



Escola Politécnica - EPBC



31200053602

BT/PEF-8704

ESTADO PLANO DE TENSÃO
(MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS E
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS)

Henrique de B. Costa *

Victor M. S. Lima**

* Professor Assistente Doutor

**Professor Titular

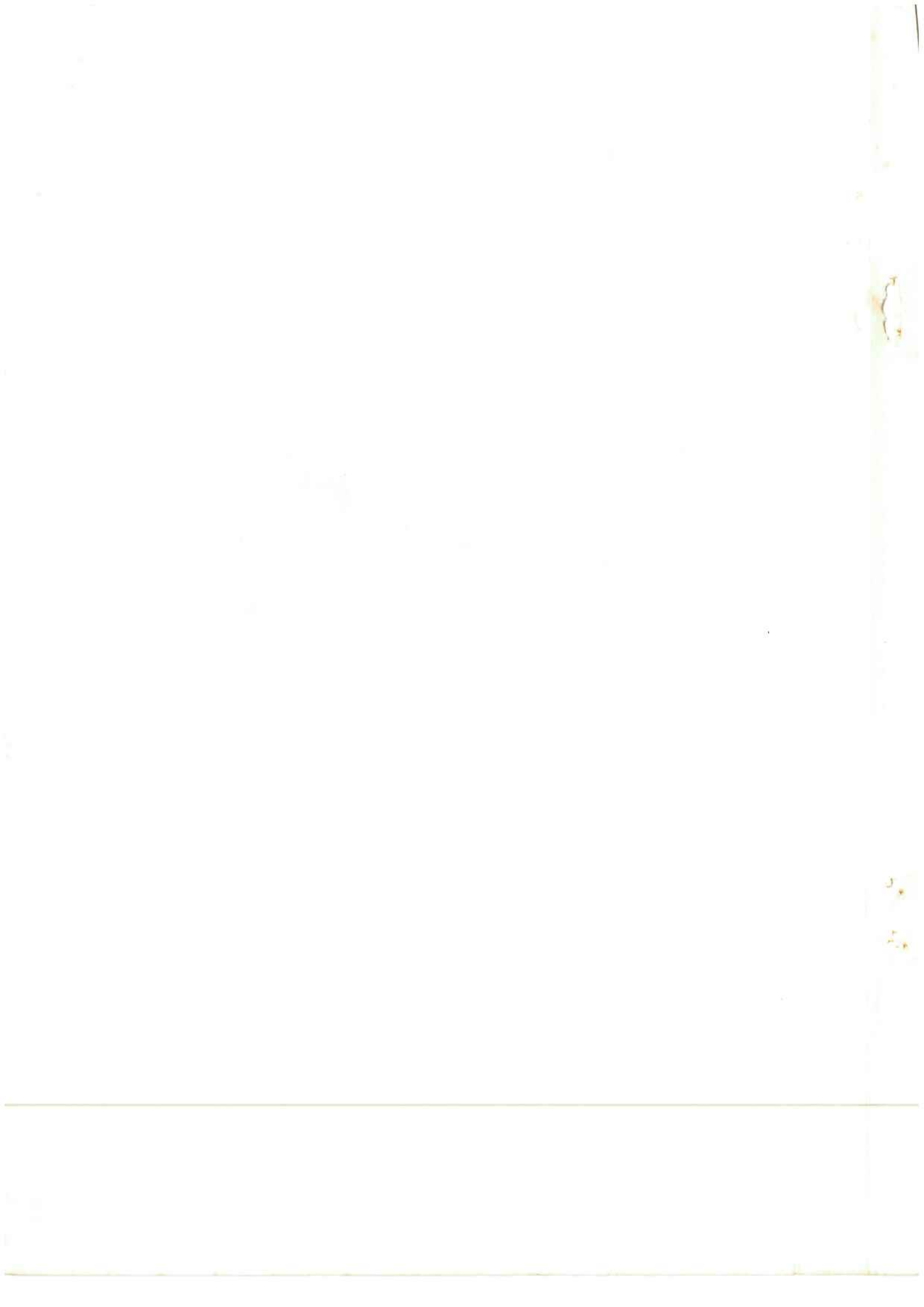
(recebido em 9/3/87)

EDITOR CHEFE

C.E.N.Mazzilli

COMISSÃO EDITORIAL

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------|
| - Engenharia de Solos | W.Hachich |
| - Estruturas de Concreto | P.B.Fusco |
| - Estruturas Metálicas e de Madeira | P.B.Fusco |
| - Interação Solo-Estrutura | C.E.M.Maffei |
| - Mecânica Aplicada | D.Zagottis |
| - Métodos Numéricos | I.Q.Barros |
| - Pontes e Grandes Estruturas | J.C.Figueiredo Ferraz |
| - Teoria das Estruturas | V.M.Souza Lima |



PREÂMBULO

Este trabalho é o primeiro de uma série de quatro, abaixo relacionados, que os autores desenvolveram no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da EPUSP:

- . Estado Plano de Tensão. Resíduos Ponderados e Elementos Finitos
- . Estudo das Placas. Resíduos Ponderados e Elementos Finitos
- . Teoria de Segunda Ordem das Placas. Estudo da Rigidez Secante
- . Teoria de Segunda Ordem das Placas. Estudo da Rigidez Tangente

Nos quatro artigos, intimamente ligados entre si, procura-se mostrar, de forma simples e precisa, a natural afinidade que existe entre as formulações diferencial e integral - incluída, nesta última, a discretização por elementos finitos - no que diz respeito ao problema das placas elásticas delgadas, de comportamento geometricamente não-linear.

No primeiro boletim é deduzida a matriz de rigidez das chapas, em teoria de primeira ordem.

