

nº 04

Cohomologie des suites
d'Atiyah

Rui Almeida

maio 1988

COHOMOLOGIE DES SUITES D'ATIYAH

RUI ALMEIDA (*)

INTRODUCTION

La notion de suite d'Atiyah abstraite apparaît originalement dans [16]. Il s'agit d'un fibré vectoriel $L \xrightarrow{\pi} W$ muni d'un morphisme de fibrés vectoriels $L \xrightarrow{P} TW$ et d'une structure d'algèbre de Lie dans le $A(W)$ -module des sections de L , telle que le morphisme de $A(W)$ -modules induit par p est un morphisme d'algèbres de Lie. Cette notion généralise la notion classique d'algèbre de Lie et apparaît naturellement dans la théorie géométrique des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Atiyah [4], a associé à chaque fibré principal, une suite exacte courte de fibrés vectoriels, connue comme la suite d'Atiyah du fibré principal. À chaque feuilletage transversalement complet [15], on associe une suite exacte courte de fibrés vectoriels qu'on appelle la suite d'Atiyah du feuilletage, [2], [3]. Ces sont des cas particuliers importants de la notion générale de suite d'Atiyah.

À une suite d'Atiyah abstraite est associé un complexe différentiel standard et une cohomologie qui généralise naturellement la cohomologie de de Rham d'une variété et qui a comme des cas particuliers, la cohomologie basique des feuilletages transversalement complets et la cohomologie invariant des fibres principaux. À la part, la grande importance de connaître si la cohomologie d'une suite d'Atiyah est de dimension finie et si elle satisfait la dualité de Poincaré (W compacte), la motivation principale de ce

(*) L'auteur tient à ressauter que c'est P.Molino qu'a suggéré le résultat principal de ce travail. À lui ses meilleurs remerciements.

travail vient de questions liées à la cohomologie basique des feuilletages. On montre que si $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$ est une suite d'Atiyah, où W est compacte, alors la cohomologie standard de L est de dimension finie. Si L est de rang n , W compact et orientée, alors la cohomologie standard de L satisfait la dualité de Poincaré si, et seulement si $H^n(L) \neq 0$. La nécessité d'imposer cette condition est ressautée par l'exemple de Carrière [7].

Appuyé sur le théorème 2.3 (page 10), on peut construire des exemples de fibrés principaux où la dualité de Poincaré pour la cohomologie invariant n'est pas valable.

Nos méthodes de démonstrations suivent de près les méthodes de El Kacimi-Hector [8].

I. SUITES D'ATIYAH

On suppose dans ce qui suit que les variétés sont de classe C^∞ . Si W est une variété, on note par $A(W)$ l'anneau des fonctions de classe C^∞ définies en W . Si (E, π, W) est un fibré vectoriel, on note le $A(W)$ -module des sections de E par $\underline{E}$.

I.1. La Cohomologie des Suites d'Atiyah.

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \xrightarrow{p} TW \rightarrow 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels de base W et notons par $p: \underline{L} \rightarrow \underline{TW}$ l'homomorphisme de $A(W)$ -modules induit par p . Supposons que $\underline{L}$ est muni d'un crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ tel que:

- (i) $[\xi, f] = f[\xi, n] + p(\xi)fn$
- (ii) $p[\xi, n] = [p(\xi), p(n)], \forall \xi, n \in \underline{L} \text{ et } f \in A(W).$

On a une suite exacte de $A(W)$ -modules et d'algèbres de Lie

$$\underline{0} \rightarrow \underline{I} \rightarrow \underline{L} \rightarrow \underline{TW} \rightarrow \underline{0} \quad (1)$$

On appelle $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$ (ou même (1)) suite d'Atiyah abstraite ou simplement suite d'Atiyah, ou encore algebroid de Lie transitif de base W .

On remarque que le crochet $[\cdot, \cdot]$ induit sur I une structure de fibré localement trivial en algèbres de Lie [3], [14]. L'algèbre de Lie type, est appelée l'algèbre de Lie structurale de la suite d'Atiyah.

Associé à (1), on a le complexe standard $(C^*(\underline{L}), d)$ où

$$C^k(\underline{L}) = \{\alpha: \underline{L} \times \dots \times \underline{L} \rightarrow A(W); \alpha \text{ est } k\text{-linéaire et alternée}\}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad d\alpha(\xi^1, \dots, \xi^{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i p(\xi^i) \alpha(\xi^1, \dots, \hat{\xi}^i, \dots, \xi^{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([\xi^i, \xi^j], \xi^1, \dots, \hat{\xi}^i, \dots, \hat{\xi}^j, \dots, \xi^{k+1}) \end{aligned}$$

On denote l'espace de cohomologie de ce complexe par $H^*(\underline{L})$.

Exemple 1.1. [4].

Soit $P(W, \pi, G)$ un fibré principal de base W et groupe structural G et g l'algèbre de Lie des champs invariants à gauche sur G . G opère à droite sur TP et sur $P \times g$ par

$$\begin{aligned} TP \times G &\rightarrow TP & \text{et} & & (P \times g) \times G &\rightarrow P \times g \\ (v, a) &\rightarrow (R_a)_*(v) & & & ((x, X), a) &\rightarrow (x, a, \text{Ad}(a^{-1})X) \end{aligned}$$

où $R_a(x) = x.a$.

On note les espaces quotients de TP et de $P \times g$ par ces actions, respectivement par $L(P)$ et $I(P)$.

Le morphisme $\pi_*: TP \rightarrow TW$ induit un morphisme surjectif de fibrés vectoriels $p: L(P) \rightarrow TW$ dont le noyau s'identifie à $I(P)$ par l'application $j: I(P) \rightarrow L(P)$ induite par $j: P \times g \rightarrow TP$ où $j(x, X) = \tilde{X}_x$, $\tilde{X}$ le champ fondamental associé à X .

On obtient ainsi, la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \rightarrow I(P) \rightarrow L(P) \rightarrow TW \rightarrow 0 \quad (2)$$

Le crochet des champs de P invariants par l'action de G , définit sur $L(P)$ une structure d'algèbre de Lie telle que (2) est une suite d'Atiyah.

Notons $\Omega_G^*(P)$ le complexe des formes différentielles de P invariants par l'action de G .

On a alors, le complexe différentiel $(\Omega_G^*(P), d)$ et la cohomologie invariant de P , $H_G^*(P)$.

Le résultat suivant est immédiat:

Proposition 1.1.

Les complexes $(C^*(L(P)), d)$ et $(\Omega_G^*(P), d)$ sont isomorphes.

Exemple 1.2. [15], [2].

Soit M une variété connexe munie d'un feuilletage F , TF le fibré de base M que définit F , $\mathcal{L}(M, F)$ le normalisateur de l'algèbre de Lie TF et $Q = TM/TF$ le fibré normal au feuilletage. Si $X \in \mathcal{L}(M, F)$ (champ feuilleté), la section correspondante $\tilde{X}$ de Q , est appelée champ transverse associé à X et X est dit un représentant de $\tilde{X}$. Les champs transverses forment une algèbre de

Lie $\mathfrak{L}(M, F)$.

Si F est de codimension q et il existent $X_1, \dots, X_q$ champs transverses satisfaisant:

- (i) $\forall x \in M, X_1(x), \dots, X_q(x)$ sont linéairement indépendants.
- (ii) $X_1, \dots, X_q$ est une base d'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{L}(M, F)$, on dit que (M, F) est un $\mathfrak{g}$ -feuilletage de Lie.

