

Cálculo Simbólico

Domingos Pisanelli

SÃO PAULO - 1961

CÁLCULO SIMBÓLICO^(*)

Domingos Pisanelli

Apresentamos o cálculo simbólico dos operadores "a" para os quais existe e é analítico o inverso $(\alpha I - a)^{-1}$, num aberto conveniente da esfera complexa, I sendo o operador identidade.

Consideramos estes operadores como elementos de uma álgebra $\mathcal{A}$ sobre o corpo complexo, com elemento unidade, não necessariamente comutativa, munida de uma estrutura de e.l.c. completa e separada tal que o endomorfismo de $\mathcal{A}$ $x \mapsto xa$ ($a \in \mathcal{A}$) seja contínuo.

Demonstramos a fórmula integral de Fantappiè para estes e exemplificamos com os operadores que são matrizes e com os operadores

$$\int_{x_0}^x f(t, y) dt \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x f(t, y) dt.$$

Em seguida aplicamos os últimos exemplos para a resolução da equação a derivadas parciais linear com coeficientes constantes e de segunda ordem do tipo de Cauchy-Kowalewsky.

I) Seja $F = F_1 \times \dots \times F_n$ um compacto de C^n . Seja (F) o conjunto das funções holomorfas em abertos Ω de S^n (S esfera complexa). Seja R a relação de equivalência em (F) em que g_1 definida

(*) - Conferência realizada no "Terceiro Colóquio Brasileiro de Matemática" em Fortaleza em julho de 1961.

em Ω_1 e g_2 definida em Ω_2 são equivalentes se $g_1(t) = g_2(t)$ em $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Em $[F] = (F)/R$ pode-se definir de maneira natural uma estrutura vetorial sobre C . Se $g(t)$ $t \in \Omega$ é um elemento de (F) , indicaremos por g ou por $\dot{g}(t)$ a sua classe de equivalência.

Consideremos a classe A dos abertos Ω de S^n que contém F e tais que cada componente conexa contenha pontos de F . Para cada um destes abertos, seja $[\Omega]$ o espaço de Banach sobre C das funções holomorfas e limitadas em Ω , munido da norma $\|g\|_\Omega = \sup_{t \in \Omega} |g(t)|$. A restrição de Ω_1 à Ω_2 ($\Omega_1 \supset \Omega_2$ e ambos em A) é linear e contínua de $[\Omega_1]$ em $[\Omega_2]$. Como $[\dot{\Omega}]$ é algèbricamente isomorfo a $[\Omega]$ e $[F] = \bigcup_{\Omega \in A} [\dot{\Omega}]$, pode-se introduzir em $[F]$ uma estrutura de e.l.c.. Mostra-se além disto que $[F]$ munido desta estrutura é separado e completo. Seja Y outro e.l.c. completo e separado. As aplicações f de $[F]$ em Y são contínuas e lineares quando e sòmente quando têm a forma de Fantappiè:

$$f(g) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{A_1 \times \dots \times A_n} u(\alpha_1, \dots, \alpha_n) g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \quad (1)$$

onde $u(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f\left(\frac{1}{\alpha_1 - t_1} \dots \frac{1}{\alpha_n - t_n}\right)$ é analítica em $(\mathbb{C}_s F_1) \times \dots \times (\mathbb{C}_s F_n)$ e nula nos pontos no ∞ , $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um representante de g em Ω e $A_1, \dots, A_n$ são reuniões finitas de curvas de Jordan fechadas, rectificáveis e disjuntas, cujo produto está em Ω e envolvem positivamente abertos que contêm $F_1, \dots, F_n$.

II) Seja agora $\mathcal{A}$ algèbricamente uma álgebra sobre C , com elemento unidade I e topològicamente um e.l.c. completo e separado tal que a aplicação $x \rightarrow xa$ ($a \in \mathcal{A}$) seja contínua. Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ permutáveis dois a dois e Φ uma aplicação de $[F]$ em $\mathcal{A}$ com as seguintes propriedades:

- 1) Φ é contínua;
- 2) Φ é um homomorfismo;
- 3) $\Phi(g_0) = I$ $\Phi(g_j) = a_j$ ($g_0 = \dot{i}$ e $\dot{g}_j = \dot{t}_j$) ($1 \leq j \leq n$).