O segundo boletim é dedicado à obtenção da matriz de rigidez das placas delgadas de comportamento linear.

No terceiro se mostra como chegar à matriz de rigidez secante das placas, sob as hipóteses de uma teoria de segunda ordem, de caráter simplificado. Também se fala algo a respeito do fenômeno da flambagem de chapas.

Finalmente, no último boletim se obtém a matriz de rigidez tangente das placas, a partir da matriz de rigidez secante deduzida no boletim anterior. Além disso, uma sugestão é feita, no que concerne às forças de membrana, no sentido de facilitar consideravelmente a construção da matriz de rigidez tangente, em cada incremento (ou iteração).

Na introdução do Método dos Elementos Finitos, utiliza-se sempre a formulação integral que corresponde à interpretação dada



por Galerkin ao Método dos Resíduos Ponderados. Tal conduta permite o ataque direto das equações diferenciais regentes do fenômeno, quer existam ou não princípios variacionais ligados à questão. Trata-se, portanto, de um procedimento de largo espectro e os conceitos correlatos têm aplicação praticamente ilimitada.

1. EQUACIONAMENTO DIFERENCIAL

Para uma chapa construída de material homogêneo e isotrópico, as forças de membrana $N_x = h\sigma_x$, $N_y = h\sigma_y$ e $N_{xy} = h\tau_{xy}$ são expressas por (usa-se a notação usual; veja-se por exemplo, [3]):

$$N_x = \frac{hE}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) = \frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$N_y = \frac{hE}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) = \frac{hE}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$N_{xy} = \frac{hE}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{hE}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3)$$

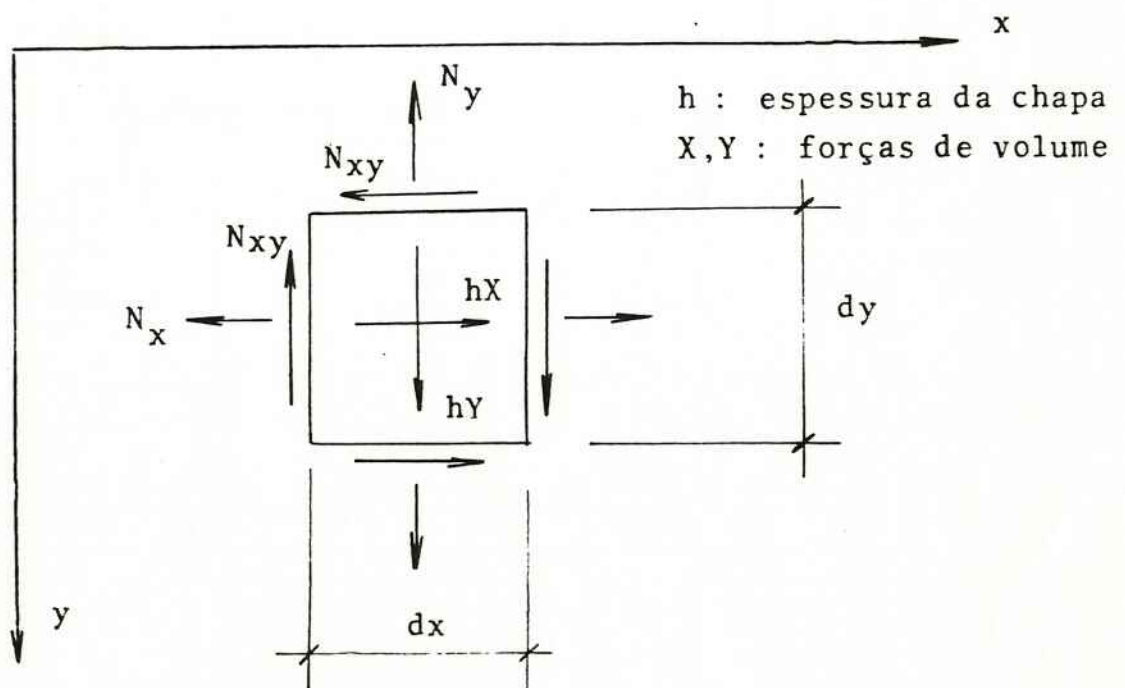


FIGURA 1

O equilíbrio do elemento infinitesimal da figura 1 fornece as seguintes equações:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + hX = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + hY = 0 \quad (5)$$

Introduzindo-se as expressões (1), (2) e (3) nas equações de equilíbrio (4) e (5), obtêm-se um sistema de duas equações diferenciais a duas incógnitas: os deslocamentos u e v de cada ponto da chapa. São as conhecidas equações de Navier.

Quanto às condições de contorno das equações de Navier, considere-se a fronteira da chapa dividida em duas partes, C_d e C_σ :