Si pour chaque $x \in M$ et $v \in T_x M$, il existe $X \in \mathcal{L}_C(M, F)$ tel que $X_x = v$, où $\mathcal{L}_C(M, F)$ est le sous-ensemble des champs feuilletés complets, on dit que (M, F) est **transversalement complet**. Pour ce type de feuilletage, les adhérences des feuilles sont les fibres d'une fibration localement triviale $\pi: M \rightarrow W$ sur une variété basique W . La fibre type (N, F) est un $\mathfrak{g}$ -feuilletage de Lie transversalement complet à feuilles denses et $\mathfrak{g}$ est un invariant du feuilletage, appelé **algèbre de Lie structurale** de (M, F) . Les fonctions qui sont constantes sur les feuilles (fonctions basiques) forment un anneau qui s'identifie à $A(W)$. Ainsi, $\mathfrak{L}(M, F)$ a une structure de $A(W)$ -module.

Si $\mathcal{I}$ est le fibré en algèbres de Lie sur W dont la fibre en $x \in W$ est formée par l'algèbre $\mathfrak{L}(\pi^{-1}(x), F)$ des champs transverses verticaux en x , restreints à la fibre $\pi^{-1}(x)$, alors $\mathcal{I}$ s'identifie au noyau de la projection $p: \mathfrak{L}(M, F) \rightarrow \underline{TW}$. On obtient, la suite d'Atiyah

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{L}(M, F) \rightarrow \underline{TW} \rightarrow 0$$

qu'on appelle **suite d'Atiyah du feuilletage (M, F)** .

Soit $\alpha \in \Omega^*(M)$ une forme différentielle sur M . On dit que α est basique si $i_X \alpha = 0$, et $i_X d\alpha = 0$, $\forall X \in \mathcal{TF}$.

On a ainsi, le complexe différentiel des formes basiques $(\Omega^*(M, F), d)$ et la cohomologie basique $H^*(M, F)$.

Proposition 1.2.

Les complexes $(C^*(\mathcal{L}(M, F)), d)$ et $(\Omega^*(M, F), d)$ sont isomorphes.

Démonstration.

Soit $\alpha \in C^k(\mathcal{L}(M, F))$. Alors, pour $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k \in \mathcal{L}(M, F)$, on a que $\alpha(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k) \in A(W)$ définit une unique fonction basique sur M qu'on dénote encore par $\alpha(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k)$. Soient $X_1, \dots, X_k$ des représentants feuilletés des $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k$ respectivement et soit $\tilde{\alpha}$ la k -forme définie par $\tilde{\alpha}(X_1, \dots, X_k) = \alpha(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k)$. C'est immédiat que $\tilde{\alpha}$ est une k -forme basique sur M . Réciproquement, si β est une k -forme basique sur M , quels que soient les champs feuilletés $X_1, \dots, X_k$, on a que $\beta(X_1, \dots, X_k)$ est une fonction basique que ne dépend que de $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k$. β induit donc, $\alpha \in C^k(\mathcal{L}(M, F))$ telle que $\tilde{\alpha} = \beta$. On a ainsi la bijection

$$\alpha \in C^k(\mathcal{L}(M, F)) \rightarrow \tilde{\alpha} \in \Omega^k(M, F).$$

Un calcul simple montre que $d\tilde{\alpha} = \tilde{d\alpha}$.

I.2. Cohomologie à valeurs dans un fibré vectoriel.

Soit (E, π, W) un fibré vectoriel de rang n . On dit que E est un fibré vectoriel **plat**, s'il existe un recouvrement de M , par des ouverts qui trivialisent E et tels que les fonctions de transition sont localement constantes. Cette condition est équivalent à dire que (E, π, W) est muni d'une connexion linéaire à

courbure nulle qui est horizontale relativement aux fibrex.

Exemple 1.3.

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$ une suite d'Atiyah. On a remarqué que I a une structure de fibré localement trivial en algèbres de Lie. Si g est l'algèbre de Lie structurale et $((U_i, g_i))$ le cocycle qui définit I , on utilise ce cocycle pour construire les fibrés vectoriels $\Lambda^k I^*$ de base W et de fibre type $\Lambda^k g^*$, $k = 0, \dots, \dim g$.

L'application $\alpha: \Lambda^k g^* \rightarrow \Lambda^{k+1} g^*$ donné par

$$\alpha(v^1, \dots, v^{k+1}) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([v^i, v^j], v^1, \dots, \hat{v}^i, \dots, \hat{v}^j, \dots, v^{k+1})$$

induit un morphisme de rang constant $\alpha: \Lambda^k I^* \rightarrow \Lambda^{k+1} I^*$ qui satisfait $\alpha \circ \alpha = 0$.

On obtient ainsi, le complexe différentiel $(\Lambda^k I^*, \alpha)$ et les espaces de cohomologie associés $H^k(I)$. On remarque que les $H^k(I)$ sont des fibrés vectoriels de base W .

On va montrer que ces fibrés vectoriels sont plats.

Considérons pour chaque $t \in \underline{L}$, la dérivée de Lie

$\theta_t: C^k(\underline{L}) \rightarrow C^k(\underline{L})$ donnée par

$$\theta_t(\alpha)(n^1, \dots, n^k) = p(t)\alpha(n^1, \dots, n^k) - \sum_i \alpha(n^1, \dots, [t, n^i], \dots, n^k).$$

Alors,

$$(1) \theta_{[t, n]} = \theta_t \circ \theta_n - \theta_n \circ \theta_t \quad (2) \theta_t \circ d = d \circ \theta_t \quad (3) \theta_t = I_t \circ d + d \circ I_t$$

Soit $C^k(\underline{I}) = \{\alpha: \underline{I} \times \dots \times \underline{I} \rightarrow A(W); \alpha \text{ est } k\text{-linéaire et alternée}\}$ et

$$\tilde{d}: C^k(I) \rightarrow C^{k+1}(\underline{I}); \tilde{d}\alpha(\xi^1, \dots, \xi^{k+1}) =$$

$$\sum_{i < j} (-1)^{1+j} \alpha([\xi^i, \xi^j], \xi^1, \dots, \hat{\xi}^i, \dots, \hat{\xi}^j, \dots, \xi^{k+1}).$$

Si l'on identifie $C^k(\underline{I})$ et $\underline{A}^k \underline{I}^*$, alors $\tilde{d}$ s'identifie à

2.

On utilise (1) et (2) pour construire une représentation $\theta: L \rightarrow \text{CDO}(H^k(I))$, où $\text{CDO}(H^k(I))$ est l'algèbre de Lie des opérateurs de dérivations covariantes, [14].

On considère maintenant, $\gamma: TW \rightarrow L$ une connexion (i.e. un morphisme tel que $\rho \circ \gamma = \text{id}$). Alors, en utilisant (3) on montre que $\theta \circ \gamma$ est une connexion plate en $H^k(I)$.

Soit (E, π, W) un fibré vectoriel plat de rang n , $A^k(TW, E)$ le fibré dont la fibre en $x \in W$ est l'espace des applications k -linéaires et alternées $\alpha: T_x W \times \dots \times T_x W \rightarrow \pi^{-1}(x)$.

On note $\Omega^k(W, E)$, le $A(W)$ -module des sections de ce fibré.

Soit U un ouvert qui trivialise E et soient $\xi^1, \dots, \xi^n: U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ une base de sections locales "constantes" de E , (chaque $\xi^i(U)$ est contenu dans une feuille intégral du feuilletage défini par la connexion plate).

Si $\omega \in \Omega^k(W, E)$, on écrit $\omega|_U = \sum \omega_i \otimes \xi^i$, où $\omega_i \in \Omega^k(W)$ et on définit la différentielle

$$D: \Omega^k(W, E) \rightarrow \Omega^{k+1}(W, E) \quad \text{par}$$

$$D \omega|_U = \text{id} \omega_i \otimes \xi^i.$$

On vérifie facilement que la définition de D ne dépend

pas des sections "constantes" $\zeta^1, \dots, \zeta^n$ et que $D \circ D = 0$.