Como $(\alpha_1 \dot{i} - \dot{t}_j) \left(\frac{\dot{i}}{\alpha_j - \dot{t}_j} \right) = \dot{i}$, teremos pelas propriedades anteriores

$$(\alpha_j I - a_j) \Phi\left(\frac{i}{\alpha_j - t_j}\right) = \Phi\left(\frac{i}{\alpha_j - t_j}\right) (\alpha_j I - a_j) = I \quad (1 \leq j \leq n).$$

Segue-se que $\Phi\left(\frac{i}{\alpha_j - t_j}\right)$ é o inverso de $\alpha_j I - a_j$ ($\alpha_j \in \mathbb{C}F_j$).

Pelo que vimos em I), obtemos a fórmula de Fantappiè:

$$\Phi(g) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{A_1 \times \dots \times A_n} (\alpha_1 I - a_1)^{-1} \dots (\alpha_n I - a_n)^{-1} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n. \quad (3)$$

Temos também a permutabilidade dos elementos $(\alpha_j I - a_j)^{-1}$ quando $\alpha_j \in \mathbb{C}F_j$ e $1 \leq j \leq n$ e

$$(\alpha_j I - a_j)^{-1} = u(\alpha_1 I - a_1) \dots (\alpha_j I - a_j) \dots (\alpha_n I - a_n) \quad (2)$$

onde $u = \Phi\left(\frac{i}{\alpha_1 - t_1} \dots \frac{i}{\alpha_n - t_n}\right).$

A analiticidade do primeiro fator em (2), seu anulamento nos pontos no ∞ e a continuidade à esquerda do produto em $\mathcal{A}$ tem como consequência a analiticidade de $(\alpha_j I - a_j)^{-1}$ em $\mathbb{C}F_j$ ($1 \leq j \leq n$) e o anulamento no ∞ .

Reciprocamente, suponhamos que os elementos $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$, sempre permutáveis, sejam tais que $(\alpha_j I - a_j)^{-1}$ exista e seja analítico quando $\alpha_j \in \mathbb{C}F_j$ e seja nulo no ∞ ($1 \leq j \leq n$).

Formemos o operador de Fantappiè:

$$\Phi(g) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{A_1 \times \dots \times A_n} (\alpha_1 I - a_1)^{-1} \dots (\alpha_n I - a_n)^{-1} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

Os fatores $(\alpha_j I - a_j)^{-1}$ e $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ são analíticos em cada variável α_j ($1 \leq j \leq n$) no aberto $\Omega \cap (\mathbb{C}F_1 \times \dots \times \mathbb{C}F_n)$ ($g \in [\Omega]$ e $\Omega \in A$). Em virtude da continuidade à esquerda, a função integranda será analítica em cada variável. Pelo teorema da Hartogs a mesma será analítica em $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e também contínua.

Provemos que as propriedades 1), 2) e 3) estão verificadas. A continuidade e a linearidade são consequências do que vimos em I). Faltam-nos demonstrar a conservação da multiplicação de $[F]$ e a propriedade 3).

Com efeito, numa vizinhança do ∞ $V(\infty)$ temos o desenvolvimento:

$$(\alpha I - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{\alpha^{n+1}}.$$

Temos $I = (\alpha I - a)^{-1}(\alpha I - a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{\alpha^n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n a \frac{1}{\alpha^{n+1}}$, em virtude da continuidade à esquerda da multiplicação em $\mathcal{A}$. Teremos por identificação $a_n = a^n$ ($a^0 = I$), isto é:

$$(\alpha I - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{n+1}} a^n.$$

Segue-se que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_A (\alpha I - a)^{-1} \cdot 1 \, d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{n+1}} a^n \, d\alpha = I.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_A (\alpha I - a)^{-1} \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \int_A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} a^n \, d\alpha = a,$$

onde A é um círculo com centro na origem e contido em $V(\infty)$.