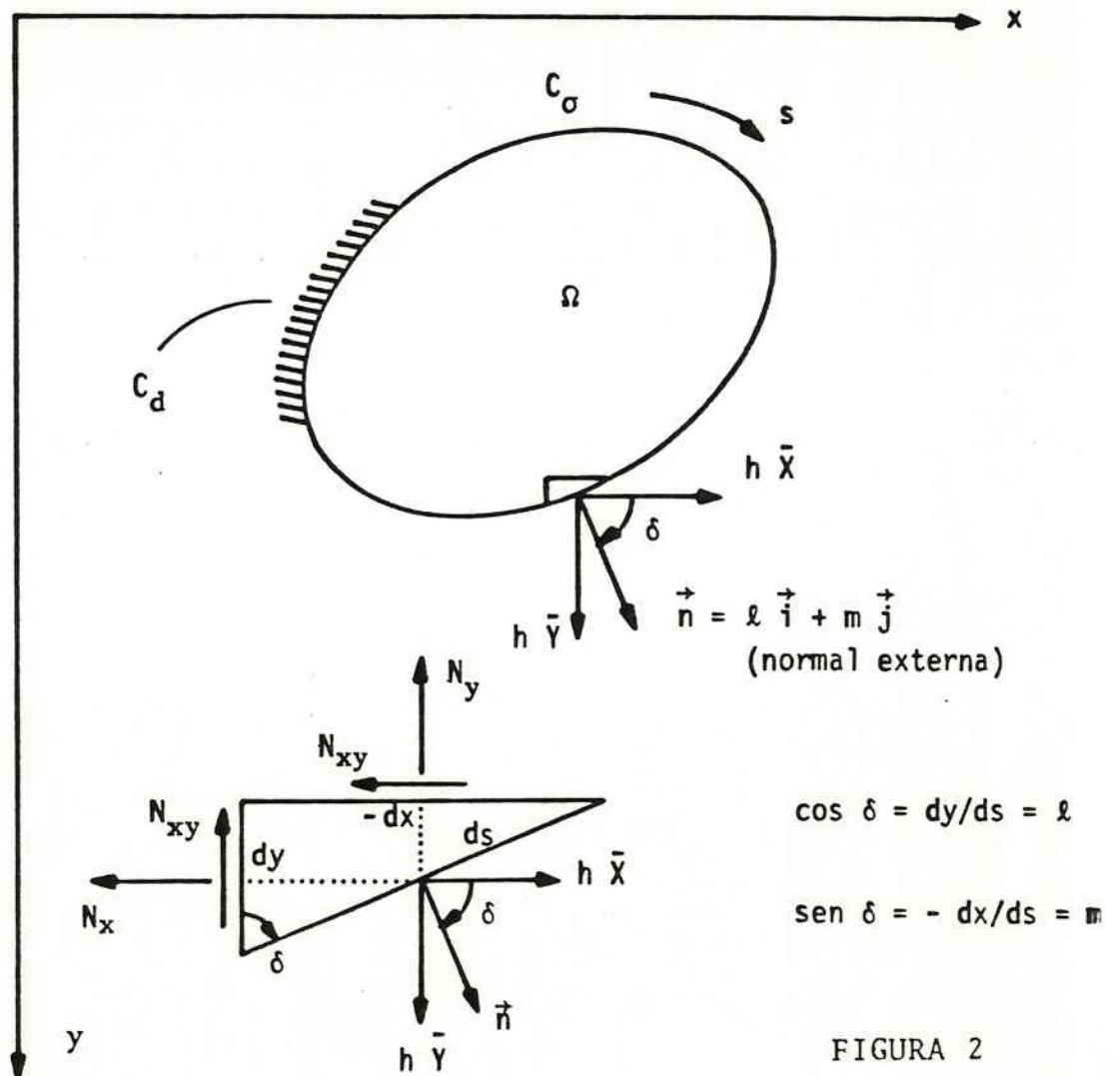


FIGURA 2

Em C_d os deslocamentos são conhecidos:

$$u = \bar{u} \quad (6)$$

$$v = \bar{v} \quad (7)$$

Estas são as condições de contorno essenciais (ou geométricas).

Em C_σ as forças de membrana contrabalançam o carregamento externo aplicado. Do equilíbrio do prisma elementar da figura 2, vêm:

$$\ell N_x + m N_{xy} = h\bar{X} \quad (8)$$

$$m N_y + \ell N_{xy} = h\bar{Y} \quad (9)$$

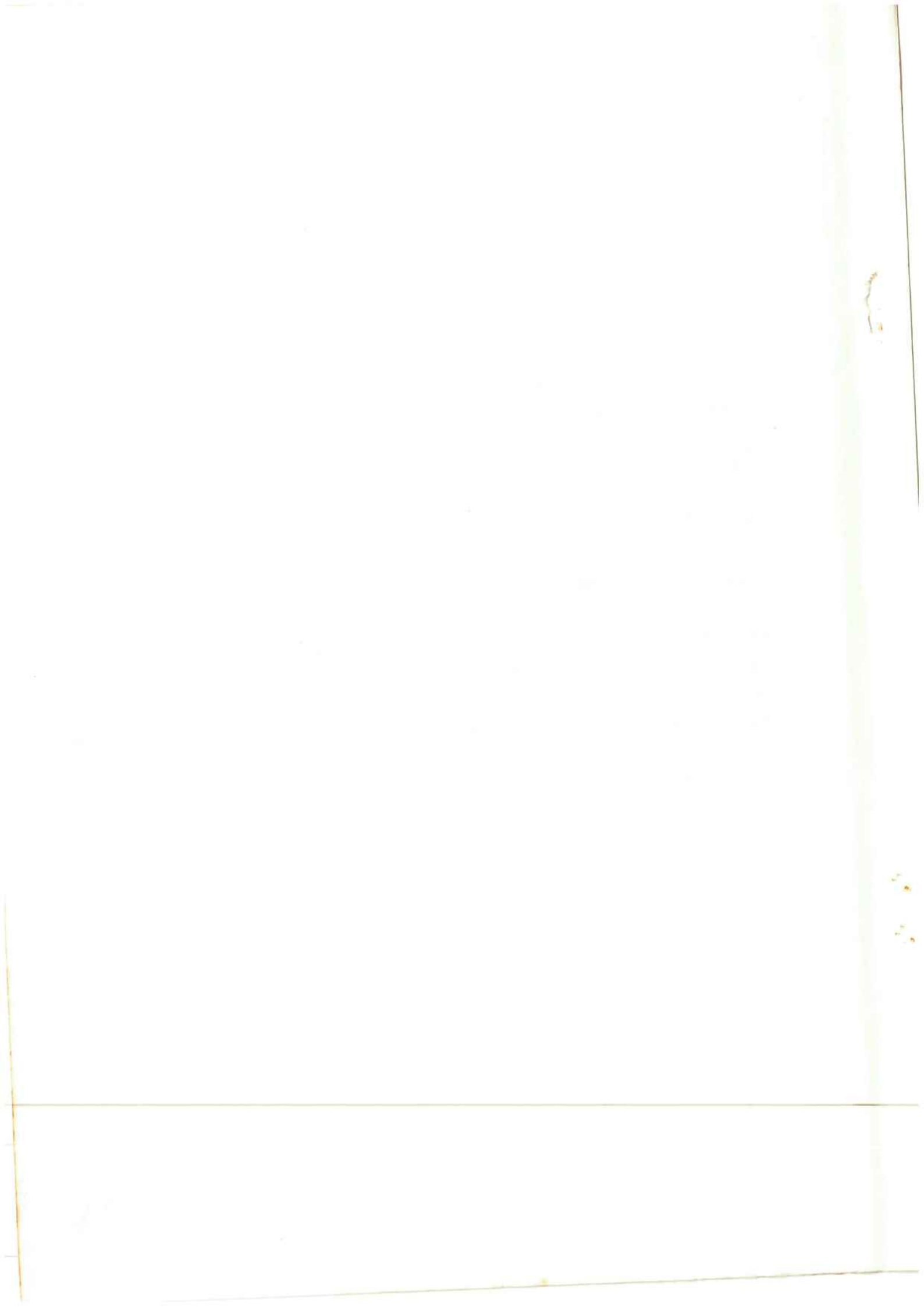
Estas são as condições de contorno naturais (ou estáticas).