On a ainsi, le complexe différentiel $(\Omega^*(W, E), D)$.

On note l'espace de cohomologie de ce complexe par $H^*(W, E)$.

Exemple 1.4. [5]

Soient a et b deux points du cercle S^1 et considérons le recouvrement de S^1 donné par les ouverts $U_1 = S^1 - \{a\}$ et $U_2 = S^1 - \{b\}$. Alors, $U_1 \cap U_2$ est réunion de deux ouverts disjoints A et B .

Soit $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $g_{12}, g_{21}: U_1 \cap U_2 \rightarrow GL(\mathbb{R})$ donnés par

$$g_{12}(x)(r) = \begin{cases} r, & \text{si } x \in A, r \in \mathbb{R} \\ \lambda \cdot r, & \text{si } x \in B, r \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$g_{21}(x) = g_{12}(x)^{-1}, \quad \forall x \in U_1 \cap U_2.$$

Soient $T_1 = \{(x, r, i) / x \in U_1, r \in \mathbb{R}\}$ $i = 1, 2$ et $E_\lambda = T_1 \cup T_2 / \sim$ où $(x, r, i) \sim (x', r', j)$ si $x' = x$ et $r' = g_{ij}(x)(r)$.

E_λ est un fibré vectoriel de base S^1 et de fibre type $\mathbb{R}$, ayant g_{12} et g_{21} comme fonctions de transition.

E_λ est donc, un fibré vectoriel plat.

Si $\lambda \neq 1$, on a que $H^0(S^1, E_\lambda) = H^1(S^1, E_\lambda) = 0$.

I.3. La bigraduation du complexe $(C^*(\underline{L}), d)$ [8].

Les résultats de ce paragraphe seront utilisés dans la construction d'une suite spectrale associée au complexe $(C^*(\underline{L}), d)$.

Soit $0 \rightarrow I \xrightarrow{j} L \xrightarrow{p} TW \rightarrow 0$ une suite d'Atiyah, $\gamma: TW \rightarrow L$ une connection.

Si $z \in L$, on a que $z - \gamma(p(z)) \in I$. On note $V(z) = z - \gamma(p(z))$ et $\gamma(p(z)) = H(z)$. Ainsi, $z = H(z) + V(z)$. Une section $\xi \in \underline{L}$ est dite **pure horizontale** (respectivement, **pure verticale**) relativement à la connection γ , si $\xi(x) = H(\xi(x))$ (respectivement, $\xi(x) = V(\xi(x))$) quel que soit $x \in W$.

Une forme $\alpha \in C^k(\underline{L})$ est dite **pure de type (p,q)** , $p+q = k$ si quelle que soit la k -uplet de sections pures $\xi^1, \dots, \xi^k$ on a $\alpha(\xi^1, \dots, \xi^k) = 0$, sauf si p des sections sont pures horizontales et q sont pures verticales.

On note $C^{pq}(\underline{L})$ le $A(W)$ -module des formes pures de type (p,q) . On vérifie facilement que $C^*(\underline{L}) = \bigoplus_{p+q=k} C^{pq}(\underline{L})$.

D'ailleurs, si $\alpha \in C^{pq}(\underline{L})$, on a que $d\alpha \in C^{p(q+1)}(\underline{L}) \oplus C^{(p+1)q}(\underline{L}) \oplus C^{(p+2)(q-1)}(\underline{L})$ et donc, l'opérateur d se décompose comme $d = d_{01} + d_{10} + d_{2,-1}$.

On définit, pour chaque (p,q) , l'application

$$\theta: C^{pq}(\underline{L}) \rightarrow \Omega^p(W, \wedge^q I^*) \text{ donnée par}$$

$$\theta(\alpha)(X^1, \dots, X^p)(\eta^1, \dots, \eta^q) = \alpha(\gamma(X^1), \dots, \gamma(X^p), j(\eta^1), \dots, j(\eta^q)).$$

θ est alors, un isomorphisme de $A(W)$ -modules et ne dépend pas du choix de la connection γ .

On a, aussi, que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^{pq}(\underline{L}) & \xrightarrow{\theta} & \Omega^p(W, \wedge^q I^*) \\ \downarrow d_{01} & & \downarrow d \\ C^{p(q+1)}(\underline{L}) & \xrightarrow{\theta} & \Omega^p(W, \wedge^{q+1} I^*) \end{array} \quad (*)$$

Il en résulte:

Proposition 1.3.

L'application $\theta: (C^{P*}(\underline{L}), d_{01}) \rightarrow (\Omega^P(W, \wedge^* I^*), d)$ est un isomorphisme de complexes différentiels.

Soit $Z^{Pq} = \{a \in C^{Pq}(\underline{L}); d_{01}a = 0\}$ et $B^{Pq} = d_{01}(C^{P(q-1)}(\underline{L}))$.

La cohomologie du complexe $(C^{P*}(\underline{L}), d_{01})$ est notée $H^{P*}(L)$.

On a comme conséquence de la proposition 1.3 que $H^{Pq}(L)$ est isomorphe à $\Omega^P(W, H^q(I))$.

On obtient de la commutativité du diagramme (*), que

$$\theta(Z^{Pq}) = \Omega^P(W, Z^P(I))$$

et le morphisme surjectif de $A(W)$ -modules

$$J: Z^{Pq} \rightarrow \Omega^P(W, H^q(I)) \quad \text{où} \quad J = \rho \circ \theta|_{Z^{Pq}}$$

et $\rho: \Omega^P(W, Z^P(I)) \rightarrow \Omega^P(W, H^q(I))$ est la projection canonique.

Proposition 1.4.

Le diagramme suivant est commutative

$$\begin{array}{ccc} Z^{Pq} & \xrightarrow{d_{10}} & Z^{(p+1)q} \\ J \downarrow & & J \downarrow \\ \Omega^P(W, H^q(I)) & \xrightarrow{D} & \Omega^{p+1}(W, H^q(I)) \end{array}$$

Démonstration.

Soit U un ouvert qui trivialise $H^q(I)|_U$ et

$v^1, \dots, v^s: U \rightarrow H^q(I)$ une base de sections. Si $\alpha \in Z^{pq}$, $J(\alpha)|_U = \sum \alpha_i \otimes v^i$, $\alpha_i \in \Omega^p(U)$. De plus, $d_{10}\alpha \in Z^{(p+1)q}$ et

$$J(d_{10}\alpha)|_U = \sum \beta_i \otimes v^i, \quad \beta_i \in \Omega^{p+1}(U).$$

Donc, le diagramme est commutatif si $\beta_i = d\alpha_i$, $\forall i=1, \dots, s$.

Ceci est conséquence de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z^{pq} & \xrightarrow{d_{10}} & Z^{(p+1)q} \\ \theta \downarrow & & \theta \downarrow \\ \Omega^p(W) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1}(W) \end{array}$$

qui est immédiate des définitions.

I.4. Suites Spectrales [9], [13].

L'étude de la cohomologie des suites d'Atiyah est facilitée substantiellement en utilisant les techniques des suites spectrales. Dans ce qui suit, on va associer une suite spectrale au complexe différentiel $(C^*(\underline{L}), d)$.

Considérons pour chaque k -fixé, la filtration de $C^k(\underline{L}), F^p C^k(\underline{L}) = \{\alpha \in C^k(\underline{L}) / \alpha(\xi^1, \dots, \xi^k) = 0, \text{ si au moins } (k-p+1) \text{ des sections } \xi^i \text{ sont verticales}\}$.