Segue-se que $\Phi(g_0) = I$ e $\Phi(g_j) = a_j$ ($1 \leq j \leq n$).

Quanto à conservação do produto observemos que:

$$(\alpha I - a)^{-1}(\beta I - a)^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} ((\alpha I - a)^{-1} - (\beta I - a)^{-1}) \quad (\beta \neq \alpha).$$

Seja

$$\Phi(g) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \prod_{j=1}^n (\alpha_j I - a_j)^{-1} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \quad e$$

$$\Phi(h) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{B_1 \times \dots \times B_n} \prod_{j=1}^n (\beta_j I - a_j)^{-1} h(\beta_1, \dots, \beta_n) d\beta_1 \dots d\beta_n.$$

Escolhamos B_j envolvendo A_j e F_j ($1 \leq j \leq n$). Teremos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{A_n} \int_{B_n} (\alpha_n I - a_n)^{-1} (\beta_n I - a_n)^{-1} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) h(\beta_1, \dots, \beta_n) d\alpha_n d\beta_n = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{A_n} (\alpha_n I - a_n)^{-1} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{B_n} \frac{1}{\beta_n - \alpha_n} h(\beta_1, \dots, \beta_n) d\beta_n - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{B_n} (\beta_n I - a_n)^{-1} h(\beta_1, \dots, \beta_n) d\beta_n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{A_n} \frac{1}{\beta_n - \alpha_n} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_n. \end{aligned}$$

A última integral é nula porque $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é analítica

num aberto que não contém β_n . Pelo teorema de Cauchy a primeira integral se reduz a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{A_n} (\alpha_n I - a_n)^{-1} g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) h(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) d\alpha_n.$$

Prosseguindo as integrações com relação a α_j e β_j ($1 \leq j \leq n-1$), obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi(g)\Phi(h) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{A_1 \times \dots \times A_n} (\alpha_1 I - a_1)^{-1} \dots \\ &\dots (\alpha_n I - a_n)^{-1} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \end{aligned}$$

isto é

$$\Phi(g)\Phi(h) = \Phi(gh).$$

No que segue o homomorfismo Φ calculado em g , associado aos elementos $a_1, a_2, \dots, a_n$ será indicado por $g(a_1, \dots, a_n)$.

Os exemplos que vamos considerar são aqueles em que $\mathcal{A} = \mathcal{L}_s(G, G)$, isto é, o conjunto das aplicações lineares de G em G (G e.l.c. completo e separado), munido da estrutura de álgebra habitual e da estrutura da convergência uniforme sobre as partes finitas de G . $\mathcal{A}$ será então algebricamente uma álgebra sobre C , com elemento unidade e topologicamente um e.l.c. completo e separado. A aplicação $x \rightarrow xa$ ($a \in \mathcal{A}$) de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ será contínua porque:

$$xa \in (V; t_1, \dots, t_n) \iff x \in (V; a(t_1), \dots, a(t_n)). \quad (*)$$

Para provarmos que uma aplicação $\alpha \rightarrow a_\alpha \in \mathcal{L}_s(G, G)$ definida num aberto Ω da esfera complexa é analítica bastará provar que $\alpha \rightarrow a_\alpha(f) \in G$ é analítica qualquer que seja $f \in G$.

A continuidade e a linearidade da aplicação

$$a \in \mathcal{L}_s(G, G) \rightarrow a(f) \in G,$$

nos permitem escrever em virtude de (3):

$$\begin{aligned} (g(a_1, \dots, a_n))(f) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{A_1 \times \dots \times A_n} ((\alpha_1 I - a_1)^{-1} \dots \\ &\dots (\alpha_n I - a_n)^{-1})(f) \cdot g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \end{aligned} \quad (4).$$

Os elementos da álgebra $\mathcal{L}_s(G, G)$ serão chamados *operadores*.