Há, ainda, a considerar a chamada condição mista de contorno. É aquela que acontece num trecho da fronteira onde são impostos os deslocamentos numa determinada direção, sendo que na outra direção está aplicado um carregamento externo conhecido. Há dois casos possíveis: as condições (6) e (9), ou as condições (7) e (8).

2. MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Considere-se uma função arbitrária $\chi = \chi(x,y)$, contínua e derivável no domínio da chapa, e que seja nula em C_d . Multipliquem-se ambos os membros de (4) pela função χ . Em seguida, por integração na chapa, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + hX \right) d\Omega = 0 \quad (10)$$



Demonstra-se que se a equação integral acima se cumpre para qualquer χ , então a equação diferencial (4) será cumprida em todo e qualquer ponto da chapa. A recíproca é imediata.

Suponha-se a existência de uma solução aproximada $\hat{u}(x,y)$, e $\hat{v}(x,y)$, com a qual, fazendo-se uso das fórmulas (1), ~~(2)~~ e (3), se determinam $\hat{N}_x(x,y)$ e $\hat{N}_{xy}(x,y)$. A injeção destas últimas em (4) provoca:

$$\frac{\partial \hat{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_{xy}}{\partial y} + hX \neq 0$$

O primeiro membro da desigualdade acima representa o erro (ou resíduo) obtido ao se introduzir a solução aproximada na equação diferencial de equilíbrio.

Portanto, o primeiro membro de (10), com $N_x = \hat{N}_x$ e $N_{xy} = \hat{N}_{xy}$, será a integral de tais resíduos, ponderados pela função χ . É óbvio que a integral em questão não será necessariamente igual a zero. Entretanto, forçando-a a se anular, obtêm-se interessantes conclusões a respeito da solução aproximada, conforme será esclarecido mais adiante.

Continuando, integrem-se por partes as duas primeiras parcelas do primeiro membro de (10). Resultam:

$$\int_{\Omega} \chi \frac{\partial N_x}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} N_x d\Omega + \int_{C_{\sigma}} \chi N_x \ell ds$$

$$\int_{\Omega} \chi \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} N_{xy} d\Omega + \int_{C_{\sigma}} \chi N_{xy} m ds$$



A rigor, as integrais acima, de contorno, deveriam ser desenvolvidas ao longo de toda a fronteira da chapa, mas como $\chi = 0$ em C_d , elas serão calculadas apenas em C_σ .

Substituindo os resultados acima em (10), e considerando (8), chega-se a:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} N_x + \frac{\partial \chi}{\partial y} N_{xy} \right) d\Omega = h \int_{\Omega} \chi X d\Omega + h \int_{C_\sigma} \chi \bar{X} ds \quad (11)$$

Logrou-se, assim, introduzir naturalmente, na formulação do problema, a condição de contorno (8), a qual em virtude deste fato se denomina natural.

A expressão (11) é conhecida como a forma fraca de (10), por ser mais permissiva, isto é, ela admite uma menor ordem de continuidade na determinação das funções N_x e N_{xy} , embora exija, por outro lado, uma maior ordem de continuidade ao se definirem as funções χ .