On vérifie facilement que

$$F^p C^k(\underline{L}) = C^{k0}(\underline{L}) \oplus C^{(k-1)1}(\underline{L}) \oplus \dots \oplus C^{p(k-p)}(\underline{L}). \quad (3)$$

$$\text{Soient } Z_r^{pq} = \{\alpha \in F^p C^{p+q}(\underline{L}) / d\alpha \in F^{p+r} C^{p+q+1}(\underline{L})\},$$

$$B_r^{pq} = dZ_{r-1}^{(p-r+1)(q+r-2)} + Z_{r-1}^{(p+1)(q-1)},$$

$$E_r^{pq} = \frac{Z_r^{pq}}{B_r^{pq}},$$

$$d_r^{pq}: E_r^{pq} \rightarrow E_r^{(p+r)(q+1-r)}; d_r^{pq}[\alpha] = [d\alpha],$$

$$Z_{\underline{a}}^{pq} = \{\alpha \in F^p C^{p+q}(\underline{L}) / d\alpha = 0\},$$

$$B_{\underline{a}}^{pq} = F^p C^{p+q}(\underline{L}) \cap d(C^{p+q-1}(\underline{L})),$$

et

$$E_{\underline{a}}^{pq} = \frac{Z_{\underline{a}}^{pq}}{B_{\underline{a}}^{pq}}.$$

En utilisant (3) et rappelant que $Z_0^{pq} = F^p C^{p+q}(\underline{L})$ et

$$\begin{aligned} dZ_{-1}^{(p+1)(q-2)} &= dF^{p+1} C^{p+q-1}(\underline{L}) \subset F^{p+1} C^{p+q}(\underline{L}) = \\ &= Z_{-1}^{(p+1)(q-1)}, \text{ on obtient,} \end{aligned}$$

$$E_0^{pq} = C^{pq}(\underline{L}) \text{ et } d_0^{pq} = d_{01}.$$

Comme conséquence de la proposition 1.3, on parvient au résultat suivant: Les complexes différentiels (E_0^{pq}, d_0^{pq}) et $(\Omega^p(W, \Lambda^q I^*), d)$ sont isomorphes. Par conséquent,

$$E_1^{pq} = \Omega^p(W, H^q(I)). \quad (4)$$

On va maintenant, identifier les opérateurs d_1^{pq} et D . On observe initialement que $Z^{pq} \subset Z_1^{pq}$ et $\forall e \in E_1^{pq}$, il existe $e \in Z^{pq}$ tel que $[e] = e$.

Ainsi, l'application $s: Z^{pq} \rightarrow E_1^{pq}$; $s(a) = [a]$ est surjective.

Proposition 1.5.

Le diagramme suivant est commutative

$$\begin{array}{ccc} Z^{pq} & \xrightarrow{d_{10}} & Z^{(p+1)q} \\ s \downarrow & & s \downarrow \\ E_1^{pq} & \xrightarrow{d_1^{pq}} & E_1^{(p+1)q} \end{array}$$

Demonstration.

Il faut montrer que $[da] = [d_{10}a]$, $\forall a \in Z^{pq}$. On rappelle que

$$d = d_{10} + d_{01} + d_{2,-1}.$$

Si $a \in Z^{pq}$, $da = d_{10}a + d_{2,-1}a$. Mais, $d_{2,-1}a \in C^{(p+2)(q-1)}(L) \subset B_1^{(p+1)q}$ et donc, $[da] = [d_{10}a]$.

Soit $\theta^*: E_1^{pq} \rightarrow \Omega^p(W, H^q(I))$ l'isomorphisme défini par (4).

Alors, on vérifie que $\theta^*([a]) = J(a)$.

De plus, on a:

Proposition 1.6.

Le diagramme suivant est commutative

$$\begin{array}{ccc} E_1^{pq} & \xrightarrow{d_1^{pq}} & E_1^{(p+1)q} \\ \theta^* \downarrow & & \theta^* \downarrow \\ \Omega^p(W, H^q(I)) & \xrightarrow{D} & \Omega^{p+1}(W, H^q(I)) \end{array}$$

Par conséquent, les complexes différentiels (E_1^{pq}, d_1^{pq}) et $(\alpha^p(W, H^q(I)), D)$ sont isomorphes. On obtient, aussi, le résultat suivant:

Théorème 1.7.

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$ une suite d'Atiyah, $(C^*(\underline{L}), d)$ le complexe différentiel standard de L et $E_r^{*,*}$ la suite spectrale de $(C^*(\underline{L}), d)$. Alors,

$$H^p(W, H^q(I)) = E_2^{pq}, \quad \forall p, q.$$

Une conséquence de ce théorème, qui est extrêmement utile est:

Corolaire 1.8.

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$ une suite d'Atiyah, m la dimension de W , q la dimension de l'algèbre structurale de L et $n = m + q$. Alors,

$$H^n(L) = H^m(W, H^q(I)).$$

Démonstration.

Des définitions, on a $Z_2^{mq} = Z_{-}^{mq}$ et $B_2^{mq} = B_{-}^{mq}$. Ainsi,

$$E_2^{mq} = E_{-}^{mq}. \text{ On a aussi, } E_{-}^{mq} = \frac{F^m H^n(L)}{F^{m+1} H^n(L)}.$$

En rappelant que $F^r H^s(L) = \pi(F^r C^s(\underline{L}) \cap Z^s(\underline{L}))$, où $\pi: Z^s(\underline{L}) \rightarrow H^s(L)$ est la projection canonique, on obtient que $F^m H^n(L) = H^n(L)$ et $F^{m+1} H^n(L) = 0$. Donc, $E_{-}^{mq} = H^n(L)$. On utilise finalement le théorème 1.7 pour terminer la démonstration.

Exemple 1.5. [7].

Soit $A \in SL(2, \mathbb{Z})$, $\text{tr} A > 2$ et λ une valeur propre de A .

Alors, λ est un irrationnel et la direction propre associée à λ définit un flot linéaire dense en T^2 . On désigne par T_A^3 le fibré en tores T^2 sur le cercle S^1 , obtenu comme quotient de $T^2 \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence qu'identifie (z, t) et $(A(x), t+1)$. Le flot linéaire dense de T^2 définit sur T_A^3 un feuilletage transversalement complet. La variété basique est S^1 et la fibration $\pi: T_A^3 \rightarrow S^1$ est induite par la projection $T^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On a ainsi la suite d'Atiyah du feuilletage (T_A^3, F)

$$0 \rightarrow \underline{I} \rightarrow \iota(T_A^3, F) \rightarrow \underline{TS}^1 \rightarrow 0.$$

Dans ce cas, $I = E_{1/\lambda}$ (voir exemple 1.4) et $H^1(S^1, H^1(I)) = 0$. Utilisant le corolaire 1.8, on a

$$H^2(\iota(T_A^3, F)) = H^2(T_A^3, F) = 0.$$

On sait que

$$H^0(\iota(T_A^3, F)) = H^0(T_A^3, F) = \mathbb{R}$$

et ainsi la cohomologie des suites d'Atiyah (et en particulier la cohomologie basique des feuilletages transversalement complets) ne satisfait pas la dualité de Poincaré.

II. LA DUALITÉ DE POINCARÉ

II.1. Le Théorème de Hodge pour les suites d'Atiyah

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \xrightarrow{P} TW \rightarrow 0$ une suite d'Atiyah. Dans ce qui suit, on identifie les $\Lambda(W)$ -modules $C^k(\underline{L})$ et $\Lambda^k L^*$, où L^* est le

fibré dual de L . Soit $U \subset W$ un ouvert muni de coordonnées $(x^1, \dots, x^m)$ et qui trivialise $I^*|_U$:

On prend les sections $\alpha^1 = p^*(dx^1)$ et une base de section $\beta^1, \dots, \beta^q$ de $I^*|_U$.

Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, on définit $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \alpha^i$ où de manière équivalente $df(\zeta) = p(\zeta)(f)$, si $\zeta \in L|_U$.