(*) - $(V; t_1, \dots, t_n) = \{x \in \mathcal{L}_s(G, G) \mid x(t_j) \in V, 1 \leq j \leq n\}$. V vizinhança de zero em G .

Exemplos:

III) Seja $G = C^m$. $\mathcal{L}(C^m, C^m)$, álgebra das aplicações lineares de C^m em C^m é isomorfo à álgebra das matrizes $m \times m$. Seja A uma matriz. A matriz inversa de $\alpha I - A$ será:

$$\frac{(\alpha I - A)^*}{|\alpha I - A|}$$

onde $(\alpha I - A)^*$ é a matriz adjunta de $\alpha I - A$ e $|\alpha I - A|$ o determinante da mesma. Esta existirá quando α for distinto das raízes características $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ da matriz A .

Os elementos de $(\alpha I - A)^{-1}$ são funções racionais de α e nulos no ponto no ∞ . O vetor $(\alpha I - A)^{-1}f \in C^m$ será então função analítica de α fora do conjunto $F = \bigcup_{j=1}^m \{\alpha_j\}$, qualquer que seja $f \in C^m$.

Teremos então a fórmula:

$$g(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\alpha I - A)^*}{|\alpha I - A|} g(\alpha) d\alpha,$$

onde Γ é um conjunto de m círculos disjuntos com centros nos pontos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ e $g \in [F]$.

Notemos que a estrutura simples de $\mathcal{L}(C^m, C^m)$, coincide com a estrutura de álgebra normada do conjunto das matrizes A , dada pela norma

$$\|A\| = \sum_{i,j}^{1,m} |a_{i,j}| \quad (A = (a_{i,j}), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq m),$$

pois se $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_m|$ é a norma de $x = (x_1, \dots, x_m) \in C^m$, temos

$$\|Ax_0\| \leq \|A\| \|x_0\| \quad \text{e} \quad \|A\| = \|Af_1\| + \dots + \|Af_m\|$$

onde $f_j = (0, \dots, \underset{(j)}{1}, \dots, 0) \quad (1 \leq j \leq m)$.

Quando $g_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ ($a_n \in C$, $n \geq 0$) é uma série de potências cujo raio de convergência é maior que o maior dos módulos das raízes características de A temos $g_0 \in [F]$. A continuidade do homomorfismo $g \rightarrow \Phi(g) \equiv g(A)$ dará:

$$g_0(A) = \Phi\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi(t^n) \quad \text{e}$$

$$g_0(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\Phi(t)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.$$

IV) Sejam x_0 e y_0 dois números complexos. Seja $F = \{x_0\} \times \{y_0\}$ e $G = [\{x_0\} \times \{y_0\}]$ e $a = \mathcal{I} \in \mathcal{L}_s(G, G)$

tal que

$$(\mathcal{I}(f))(x, y) = \int_{x_0}^x f(t, y) dt$$

onde $f \in G$ e $f(x, y)$ é um representante de f em Ω . Teremos se $(\alpha I - \mathcal{I})^{-1}f = u$:

$$f = (\alpha I - \mathcal{I})u$$

Se existir um representante de u com campo de definição Ω , teremos:

$$f(x, y) = \alpha u(x, y) - \int_{x_0}^x u(t, y) dt.$$

Derivando relativamente a x , obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - u,$$

equação diferencial ordinária com coeficientes constantes, com a condição inicial $u(x_0, y) = \frac{1}{\alpha} f(x_0, y)$ cuja solução é:

$$u(x, y) = \frac{1}{\alpha} f(x, y) + \frac{1}{\alpha^2} \int_{x_0}^x e^{\frac{x-t}{\alpha}} f(t, y) dt = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x e^{\frac{x-t}{\alpha}} f(t, y) dt.$$

Então

$$[(\alpha I - \mathcal{I})^{-1}(f)](x, y) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x e^{\frac{x-t}{\alpha}} f(t, y) dt \quad (5).$$

$(\alpha I - \mathcal{I})^{-1}(f)$ não depende do representante de f .

