_\delta(0) \subset V_{q,A}(a)$ e

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \|f(a + x_j) - f(a)\|^p \leq M^q \sup_{x' \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{+\infty} | \langle x', x_j \rangle |^q,$$

para $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q \leq \delta$. Conforme vimos na demonstração da proposição anterior, temos

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left\| \frac{\hat{d}^n f(a)(x_j)}{n!} \right\|^p \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \|f(a + \lambda_j x_j) - f(a)\|^p < +\infty,$$

para $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q \leq \delta$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left\| \frac{\hat{d}^n f(a)(x_j)}{n!} \right\|^p \leq M^q \left(\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q \right)^q.$$

Por 3.8, obtemos nosso resultado. \square

5.8. Teorema - Seja f holomorfa sobre um aberto A de E , tomando valores em F . Então, f é absolutamente (p, q) -somante no ponto $a \in A$, se, e só se, $\psi_{a,p,q}(f)$ é holomorfa na origem.

Demonstração - Uma implicação é trivial. Se supomos, por outro lado, que f é absolutamente (p, q) -somante no ponto $a \in A$, 5.7 garante que a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \psi_{0,p,q} \left(\frac{d^n \hat{f}(a)}{n!} \right) ((x_j)_{j=1}^\infty),$$

tem raio de convergência maior ou igual a $\delta > 0$. Isto significa que ela converge para cada $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q} < \delta$ e define uma aplicação holomorfa na origem de $l_q^w(E)$. Agora, fazendo as contas, vemos que a soma de tal série, para tais pontos, é $\psi_{a,p,q}(f)((x_j)_{j=1}^\infty)$. \square

6. TEOREMA DE DVORESTKY-ROGERS PARA POLINÔMIOS

Nesta secção E e F são espaços de Banach sobre \mathbb{K} .

Se P for um polinômio n -homogêneo de E em F , que é absolutamente p -somante sobre E , e, além disso, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então, como vimos na secção anterior, $dP(a)$ é absolutamente p -somante na origem, para todo $a \in E$. O próximo lema mostra que o mesmo resultado vale no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

6.1. Lema - Seja P um polinômio n -homogêneo de E em F , que é absolutamente p -somante sobre E . Para cada $a \in E$, $dP(a)$ é absolutamente p -somante na origem.

Demonstração - Lembremos que

$$\begin{aligned} dP(a)(x) &= n\tilde{P}ax^{n-1} = \frac{n}{n!2^n} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \dots \epsilon_n P(\epsilon_1 a + (\epsilon_2 + \dots + \epsilon_n)x) \\ &= \frac{n}{n!2^n} \left(\sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_2 \dots \epsilon_n P(a + (\epsilon_2 + \dots + \epsilon_n)x) - \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_2 \dots \epsilon_n P(-a + (\epsilon_2 + \dots + \epsilon_n)x) \right) \\ &= \frac{n}{n!2^n} \left(\sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_2 \dots \epsilon_n P_a((\epsilon_2 + \dots + \epsilon_n)x) - \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_2 \dots \epsilon_n P_{-a}((\epsilon_2 + \dots + \epsilon_n)x) \right). \end{aligned}$$

Notemos que, como P é absolutamente p -somante em a e em $-a$, temos P_a e P_{-a} absolutamente p -somantes na origem. Agora, para completar a demonstração, basta usar esses fatos e a identidade acima. \square

6.2. Lema - Para $x'_1, \dots, x'_n \in E'$ e $b \in F$, se $f_n(x) = \langle x'_1, x \rangle \dots \langle x'_n, x \rangle b$, para cada $x \in E$, então, f_n é absolutamente p -somante sobre E .

Demonstração - Se $g_n(x) = \langle x'_1, x \rangle \dots \langle x'_n, x \rangle$, para cada $x \in E$, é fácil ver f_n será absolutamente p -somante sobre E , se o mesmo ocorrer com g_n . Para isto acontecer, basta provar que $(g_n)_a$ é absolutamente p -somante na origem, para cada $a \in E$ (vide observação feita após a definição 3.1). Mas, notemos que

$$(g_{n+1})_a(x) = \langle x'_{n+1}, a \rangle (g_n)_a(x) + \langle x'_{n+1}, x \rangle (g_n)_a(x) - \langle x'_{n+1}, x \rangle g_n(a),$$

para todo $x \in E$. O resultado será demonstrado por indução em n . O caso $n = 1$ é trivial. Supondo que g_n é absolutamente p -somante sobre E , para $n \geq 1$, a identidade acima mostra que $(g_{n+1})_a$ é absolutamente p -somante na origem, se o produto $\langle x'_{n+1}, \cdot \rangle (g_n)_a$ for absolutamente p -somante na origem. Isto segue da Desigualdade de Hölder

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x'_{n+1}, x_j \rangle (g_n)_a(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x'_{n+1}, x_j \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(g_n)_a(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e dos fatos de $\langle x'_{n+1}, \cdot \rangle$ e $(g_n)_a$ serem absolutamente p -somantes na origem. \square

Agora, estamos em condições de demonstrar um teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para polinômios n -homogêneos.