Soit $\alpha \in \Lambda^k L^*$. Alors, $\alpha|_U = \sum_{i_1, \dots, i_k} \alpha^{i_1 \dots i_k} \alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k}$ et

$$\begin{aligned} d\alpha|_U &= \sum_{i_1 \dots i_k} df_{i_1 \dots i_k} \wedge \alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k} \\ &+ \sum (-1)^t \alpha^{i_1 \dots i_k} d(\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k}). \end{aligned}$$

Cette expression montre que d est un opérateur différentiel d'ordre 1. On va montrer que $(C^*(L), d)$ est un complexe elliptique.

Soit $(x, v) \in TW$, $v \neq 0$ et $f \in A(W)$ tels que $f(x) = 0$ et le gradient de f en x , $f'(x) = v$. Le symbole de l'opérateur d en (x, v) est par définition,

$$\sigma_1(d)(x, v)(\alpha(x)) = d((f-f(x))\alpha)(x) = (df)_x \wedge \alpha(x), \quad \forall \alpha \in \Lambda^k L^*.$$

Ceci implique que $(C^*(L), d)$ est un complexe elliptique.

On va supposer que W est compacte et que L est muni d'un produit interne. À partir de ce produit, on définit un produit interne sur L^* et un produit interne en L^* par

$$\langle \theta_1, \theta_2 \rangle = \int_W \langle \theta_1(x), \theta_2(x) \rangle du, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in L^*.$$

On étend ce produit aux éléments homogènes de $\Lambda^k L^*$ par

$$\langle \theta_1 \dots \theta_k, \omega_1 \dots \omega_k \rangle = \int_W \det \{ \langle \theta_i(x), \omega_j(x) \rangle \} du$$

et à $\Lambda^k L^*$ par linéarité.

Comme dans le cas général, [20], on a (si l'on note $d = d_k: \Lambda^k L^* \rightarrow \Lambda^{k+1} L^*$) les opérateurs adjoints d_k^* (relativement au produit interne $\langle, \rangle$), les opérateurs laplaciens $\Delta_k = d_k^* \circ d_k + d_{k-1} \circ d_{k-1}^*$ et les formes harmoniques de degré k

$$H^k = \{ \alpha \in \Lambda^k L^*; \Delta_k(\alpha) = 0 \}.$$

Un utilise le théorème 4.12 de [20], pour énoncer les résultats suivants:

Théorème 2.1.

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$ une suite d'Atiyah, où W est compacte. Soit $(C^*(\underline{L}), d)$ le complexe différentiel standard de L , où chaque $C^k(\underline{L})$ est muni du produit interne défini précédemment. Alors, pour chaque $k = 0, 1, \dots, n = \text{rang } L$, on a:

- i) $C^k(\underline{L}) = H^k + \text{Im } d_{k-1} + \text{Im } d_k^*$
- ii) H^k est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

En particulier, $H^k(\underline{L}) = H^k$, $\forall k = 0, 1, \dots, n$.

Corolaire 2.2.

a) Soit (M, F) un feuilletage transversalement complet, tel que la variété basique W est compacte. Alors, la cohomologie basique de (M, F) est de dimension finie.

b) Soit $P(W, \pi, G)$ un fibré principal de base W compacte et de groupe structural G . Alors, les groupes de cohomologie $H_G^*(P)$ sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

II.2. Le Théorème de Dualité.

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$, une suite D'Atiyah, où $\text{rang } L = n$. Supposons le fibré L orienté. Soit v sa forme volume. On a vu (exemple 1.5) qu'en général, v n'est pas harmonique. On donne une condition nécessaire et suffisante pour que v soit harmonique.

Théorème 2.3.

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$ une suite d'Atiyah, où L est de rang n , W est compacte, orientable et de dimension m et q est la dimension de l'algèbre structurale g de L .

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:

- i) $H^n(\underline{L}) \neq 0$
- ii) g est unimodulaire et $H^q(I)$ est trivial comme fibré vectoriel plat.
- iii) Il existe $\lambda \in C^{0q}(\underline{L})$ non nulle telle que $d_{10}\lambda = 0$.

Démonstration.

On sait que $H^n(L) = H^m(W, H^q(I))$. W étant orientable, on a $H^m(W, H^q(I)) = H^0(W, H^q(I)) \neq 0$. Ainsi, $H^n(\underline{L}) \neq 0$ si et seulement si il existe $\lambda \in H^q(I)$ telle que $D\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$. λ est donc, une section constante et non nulle de $H^q(I)$, qui est, par conséquent, trivial comme fibré vectoriel plat. Ceci montre que i) est équivalent à ii). D'ailleurs, $\Lambda^q g^* = H^q(g)$ et g est unimodulaire. Utilisant l'isomorphisme $C^{pq}(\underline{L}) = \Omega^0(W, \Lambda^q I^*) = \Omega^0(W, H^q(I))$ où d_{10} et D sont

identifiés, on obtient que $ii)$ est équivalent à $iii)$.

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$ une suite d'Atiyah qui satisfait les conditions du théorème 2.3 et supposons que $H^n(\underline{L}) \neq 0$. Alors, il existe $\lambda \in C^{0q}(\underline{L})$ non nulle telle que $d_{10}\lambda = 0$.

Soit $v = p^*(v_W) \wedge \lambda$, où v_W est une forme volume en W .

On utilise la condition $d_{10}\lambda = 0$ pour vérifier que v est une forme volume sur L . On en obtient, une application $A(W)$ -linéaire

$$Q: \Lambda^n L^* \rightarrow \mathfrak{a}^m(W); Q(v) = v_W.$$

Proposition 2.4.

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$ une suite d'Atiyah qui satisfait les conditions du théorème 2.3 et telle que $H^n(\underline{L}) \neq 0$. Alors, si $\alpha \in C^{n-1}(\underline{L})$, il existe $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{a}^{m-1}(W)$ telle que $Q(d\alpha) = d\tilde{\alpha}$.

Démonstration.

C'est conséquence de la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} Z^{(m-1)q} & \xrightarrow{\beta} & E^{(m-1)q} \\ d \downarrow & & d_1^{(m-1)q} \downarrow \\ Z^{mq} & \xrightarrow{\beta} & E_1^{mq} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} C^{m(q-1)}(\underline{L}) & \xrightarrow{\theta} & \mathfrak{a}^m(W, \wedge^{q-1} I^*) \\ d_{10} \downarrow & & \downarrow \\ C^{mq}(\underline{L}) & \xrightarrow{\theta} & \mathfrak{a}^m(W, \wedge^q I^*) \end{array}$$

et des égalités $Z^{mq} = C^{mq}(\underline{L})$ et $C^{n-q}(\underline{L}) = C^{(m-1)q}(\underline{L}) \oplus C^{m(q-1)}(\underline{L})$.

L'opérateur *.

Supposons dans ce qui suit que L est orienté de rang n , L muni d'un produit interne $\langle, \rangle$. Soit v une forme volume sur L . v étant une section différentiable de $\Lambda^n L^*$, il existe pour chaque $x \in W$, un voisinage ouvert U de x et sections différentiables $\alpha_1, \dots, \alpha_n: U \rightarrow L^*|_U$ telles que $\alpha_1(u), \dots, \alpha_n(u)$ est une base orthonormale de L_u^* et $v(u) = \alpha_1(u) \wedge \dots \wedge \alpha_n(u)$, $\forall u \in U$.