Operando de maneira análoga com a equação de equilíbrio (5) e a condição de contorno (9), obtém-se:

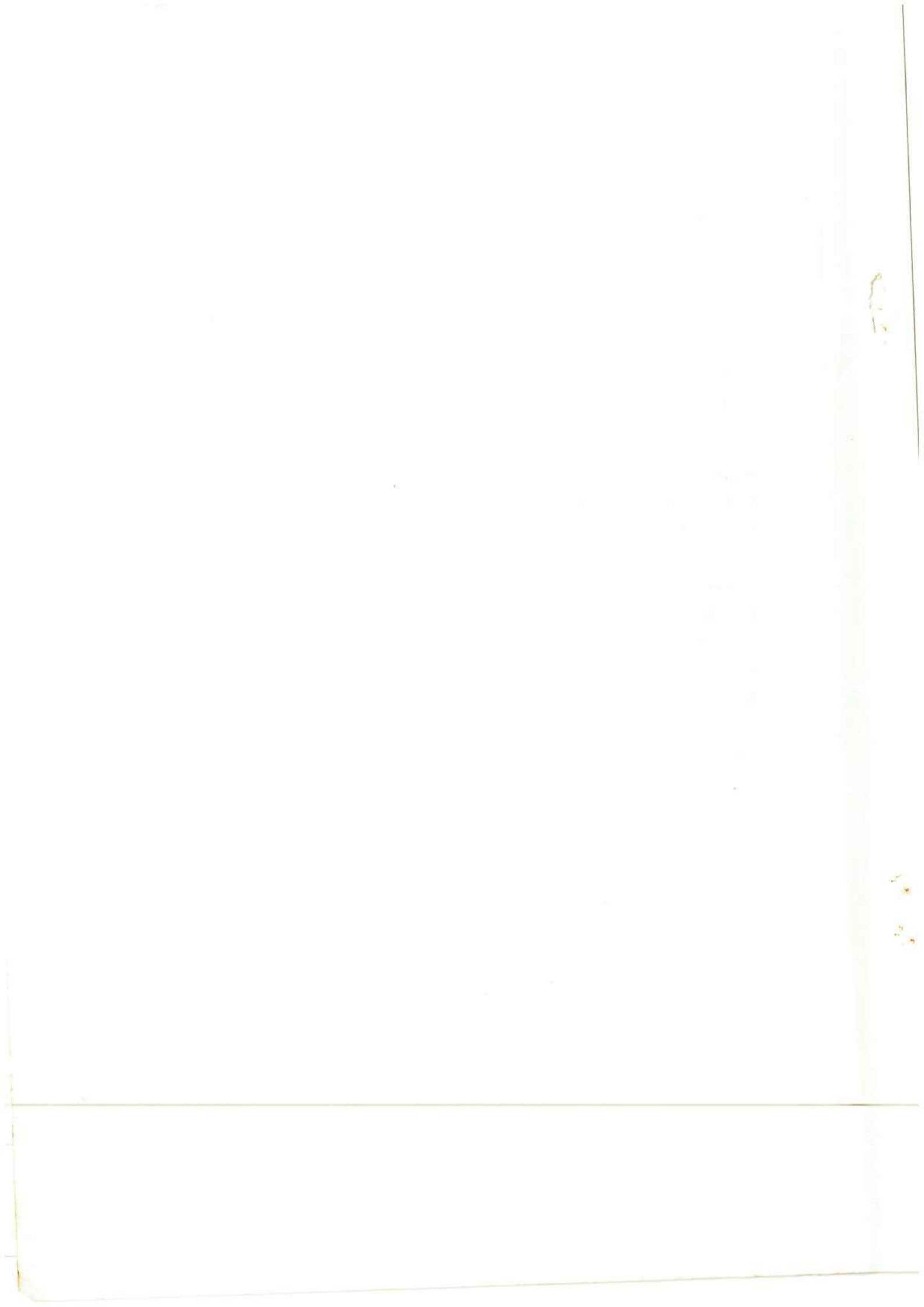
$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} N_y + \frac{\partial \chi}{\partial x} N_{xy} \right) d\Omega = h \int_{\Omega} \chi Y d\Omega + h \int_{C_\sigma} \chi \bar{Y} ds \quad (12)$$

Admita-se agora a seguinte solução aproximada (neste ponto introduz-se a aproximação do método):

$$\hat{u} = u_0 + \sum_{j=1}^n a_j \chi_j$$

(13)

$$\hat{v} = v_0 + \sum_{j=1}^n b_j \chi_j$$



onde as funções u_0 e v_0 satisfazem, em C_d , às condições de contorno essenciais

$$\begin{aligned} u_0 &= \bar{u} \\ v_0 &= \bar{v} \end{aligned} \quad \text{em } C_d$$

que são assim chamadas pelo fato de que devem ser necessariamente levadas em conta, na escolha da função de ponderação χ , sob a forma:

$$\chi = 0 \text{ em } C_d$$

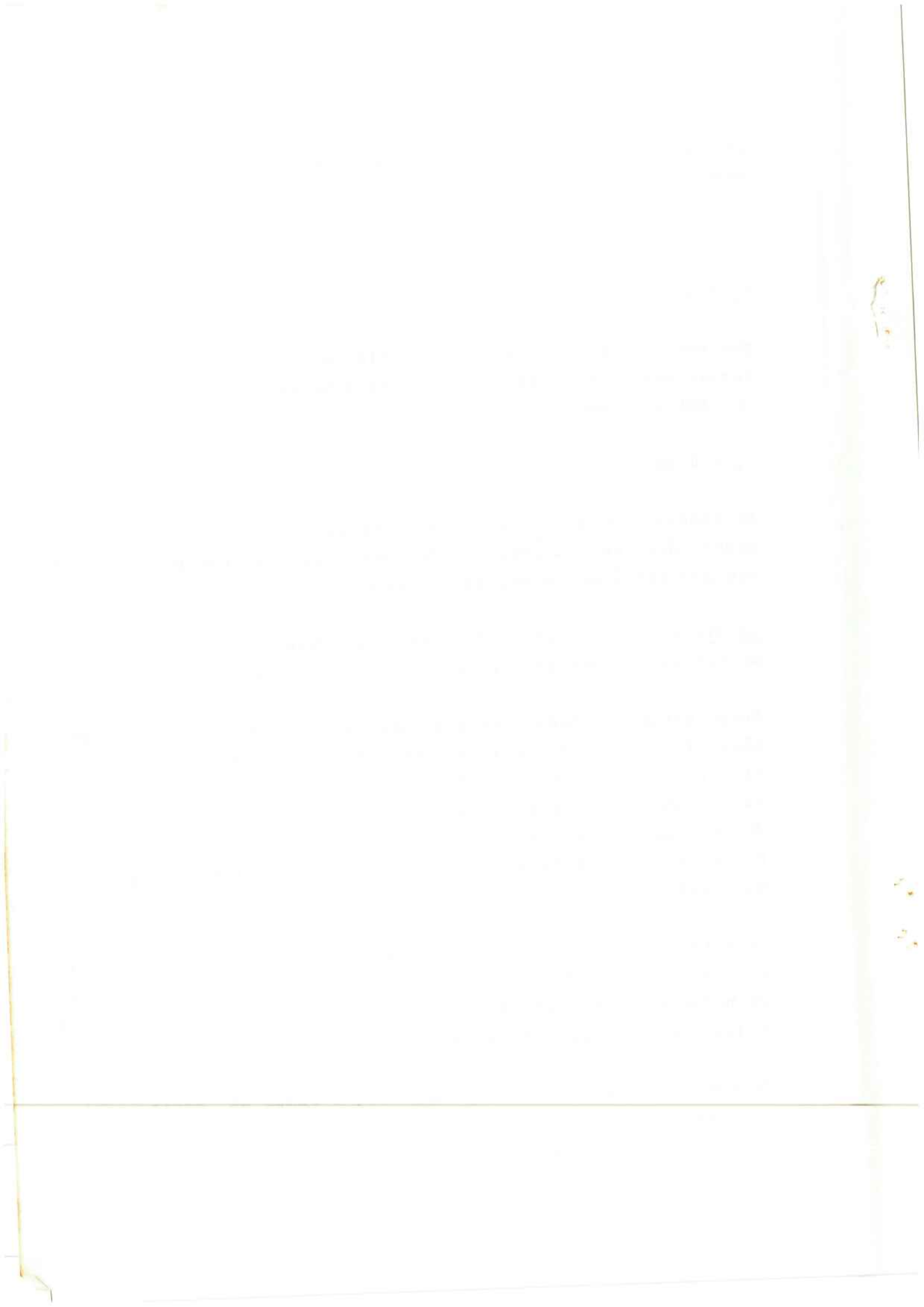
As demais funções χ_j são funções que se anulam em C_d , e são conhecidas como funções coordenadas. Tanto χ_j quanto u_0 e v_0 devem ser contínuas e deriváveis em Ω .

Galerkin propôs que as funções de ponderação $\chi(x,y)$ fôsem as mesmas que as usadas para as funções coordenadas $\chi_j(x,y)$.

Sendo assim, introduza-se a solução aproximada (13) nas expressões (1), (2) e (3), e injete-se o resultado nas formas fracas (11) e (12). Em seguida faça-se nestas últimas, sucessivamente, a função χ igual a cada uma das n funções χ_j . O resultado será um sistema de $2n$ equações algébricas lineares que possibilitará a determinação das $2n$ incógnitas do problema, que são os parâmetros a_j e b_j .

Em outras palavras: das infinitas incógnitas do problema original, ou seja, as duas componentes u e v do deslocamento de cada ponto da chapa, passa-se agora para um número finito de incógnitas, quais sejam os parâmetros a_j e b_j .

De fato, conhecidos estes parâmetros, o campo de deslocamentos dos pontos da chapa ficará determinado, embora aproximadamente (pois trata-se de um método numérico), pelas expressões (13).



A adoção da solução aproximada (13) corresponde, portanto, a uma discretização do problema contínuo original.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos segue exatamente a mesma formulação do Método dos Resíduos Ponderados. A única diferença reside na escolha das funções coordenadas χ_j , que agora passam a ser as funções de forma, ou de interpolação [4].

A aplicação prática do Método dos Resíduos Ponderados esbarra, como se sabe, em muitas dificuldades. O Método dos Elementos Finitos permite superar esses obstáculos.