6.3. Teorema - O espaço vetorial dos polinômios n -homogêneos contínuos de E em E coincide com o espaço dos polinômios n -homogêneos absolutamente p -somantes sobre E , se, e somente se, E tem dimensão finita.

Demonstração - Se $n = 1$, esse é o Teorema de Dvoretzky-Rogers. Seja, então, $n \geq 2$.

Se E tem dimensão infinita, tomemos $x' \in E'$, $x' \neq 0$ e $a \notin \ker(x')$. O polinômio n -homogêneo contínuo P , dado por $P(x) = (\langle x', x \rangle)^{n-1}x$, para cada $x \in E$, é tal que

$$dP(a)(x) = (n-1)(\langle x', a \rangle)^{n-2} \langle x', x \rangle a + (\langle x', a \rangle)^{n-1}x.$$

Se P fosse absolutamente p -somante sobre E , teríamos $dP(a)$ absolutamente p -somante, pelo Lema 6.1. Como $(n-1)(\langle x', a \rangle)^{n-2} \langle x', \cdot \rangle a$ é absolutamente p -somante e $\langle x', a \rangle \neq 0$, a identidade acima implicaria que id_E deveria ser absolutamente p -somante. Mas isso não pode ocorrer, pelo Teorema de Dvoretzky-Rogers. Portanto, P não é absolutamente p -somante sobre E .

Se E tem dimensão finita, existem bases $\{e_1, \dots, e_m\}$ e $\{e'_1, \dots, e'_m\}$, de E e E' , tais que $\langle e'_j, e_k \rangle = \delta_{j,k}$. Portanto, dado um polinômio n -homogêneo P de E em E , podemos escrever:

$$\begin{aligned} P(x) &= \tilde{P} \left(\sum_{j=1}^m \langle e'_j, x \rangle e_j \right)^n \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^m \langle e_{j_1}, x \rangle \dots \langle e_{j_n}, x \rangle \tilde{P}(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}). \end{aligned}$$

Pelo Lema 6.2, obtemos P absolutamente p -somante sobre E . \square

REFERÊNCIAS

- [1] - ARON, R. M. e GLOBEVNIK, J. - Analytic functions on c_0 . *Revista Math.*, **2** (1989), pags. 27-33.
- [2] - DEFANT, A. e FLORET, K. - Tensor norms and operator ideals. *North-Holland Mathematics Studies*, **176** (1993).
- [3] - DIESTEL, J., JARCHOW, H. e TONGE, A. - Absolutely summing operators. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, **43** (1995).
- [4] - DVORETSKY, A. e ROGERS, C. A. - Absolute and unconditional convergence in normed spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **36** (1950), pags. 192-197.
- [5] - GROTHENDIECK, A. - Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. *Bol. Soc. Mat. São Paulo*, **8** (1956), pags. 1-79.
- [6] - KWAPIEN, S. - On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators. *Studia Math.*, **38** (1970), pags. 193-201.

- [7] - LINDENSTRAUSS, J. e PELCZYŃSKI, A. - Absolutely summing operators in \mathcal{L}_p -spaces and applications. *Studia Math.*, **29** (1968), pags. 275-326.
- [8] - MATOS, M. C. - Absolutely summing holomorphic mappings. *An. Acad. bras. Ci.*, **68**,(1) (1996), pags. 1-13.
- [9] - MATOS, M. C. - Non-linear absolutely summing mappings between Banach spaces. *Atas do 46 Seminário Brasileiro de Análise*, (1997), pags. 462-479.
- [10] - MITJAGIN, B. e PELCZYŃSKI, A. - Nuclear operators and approximative dimension. *Proc. of ICM, Moscow* (1966), pags. 366-372.
- [11] - NACHBIN, L. - Topologies on spaces of holomorphic mappings. *Ergebn. Math. Grenzgeb.*, **47**, Springer-Verlag (1969).
- [12] - PIETSCH, A. - Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen. *Studia Math.*, **27**, (1967), pags. 333-353.
- [13] - PIETSCH, A. - Operator Ideals. *Deutscher Verlag der Wiss.* (1978) e *North-Holland* (1980).
- [14] - PIETSCH, A. - Ideals of multilinear functionals. *Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and Their Applications in Theoretical Physics*, Teubner-Text, (1983), pags. 185-199.
- [15] - SCHWARTZ, L. - Probabilités cylindriques et applications radonifiantes. *C. R. Acad. Paris*, **268** (1969), pags. 646-648.