Pour chaque $k = 0, 1, \dots, n$, on définit le morphisme de fibrés vectoriels $*$: $\Lambda^k L^* \rightarrow \Lambda^{n-k} L^*$ tel que si $x \in W$,

$$*: \Lambda_x^k L^* \rightarrow \Lambda_x^{n-k} L^* \quad \text{est donné par}$$

$$*(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}) = s(\sigma) v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_{n-k}}$$

où $v_i = \alpha_i(x)$, comme définit précédemment, $j_1 < \dots < j_{n-k}$ est l'ensemble complémentaire de $i_1 < \dots < i_k$ dans $\{1, \dots, n\}$ et $s(\sigma)$ est le signal de la permutation

$$\sigma(1, \dots, n) = (i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}).$$

On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas des sections $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ choisies au dessus. Cependant, elle dépend du choix du produit interne $\langle, \rangle$.

C'est immédiat que $*$ est un morphisme différentiable. De plus, $*$ définit pour chaque k , un morphisme de $A(W)$ -module $\underline{\Lambda^k L^*} \rightarrow \underline{\Lambda^{n-k} L^*}$ qu'on note encore $*$ et qui satisfait, $**\alpha = (-1)^{k(n-k)} \alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda^k L^*$.

Supposons que $0 \rightarrow I \rightarrow L \xrightarrow{D} TW \rightarrow 0$ satisfait les conditions du théorème 2.3 et que $H^n(L) \neq 0$. On peut, alors, considérer la forme volume $v = p^*(v_W)\lambda$.

Pour les formes homogènes $\alpha = \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}$ et $\beta = \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_k}$, $i_1 < \dots < i_k$; définies sur un ouvert U , on a $\alpha \wedge (*\beta) = \epsilon \cdot v|_U$, où $\epsilon = 0$, si $\alpha \neq \beta$ et $\epsilon = 1$, si $\alpha = \beta$. Par conséquent,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_W Q(\alpha \wedge * \beta).$$

En utilisant la linéarité, du produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle$, du morphisme Q , de l'opérateur $*$ et du produit extérieur, on obtient que

$$\langle \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \rangle = \int_W Q(\tilde{\alpha} \wedge * \tilde{\beta}), \quad \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \underline{\Lambda^k L^*}.$$

On peut maintenant donner une description simple de l'opérateur adjoint d_k^* .

Proposition 2.5.

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$ une suite d'Atiyah qui satisfait les conditions du théorème 2.3 et telle que $H^n(\underline{L}) \neq 0$. Alors, $d_k^* = (-1)^{k-1} d_k^*$ et $\Delta_k = \Delta_{n-k}^*$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Démonstration.

Soit $\delta_k = (-1)^{k-1} d_k^*$ et $\alpha \in \underline{\Lambda^{k-1} L^*}$, $\beta \in \underline{\Lambda^k L^*}$.

On a, $d_k(\alpha \wedge * \beta) = d_k \alpha \wedge * \beta + (-1)^{k-1} \alpha \wedge d_k^* \beta = d_k \alpha \wedge * \beta - \alpha \wedge \delta_k \beta$.

Ainsi, $\langle d_k \alpha, \beta \rangle = \int_W Q(d_k \alpha \wedge * \beta) = \int_W Q(d_k(\alpha \wedge * \beta)) + \int_W Q(\alpha \wedge \delta_k \beta)$.

Le terme $\int_W Q(d_k(\alpha \wedge * \beta))$ est nul à cause de la proposition 2.4 et du théorème de Stokes.

Par conséquent, $\langle d_k \alpha, \beta \rangle = \int_W Q(\alpha \wedge * \delta_k \beta) = \langle \alpha, \delta_k \beta \rangle$ et par l'unicité de l'opérateur adjoint, on a $d_k^* = \delta_k$.

L'égalité $*\Delta_k = \Delta_{n-k}^*$ est conséquence immédiate de ce résultat.

On peut finalement énoncer notre résultat principal.

Théorème 2.6.

Soit $0 \rightarrow I \rightarrow L \rightarrow TW \rightarrow 0$ une suite d'Atiyah satisfaisant les conditions du théorème 2.3. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:

- i) La forme volume v est harmonique.
- ii) $H^n(\underline{L}) \neq 0$.
- iii) $H^*(\underline{L})$ vérifie la dualité de Poincaré.

Démonstration.

i) implique ii) par le théorème 2.1. Supposons que $H^n(\underline{L}) \neq 0$. Alors, $*\Delta_k = \Delta_{n-k}^*$ et par conséquent $*$ induit un isomorphisme $*: H^k \rightarrow H^{n-k}$ et donc ii) implique iii). Finalement, si $H^*(\underline{L})$ vérifie la dualité de Poincaré, on a immédiatement que $H^n(\underline{L}) \neq 0$ et de la proposition 2.6, $*\Delta_k = \Delta_{n-k}^*$.

Donc, $*\Delta_n v = \Delta_0^* v = \Delta_0 1 = 0$. Mais, $*$ est un isomorphisme; ainsi, $\Delta_n v = 0$ et v est harmonique.

II.3. Applications.

Basé sur la proposition 1.2 et sur le théorème 2.6 on peut énoncer le théorème suivant de dualité pour la cohomologie basique des feuilletages transversalement complets.

Théorème 2.7.

Soit (M, F) un feuilletage transversalement complet de codimension n et tel que la variété basique W est compact et orientable.

Alors, les conditions suivantes sont équivalents:

- i) La forme volume basique de F est harmonique.
- ii) $H^n(M, F) \neq 0$
- iii) $H^*(M, F)$ vérifie la dualité de Poincaré.

Remarque.

On obtient des résultats analogues pour la cohomologie $H_G^*(P)$, où $P = P(W, \pi, G)$ est un fibré principal. Basé sur le théorème 2.3 on peut construire des exemples de fibrés principaux P , où $H_G^n(P) = 0$, n le rang du fibré $L(P)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALMEIDA, R. et KUMPERA, A., Structure Produit dans la Catégorie des Algebroides de Lie - Anais da Academia Brasileira de Ciências - V.53, n° 2, 1981.
- [2] ALMEIDA, R. et MOLINO, P., Suites d'Atiyah et feuilletages transversalement complets - C.R.Ac.Paris, 300 (1985) pp.13-15.
- [3] ALMEIDA, R. et MOLINO, P., Suites d'Atiyah, Feuilletages et quantification géométrique - Séminaire de Géométrie Différentielle, 1984-1985 - Montpellier.
- [4] ATIYAH, M., Complex Analytic Connections on Fibre Bundles - Trans.Am.Math.Soc., 85 (1957) pp.181-207.

- [5] BOTT, R. and TU, L., Differential forms in algebraic Topology - GTM n° 82 - Springer-Verlag (1982).
- [6] BARROS, C.M., Théorie Générale du Calcul Différentiel Extérieur de Degré Arbitraire - Nepec, Rio de Janeiro, 1978.
- [7] CARRIÈRE, Y., Flots Riemanniens et Feuilletages Géodésibles de Codimension un Thèse de 3^{ème} Cycle - Université des Sciences et Techniques de Lille I.
- [8] EL KACIMI-ALAOUI A. et HECTOR, G. - Analyse Globale sur l'espace des feuilles d'un feuilletage Riemannien - Pub. IRMA-LILLE Vol. 5 - Fasc. 3.
- [9] GREUB, W., HALPERIN, S. and VANSTONE, R., Connections, Curvature and Cohomology - Academic Press (1973-1975).
- [10] GRIFFITHS, P. and MORGAN, J., Rational homotopy theory and differential forms - Birkhauser Verlag (1981).
- [11] KUMPERA, A., An Introduction to Lie groupoids - Nepec, Rio de Janeiro, 1971.
- [12] KUMPERA, A., and SPENCER, D., Lie Equations, vol. 1: General Theory Annals of Math. Studies n° 73, Princeton Univ. Press, 1972.
- [13] MACKENZIE, K., Cohomology of Locally Trivial groupoids and Lie Algebroids - Ph.D. thesis, Monash University, 1979.
- [14] MACKENZIE, K., Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry - London Math. Soc. Lect. Notes, 124 (1987).