O segundo membro da relação acima é analítico quando $\alpha \neq 0$ e $(x, y) \in \Omega$. Teremos então a analiticidade numa vizinhança de $\alpha \neq 0$, uniformemente quando (x, y) pertence a uma vizinhança $V(x_0, y_0)$ aberta, conexa e conveniente, isto é, a analiticidade segundo a topologia de $[V(x_0, y_0)]$. A aplicação canônica de $[V(x_0, y_0)]$ em $[\{x_0\} \times \{y_0\}]$ é linear e contínua; logo:

$$\alpha \rightarrow a_\alpha(f) \equiv \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x e^{\frac{x-t}{\alpha}} f(t, y) dt \right) \in [\{x_0\} \times \{y_0\}]$$

é analítica quando $\alpha \neq 0$, qualquer que seja $f \in G$; portanto $\alpha \rightarrow a_\alpha \in \mathcal{L}_s(G, G)$ é analítica.

Seja sempre $G = [\{x_0\} \times \{y_0\}]$ e $K \in \mathcal{L}_s(G, G)$ tal que

$$(K(f))(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x f(t, y) dt,$$

onde $f(x, y)$ é um representante de $f \in G$.

Seja $(\alpha I - K)^{-1}f = u$ e $f = (\alpha I - K)u$. Seja $f(x, y)$ um representante de f no produto de vizinhanças $V_r(x_0) \times V_r(y_0)$ de raio r . Consideremos representantes $f(x, y)$ e $u(x, y)$ de f e u num mesmo aberto. Teremos:

$$f(x, y) = \alpha u(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x u(t, y) dt.$$

Derivando relativamente a x teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

equação linear a derivadas parciais com coeficientes constantes, com a condição inicial $u(x_0, y) = \frac{1}{\alpha} f(x_0, y)$, cuja solução é:

$$u(x, y) = [(\alpha I - K)^{-1}(f)](x, y) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x f\left(t, y + \frac{x-t}{\alpha}\right) dt \quad (6).$$

Se tomarmos $\sigma > 0$ e arbitrário e $\rho = \frac{\sigma r}{1 + \sigma}$, teremos a analiticidade nos pontos:

$$|\alpha| > \sigma, \quad |x - x_0| < \rho, \quad |y - y_0| < \rho$$

e a analiticidade em α quando $|\alpha| > \sigma_1 > \sigma$, uniformemente quando $|x - x_0| < \rho_1 < \rho$ e $|y - y_0| < \rho_1 < \rho$ (*), isto é, segundo a topologia de $[V_{\rho_1}(x_0) \times V_{\rho_1}(y_0)]$, donde a analiticidade de

$$\alpha \rightarrow a_\alpha(f) \equiv \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x f\left(t, y + \frac{x-t}{\alpha}\right) dt \in [\{x_0\} \times \{y_0\}]$$

quando $\alpha \neq 0$, qualquer que seja f , isto é, a analiticidade de $\alpha \rightarrow a_\alpha \in \mathcal{L}_s(G, G)$.

Os elementos considerados $\mathcal{J}$ e K de $\mathcal{L}_s(G, G)$ são permutáveis e

(*) - σ_1, ρ_1 convenientes.

$$(\alpha I - \mathcal{J})^{-1} \quad \text{e} \quad (\alpha I - K)^{-1}$$

existem e são analíticos quando $\alpha \neq 0$. Poderemos então considerar:

$$(g(\mathcal{J}, K))(f) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{A_1 \times A_2} ((\alpha_1 I - \mathcal{J})^{-1} (\alpha_2 I - K)^{-1})(f) g(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2$$

quando $g \in [\{0\} \times \{0\}]$, onde A_1 e A_2 são dois círculos com centro na origem, cujo produto está contido no campo de definição do representante $g(\alpha_1, \alpha_2)$ de g .