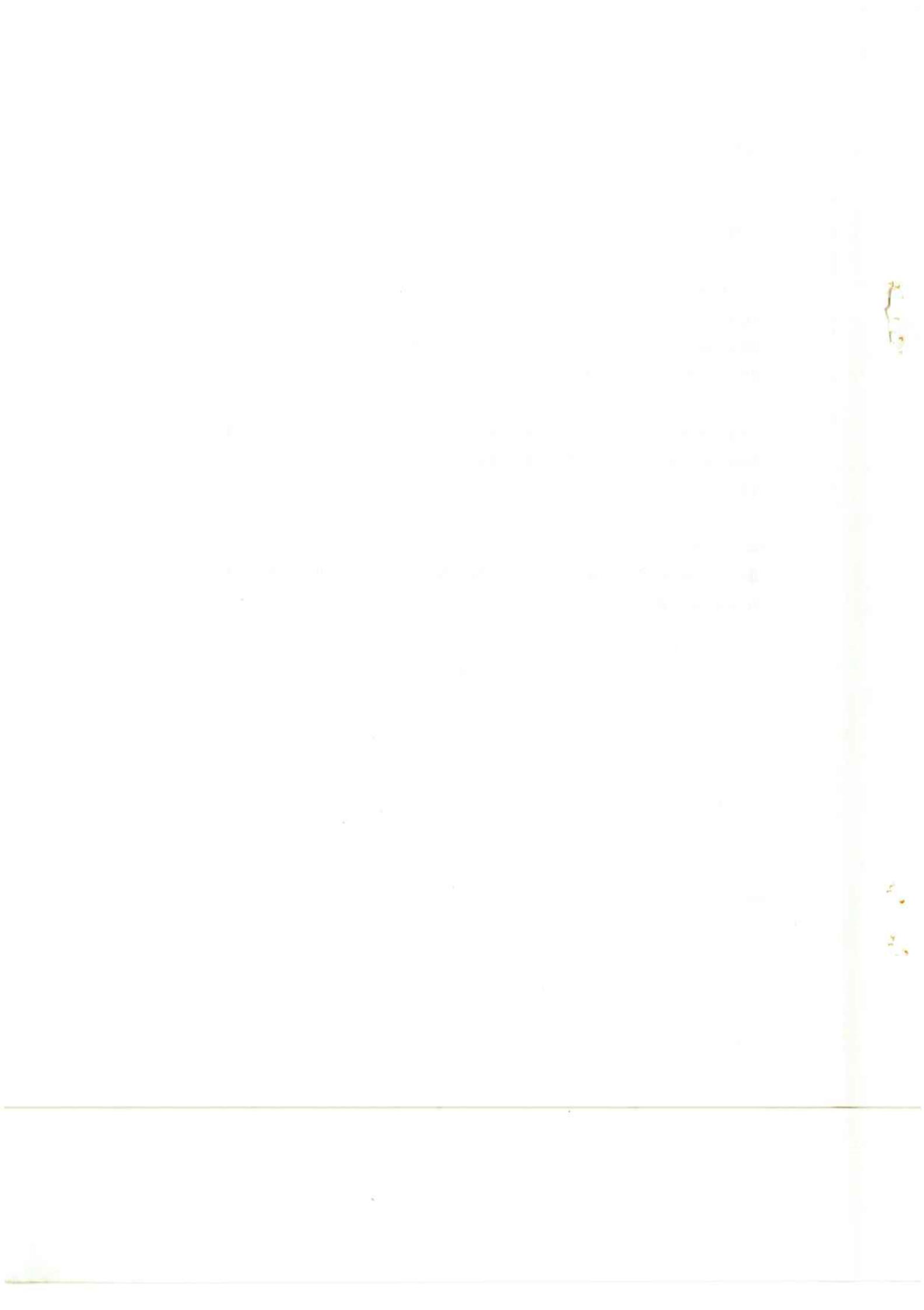
Em virtude do peculiar caráter das funções de interpolação, que não cabe aqui ressaltar, no Método dos Elementos Finitos a solução aproximada (13) passa a ter a seguinte configuração:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \sum_{j=1}^{n'} \bar{u}_j \chi_j + \sum_{j=n'+1}^n u_j \chi_j \\ \hat{v} &= \sum_{j=1}^{n'} \bar{v}_j \chi_j + \sum_{j=n'+1}^n v_j \chi_j \end{aligned} \quad (14)$$

Nas expressões acima, \bar{u}_j e \bar{v}_j são os deslocamentos, conhecidos, de n' pontos nodais escolhidos ao longo da fronteira C_d .

Por outro lado, u_j e v_j são os deslocamentos, desconhecidos, de $n - n'$ pontos nodais espalhados pelo domínio Ω e ao longo da fronteira C_σ . Além disso, χ_j representa a função de forma relativa ao nó P_j .

Na prática, porém, é possível numerar-se indistintamente todos os nós, de 1 a n . Assim (14) fica:



$$\begin{aligned}\hat{u} &= \sum_{j=1}^n u_j \chi_j \\ \hat{v} &= \sum_{j=1}^n v_j \chi_j\end{aligned}\tag{15}$$

Agora u_j e v_j representam os deslocamentos, conhecidos ou não, dos n pontos nodais.

Portanto, com o uso de (15) em vez de (13), o sistema de equações obtido, em notação matricial, é o seguinte:

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{f}\tag{16}$$

Onde \underline{K} é a matriz de rigidez da chapa, e é dada pelas expressões:

$$\underline{K} = \frac{hE}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \dots & \underline{K}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{K}_{n1} & \dots & \underline{K}_{nn} \end{bmatrix}\tag{17}$$

sendo:

$$\underline{K}_{ij} = \begin{bmatrix} K_{ij,11} & K_{ij,12} \\ K_{ij,21} & K_{ij,22} \end{bmatrix}\tag{18}$$

com:

$$K_{ij,11} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial x} \frac{\partial \chi_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \frac{\partial \chi_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (19)$$

$$K_{ij,12} = \int_{\Omega} \left(\nu \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \frac{\partial \chi_j}{\partial x} \right) d\Omega \quad (20)$$

$$K_{ij,21} = \int_{\Omega} \left(\nu \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \frac{\partial \chi_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \frac{\partial \chi_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (21)$$

$$K_{ij,22} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial y} \frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \frac{\partial \chi_j}{\partial x} \right) d\Omega \quad (22)$$

A matriz \underline{K} é simétrica, pois

$$\underline{K}_{ij} = \underline{K}_{ji}^T$$

O vetor \underline{a} é o vetor dos deslocamentos nodais:

$$\underline{a} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{a}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{a}_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{a}_n \end{array} \right\} \quad (23)$$

com:

$$\underline{a}_j = \left\{ \begin{array}{c} u_j \\ v_j \end{array} \right\} \quad (24)$$

10

O vetor \underline{f} é o vetor das forças nodais equivalentes:

$$\underline{f} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{f}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{f}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{f}_n \end{array} \right\} \quad (25)$$

sendo:

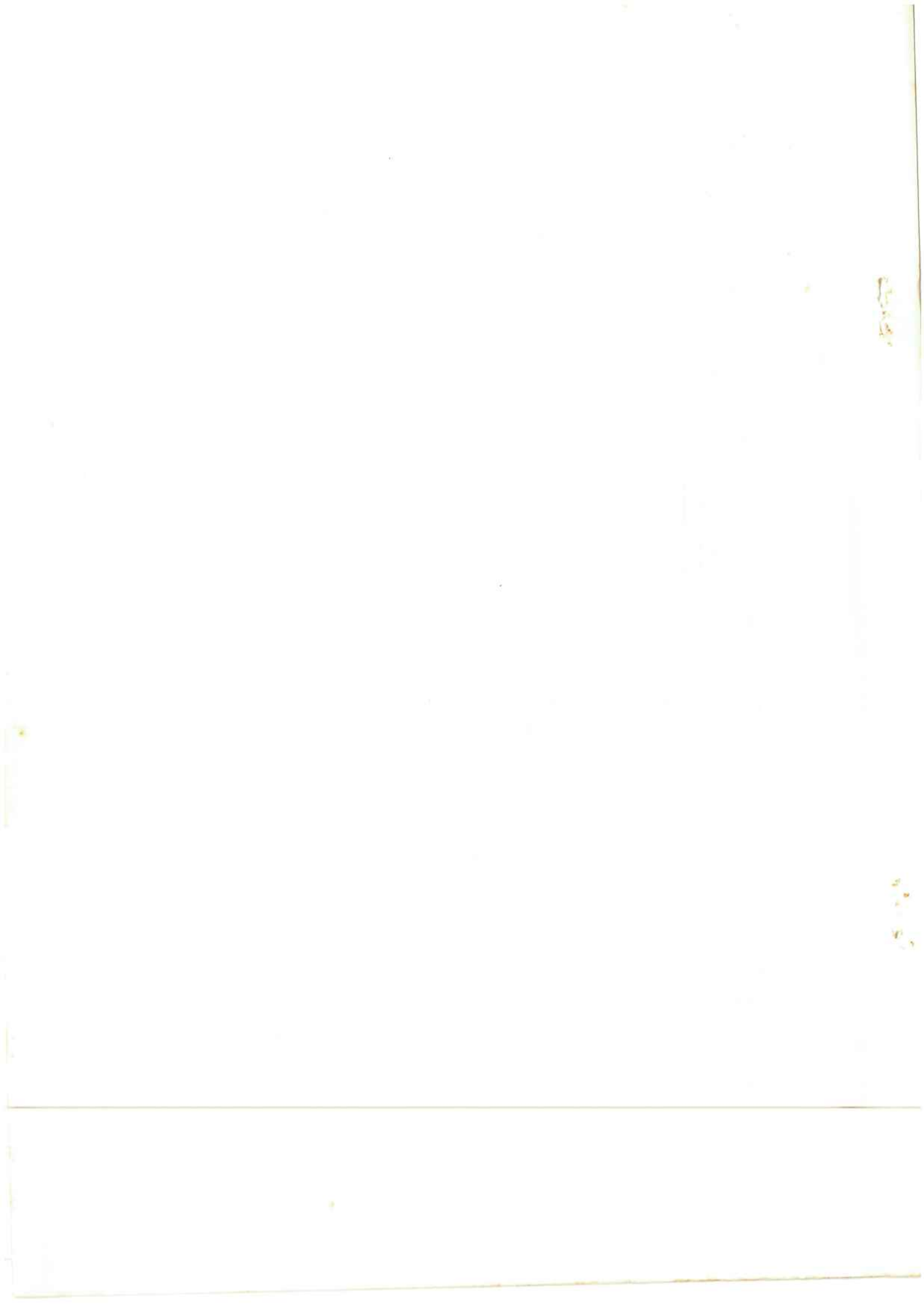
$$\underline{f}_i = \left\{ \begin{array}{c} F_i^x \\ F_i^y \end{array} \right\} \quad (26)$$

com:

$$F_i^x = h \int_{C_\sigma} \chi_i \bar{X} ds + h \int_{\Omega} \chi_i X d\Omega \quad (27)$$

$$F_i^y = h \int_{C_\sigma} \chi_i \bar{Y} ds + h \int_{\Omega} \chi_i Y d\Omega \quad (28)$$

Resta apenas introduzir as condições de contorno geométricas. Reorganizando-se os graus de liberdade do problema, de modo a se colocarem em último lugar aqueles que correspondem aos deslocamentos impostos (na fronteira C_d ou numa eventual parte do contorno onde reine uma condição mista), o sistema (16) sofre a seguinte partição:



$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{aa} & \underline{K}_{ab} \\ \underline{K}_{ba} & \underline{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{a}_a \\ \underline{a}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{f}_a \\ \underline{f}_b \end{Bmatrix} \quad (29)$$

A primeira das equações matriciais acima fornece os deslocamentos desconhecidos contidos em \underline{a}_a . Em sequência, a segunda possibilita a determinação das reações de apoio contidas em \underline{f}_b .

BIBLIOGRAFIA

- (1) COSTA, Henrique de Britto. Elementos finitos (via resíduos ponderados) na resolução do problema de segunda ordem das placas. São Paulo, Escola Politécnica da USP, 1986 (Tese de Doutorado).
- (2) SOUZA LIMA, Victor. Método dos Elementos Finitos. São Paulo, Escola Politécnica da USP, 1980 (Notas de Aula)
- (3) TIMOSHENKO, S.P. et. al. Theory of Elasticity. 3ed. Tóquio, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1970.
- (4) ZIENKIEWICZ, O.C. The Finite Element Method. 3ed. Londres, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1977.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or introductory paragraph.

Section header or title, faintly visible in the middle of the page.

Two columns of faint, illegible text in the middle section of the page.

Two columns of faint, illegible text in the lower middle section of the page.

Two columns of faint, illegible text in the bottom section of the page.