- [15] MOLINO, P., Feuilletages transversalement complets et applications - Ann.Ec.Normale Sup., 10, 289-307(1977).
- [16] PRADINES, J., Théorie de Lie pour les groupoides différentiables. Calcul différentiel dans la catégorie des groupoids infinitésimaux - C.R.Acad.Sc. Paris, t. 264, p.245-248, 1967.
- [17] REINHART, B., Harmonic integrals on foliated manifolds - Am.J. of Math., (1974), 185-187.
- [18] SCHWARZ, G.W., On the de Rham cohomology of the leaf space of a foliation - Topology, 13, (1974), 185-187.
- [19] SILVA, A.M.F., Atiyah Sequences and Complete Closed Pseudo-groups preserving a local Parallelism - Université de Genève - Section de Mathématiques, 1987.
- [20] WELLS, R.O., Differential Analysis on Complex Manifolds - GTM n° 65 - Springer-Verlag (1979).

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO PAULO - BRASIL

TRABALHOS DO DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TITULOS PUBLICADOS

- 80-01 PLETCH, A. Local freeness of profinite groups. 10 p.
- 80-02 PLETCH, A. Strong completeness in profinite groups. 8 p.
- 80-03 CARNIELLI, W.A. & ALCANTARA, L.P. de Transfinite induction on ordinal configurations. 22 p.
- 80-04 JONES RODRIGUES, A.R. Integral representations of cyclic p-groups. 13 p.
- 80-05 CORRADA, M. & ALCANTARA, L.P. de Notes on many-sorted systems. 25 p.
- 80-06 POLCINO MILIES, F.C. & SEHGAL, S.K. FC-elements in a group ring. 10 p.
- 80-07 CHEN, C.C. On the Ricci condition and minimal surfaces with constantly curved Gauss map. 10 p.
- 80-08 CHEN, C.C. Total curvature and topological structure of complete minimal surfaces. 21 p.
- 80-09 CHEN, C.C. On the image of the generalized Gauss map of a complete minimal surface in R^4 . 8 p.
- 81-10 JONES RODRIGUEZ, A.R. Units of ZC_p . 7 p.
- 81-11 KOTAS, J. & COSTA, N.C.A. da Problems of model and discursive logics. 35 p.
- 81-12 BRITO, F.B. & GONÇALVES, D.L. Algebras não associativas, sistemas diferenciais polinomiais homogêneos e classes características. 7 p.
- 81-13 POLCINO MILIES, F.C. Group rings whose torsion units form a subgroup II. Iv. (não paginado).
- 81-14 CHEN, C.C. An elementary proof of Calabi's theorems on holomorphic curves. 5 p.
- 81-15 COSTA, N.C.A. da & ALVES, E.H. Relations between paraconsistent logic and many-valued logic. 8 p.
- 81-16 CASTILLA, M.S.A.C. On Przymusiński's theorem. 6 p.
- 81-17 CHEN, C.C. & GOES, C.C. Degenerate minimal surfaces in R^4 . 21 p.
- 81-18 CASTILLA, M.S.A.C. Imagens inversas de algumas aplicações fechadas. 11 p.
- 81-19 ARAGONA VALLEJO, A.J. & EXEL FILHO, R. An infinite dimensional version of Hartogs' extension theorem. 9 p.
- 81-20 GONÇALVES, J.Z. Groups rings with solvable unit groups. 15p.
- 81-21 CARNIELLI, W.A. & ALCANTARA, L.P. de Paraconsistent algebras. 16 p.
- 81-22 GONÇALVES, D.L. Nilpotent actions. 10 p.
- 81-23 COELHO, S.P. Group rings with units of bounded exponent over the center. 25 p.
- 81-24 PARMENTER, M.M. & POLCINO MILIES, F.C. A note on isomorphic group rings. 4 p.
- 81-25 MERKLEN GOLDSCHMIDT, H.A. Hereditary algebras with maximum spectra are of finite type. 10 p.
- 81-26 POLCINO MILIES, F.C. Units of group rings: a short survey. 32 p.

- 81-27 CHEN, C.C. & GACKSTATTER, F. Elliptic and hyper-elliptic functions and complete minimal surfaces with handles. 14 p.
- 81-28 POLCINO MILIES, F.C. A glance at the early history of group rings. 22 p.
- 81-29 FERRER SANTOS, W.R. Reductive actions of algebraic groups on affine varieties. 52 p.
- 81-30 COSTA, N.C.A. da The philosophical import of paraconsistent logic. 26 p.
- 81-31 GONÇALVES, D.L. Generalized classes of groups, spaces c-nilpotent and "the Hurewicz theorem". 30 p.
- 81-32 COSTA, N.C.A. da & MORTENSEN, Chris. Notes on the theory of variable binding term operators. 18 p.
- 81-33 MERKLEN GOLDSCHMIDT, H.A. Homogenes 1-hereditary algebras with maximum spectra. 32 p.
- 81-34 PERESI, L.A. A note on semiprime generalized alternative algebras. 10 p.
- 81-35 MIRAGLIA NETO, F. On the preservation of elementary equivalence and embedding by filtered powers and structures of stable continuous functions. 9 p.
- 81-36 FIGUEIREDO, G.V.R. Catastrophe theory: some global theory a full proof. 91 p.
- 82-37 COSTA, R.C.F. On the derivations of gemetic algebras. 17 p.
- 82-38 FIGUEIREDO, G.V.R. A shorter proof of the Thom-Zeeman global theorem for catastrophes of cod ≤ 5 . 7 p.
- 82-39 VELOSO, J.M.M. Lie equations and Lie algebras: the intrasitive case. 97 p.
- 82-40 GOES, C.C. Some results about minimal immersions having flat normal bundle. 37 p.
- 82-41 FERRER SANTOS, W.R. Cohomology of comodules II. 15 p.
- 82-42 SOUZA, V.H.G. Classification of closed sets and diffeos of one-dimensional manifolds. 15 p.
- 82-43 GOES, C.C. The stability of minimal cones of codimension greater than one in R_n . 27 p.
- 82-44 PERESI, L.A. On automorphisms of gemetic algebras. 27 p.
- 82-45 POLCINO MILIES, F.C. & SEHGAL, S.K. Torsion units in integral group rings of metacyclic groups. 18 p.
- 82-46 GONÇALVES, J.Z. Free subgroups of units in group rings. 8 p.
- 82-47 VELOSO, J.M.M. New classes of intransitive simple Lie pseudogroups. 8 p.
- 82-48 CHEN, C.C. The generalized curvature ellipses and minimal surfaces. 10 p.
- 82-49 COSTA, R.C.F. On the derivation algebra of zygotie algebras for polyploidy with multiple alleles. 24 p.
- 83-50 GONÇALVES, J.Z. Free subgroups in the group of units of group rings over algebraic integers. 3 p.