Quando $((\alpha_1 I - \mathcal{J})^{-1} (\alpha_2 I - K)^{-1})(f)$ é analítico no sub-espaço $[V_{\rho_1}(x_0) \times V_{\rho_1}(y_0)] \subset [\{x_0\} \times \{y_0\}]$, as integrais nestes últimos coincidem. A continuidade e linearidade de $\varphi \in [V_{\rho_1}(x_0) \times V_{\rho_1}(y_0)] \rightarrow \varphi(x, y) \in \mathbb{C} \quad ((x, y) \in V_{\rho}(x_0) \times V_{\rho}(y_0))$ dará em virtude de (4):

$$\begin{aligned} & [g(\mathcal{J}, K)(f)](x, y) = \\ & = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{A_1 \times A_2} ((\alpha_1 I - \mathcal{J})^{-1} (\alpha_2 I - K)^{-1})(f)(x, y) g(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (7) \end{aligned}$$

quando $(x, y) \in V_{\rho_1}(x_0) \times V_{\rho_1}(y_0)$.

V) Consideremos a equação a derivadas parciais

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + d \frac{\partial z}{\partial x} + e \frac{\partial z}{\partial y} + fz = h$$

onde $a \neq 0$, b, c, d, e, f , são constantes e $h \in [\{x_0\} \times \{y_0\}]$. Procuraremos a solução $z \in [\{x_0\} \times \{y_0\}]$ tal que $z(x_0, y) = \varphi(y)$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x_0} = \Psi(y)$ com $\varphi \in [\{x_0\}]$ e $\Psi \in [\{y_0\}]$.

Apliquemos duas vezes o operador $\mathcal{J}$ a ambos os membros da equação anterior. Teremos:

$$(aI + bK + cK^2 + d\mathcal{J} + e\mathcal{J}K + f\mathcal{J}^2)z = \theta$$

onde $\theta = \mathcal{J}^2 f + a\varphi + a\mathcal{J}\Psi + b\mathcal{J}\varphi' + d\mathcal{J}\varphi \in [\{x_0\} \times \{y_0\}]$.

A função $g(\alpha_1, \alpha_2) = a + b\alpha_2 + c\alpha_2^2 + d\alpha_1 + e\alpha_1\alpha_2 + f\alpha_1^2$ e sua recíproca são representantes de elementos de $[\{0\} \times \{0\}]$. Podemos então escrever.

$$[g(\mathcal{J}, K)](z) = \theta.$$

Aplicando a ambos os membros o operador

$$\frac{1}{g(\mathcal{J}, K)} \equiv \left(\frac{1}{g(\alpha_1, \alpha_2)} \right) (\mathcal{J}, K)$$

teremos

$$z = \left[\frac{1}{g(\mathcal{I}, K)} \right] (\theta) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{A_1 \times A_2} [(\alpha_1 I - \mathcal{I})^{-1} (\alpha_2 I - K)^{-1} \theta] \frac{1}{g(\alpha_1, \alpha_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (8).$$

A solução em termos de x e de y se obterá então utilizando as fórmulas (5), (6), (7) e substituindo na última expressão (8).

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

BIBLIOGRAFIA

Para o tratamento clássico dos operadores lineares:

LUIGI FANTAPPIÈ - Integrazione per quadrature dei sistemi a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti in due variabili indipendenti, mediante il calcolo degli operatori lineari. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t.57, 1933).

Para a sistematização da teoria dos operadores lineares elementos de um anel de Banach:

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA - As funções analíticas e a análise funcional. (Portugaliae Mathematica, vol. IX, fasc. 1-2, 1950).

Para a sistematização topológica do espaço $[F]$ ($F \subset S$):

CANDIDO LIMA DA SILVA DIAS - Espaços vectoriais topológicos e sua aplicação aos espaços funcionais analíticos. Tese de Concurso. Boletim da Sociedade de Matemática de S. Paulo, 1952.

Para a teoria das funções analíticas com valores num e.l.c. e suas integrais:

ALEXANDRE GROTHENDIECK - Sur certains espaces de fonctions holomorphes. Journal für die Reine und A. Math. 1953, vol. 192.

* * *