- 83-51 MANDEL, A. & GONÇALVES, J.Z. Free k -triples in linear groups. 7 p.
- 83-52 BRITO, F.G.B. A remark on closed minimal hypersurfaces of S^4 with second fundamental form of constant length. 12 p.
- 83-53 KIIHL, J.C.S. U -structures and sphere bundles. 8 p.
- 83-54 COSTA, R.C.F. On genetic algebras with prescribed derivations. 23 p.
- 83-55 SALVITTI, R. Integrabilidade das distribuições dadas por subálgebras de Lie de codimensão finita no $gh(n, C)$. 4 p.
- 83-56 MANDEL, A. & GONÇALVES, J.Z. Construction of open sets of free k -Tuples of matrices. 18 p.
- 83-57 BRITO, F.G.B. A remark on minimal foliations of codimension two. 24 p.
- 83-58 GONÇALVES, J.Z. Free groups in subnormal subgroups and the residual nilpotence of the group of units of group rings. 9 p.
- 83-59 BELOQUI, J.A. Modulus of stability for vector fields on 3-manifolds. 40 p.
- 83-60 GONÇALVES, J.Z. Some groups not subnormal in the group of units of its integral group ring. 8 p.
- 84-61 GOES, C.C. & SIMOES, P.A.Q. Imersões mínimas nos espaços hiperbólicos. 15 p.
- 84-62 GIANBRUNO, A.; MISSO, P. & POLCINO MILIES, F.C. Derivations with invertible values in rings with involution. 12 p.
- 84-63 FERRER SANTOS, W.R. A note on affine quotients. 6 p.
- 84-64 GONÇALVES, J.Z. Free-subgroups and the residual nilpotence of the group of units of modular and p -adic group rings. 12 p.
- 84-65 GONÇALVES, D.L. Fixed points of S^1 -fibrations. 18 p.
- 84-66 RODRIGUES, A.A.M. Contact and equivalence of submanifolds of homogenous spaces. 15 p.
- 84-67 LOURENÇO, M.L. A projective limit representation of (DFC)-spaces with the approximation property. 20 p.
- 84-68 FORNARI, S. Total absolute curvature of surfaces with boundary. 25 p.
- 84-69 BRITO, F.G.B. & WALCZAK, P.G. Totally geodesic foliations with integral normal bundles. 6 p.
- 84-70 LANGEVIN, R. & POSSANI, C. Quase-folhações e integrais de curvatura no plano. 26 p.
- 84-71 OLIVEIRA, M.E.G.G. de Non-orientable minimal surfaces in R^n . 41 p.
- 84-72 PERESI, L.A. On baric algebras with prescribed automorphisms. 42 p.
- 84-73 MIRAGLIA NETO, F. & ROCHA FILHO, G.C. The measurability of Riemann integrable-function with values in Banach spaces and applications. 27 p.
- 84-74 MERKLEN GOLDSCHMIDT, H.A. Artin algebras which are equivalent to a hereditary algebra modulo pre-projectives. 38 p.
- 84-75 GOES, C.C. & SIMOES, P.A.Q. The generalized Gauss map of minimal surfaces in H^3 and H^4 . 16 p.

- 84-76 GONÇALVES, J.Z. Normal and subnormal subgroups in the group of units of a group rings. 13 p.
- 85-77 ARAGONA VALLEJO, A.J. On existence theorems for the δ operator on generalized differential forms. 13 p.
- 85-78 POLCINO MILIES, C.; RITTER, J. & SEHGAL, S.K. On a conjecture of Zassenhaus on torsion units in integral group rings II. 14 p.
- 85-79 JONES RODRIGUEZ, A.R. & MICHLER, G.O. On the structure of the integral Green ring of a cyclic group of order p^2 . The Jacobson radical of the integral Green ring of a cyclic group of order p^2 . 26 p.
- 85-80 VELOSO, J.M.M. & VERDERESI, J.A. Three dimensional Cauchy-Riemann manifolds. 19 p.
- 85-81 PERESI, L.A. On baric algebras with prescribed automorphisms II. 18 p.
- 85-82 KNUDSEN, C.A. O impasse aritmo-geométrico e a evolução do conceito de número na Grécia antiga. 43p.
- 85-83 VELOSO, J.M.M. & VERDERESI, J.A. La géométrie, le problème d'équivalence et la classification des CR-varietés homogènes en dimension 3. 30 p.
- 85-84 GONÇALVES, J.Z. Integral group rings whose group is solvable, an elementary proof. 11 p.
- 85-85 LUCIANO, O.O. Nebuleuses infinitesimement fibrées. 5 p.
- 85-86 ASPERTI, A.C. & DAJCZER, M. Conformally flat Riemannian manifolds as hypersurfaces of the ligh cone. 8 p.
- 85-87 BELOQUI, J.A. A quasi-transversal Hopf bifurcations. 11 p.
- 85-88 POLCINO MILIES, F.C. & RAPHAEL, D.M. A note on derivations with power central values in prime rings. 7 p.
- 85-89 POLCINO MILIES, F.C. Torsion units in group rings and a conjecture of H.J.Zassenhaus. 14 p.
- 86-90 LOURENÇO, M.L. Riemann domains over (DFC) spaces. 32 p.
- 86-91 ARAGONA VALLEJO, A.J. & FERNANDES, J.C.D. The Hartogs extension theorem for holomorphic generalized functions. 9 p.
- 86-92 CARRARA ZANETIC, V.L. Extensions of immersions in dimension two. 27 p.
- 86-93 PERESI, L.A. The derivation algebra of gametic and zygotic algebras for linked loci. 25 p.
- 86-94 COELHO, S.P. A note on central idempotents in group ring. 5 p.
- 86-95 PERESI, L.A. On derivations of baric algebras with prescribed automorphisms. 21 p.
- 86-96 COELHO, F.U. A generalization of a theorem of Todorov on preprojectives partitions. 18 p.
- 86-97 ASPERTI, A.C. A note on the minimal immersions of the two-sphere. 11 p.
- 86-98 COELHO, S.P. & POLCINO MILIES, F.C. A note on central idempotents in group rings II. 8 p.

NOVA SERIE

- 86-01 : GOODAIRE, E.G. & POLCINO MILIES, F.C. Isomorphisms of integral alternative loop rings. 11 p.
- 86-02 WALCZAK, P.G. Foliations which admit the most mean curvature functions. 11 p.
- 86-03 OLIVEIRA, M.E.G.G. Minimal Klein bottles with one end in R^3 and R^4 . 12 p.
- 86-04 MICALI, A. & VILLAMAYOR, O.E. Homologie de Hochschild de certaines algebres de groupes. 11 p.
- 86-05 OLIVEIRA, M.E.G.G. Minimal Klein bottles in R^3 with finite total curvature. 9 p.
- 86-06 CARRARA ZANETIC, V.L. Classification of stable maps between 2-manifolds with given singular set image. 22 p.
- 87-01 BRITO, F.G.B. & WALCZAK, P.G. Total curvature of orthogonal vector fields on three-manifolds. 4 p.
- 87-02 BRITO, F.G.B. & LEITE, M.L. A remark on rotational hypersurfaces of S_n . 13 p.
- 87-03 GONÇALVES, J., RITTER, J. & SEHGAL, S. Subnormal subgroups in $U(ZG)$. 13 p.
- 87-04 ARAGONA VALLEJO, A.J. & COLOMBEAU, J.F. The interpolation theorem for holomorphic generalized functions. 12 p.
- 87-05 ALMEIDA, S.C. de & BRITO, F.G.B. Immersed hypersurfaces of a space form with distinct principal curvatures. 9 p.
- 87-06 ASPERTI, A.C. Generic minimal surfaces. 21 p.
- 87-07 GOODAIRE, E.G. & POLCINO MILIES, F.C. Torsion units in alternative group rings. 17 p.
- 87-08 MERKLEN GOLDSCHMIDT, H.A. Algebras which are equivalent to a hereditary algebra modulo preprojectives II. 27 p.
- 87-09 REYNOL FILHO, A. P-localization of some classes of groups. 30 p.
- 88-01 CARLSON, J.F. & JONES, A. An exponential property of lattices over group rings. 22 p.
- 88-02 CARLSON, J.F. & JONES, A. Wild categories of periodic modules. 6 p.
- 88-03 SALLUM, E.M. The nonwandering set of flows on a Reeb foliation. 13 p.
- 88-04 ALMEIDA, R. Cohomologie des suites d'Atiyah. 14 p.