

Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP
Departamento de Engenharia de Computação e
Sistemas Digitais

ISSN 1413-215X

BT/PCS/9907

Modelo Nebuloso de Confiabilidade
Baseado no Modelo de Markov

Paulo Sérgio Cugnasca
Marco Túlio Carvalho de Andrade

São Paulo - 1999

O presente trabalho é parte da tese de doutorado apresentada por Paulo Sérgio Cugnasca, sob orientação do Prof. Dr. Marco Túlio Carvalho de Andrade.: "Modelos Nebulosos para a Avaliação de Sistemas Tolerantes a Defeitos", defendida em 05/03/99, na EPUSP.

A íntegra da tese encontra-se à disposição com o autor e na Biblioteca de Engenharia de Eletricidade da Escola Politécnica da USP.

FICHA CATALOGRÁFICA

Cugnasca, Paulo Sérgio

Modelo nebuloso de confiabilidade baseado no modelo de Markov /
P.S. Cugnasca, M.T.C. de Andrade. -- São Paulo : EPUSP, 1999.
20 p. -- (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais, BT/PCS/9907)

1. Teoria nebulosa 2. Aritmética nebulosa 3. Confiabilidade 4. Modelo de Markov I. Andrade, Marco Túlio Carvalho de II. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais III. Título IV. Série

ISSN 1413-215X

CDD 510.22

511

519.248

519.217

Modelo Nebuloso de Confiabilidade Baseado no Modelo de Markov

Paulo Sérgio Cugnasca
Marco Túlio Carvalho de Andrade

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia de Computação e Sistemas Digitais
Av. Prof. Luciano Gualberto, trav.3, nº 158 – São Paulo – SP – CEP: 05508-900
E-mail: cugnasca@pcs.usp.br

Resumo

Este artigo apresenta a aplicação da teoria nebulosa no cálculo da confiabilidade de sistemas computacionais tolerantes a defeitos, compostos por módulos iguais e organizados na forma de arquitetura redundante. Este método, baseado no Modelo de Markov, permite que os parâmetros necessários para o cálculo da confiabilidade possam não ter seus valores precisamente conhecidos no momento do cálculo. Tais parâmetros, quando possuírem alguma incerteza associada, serão modelados por números nebulosos, originando uma resposta temporal para a confiabilidade do sistema na forma de curvas nebulosas de confiabilidade.

Palavras-chave

Teoria Nebulosa, Números Nebulosos, Aritmética Nebulosa, Sistemas Críticos, Confiabilidade, Modelo Combinatório, Modelo de Markov, Confiabilidade Nebulosa, Modelo de Markov Nebuloso.

1. INTRODUÇÃO

A teoria da lógica nebulosa (“fuzzy logic”) adquiriu um maior destaque no meio científico a partir de dois artigos publicados por Lofti A. Zadeh, em 1965 [Zadeh-65] [Zadeh-65-2], onde este apresenta os conceitos básicos da teoria dos conjuntos nebulosos, que é uma extensão da teoria clássica dos conjuntos. A partir daí, a lógica nebulosa passou a ser uma ferramenta para se automatizar atividades humanas onde existam alguma forma de ambigüidade, informações vagas ou imprecisas.

Esta característica da lógica nebulosa vem ao encontro das necessidades de um projetista de um novo sistema ou avaliador de um sistema já existente, que nem sempre dispõem com exatidão dos parâmetros necessários para o cálculo da confiabilidade do sistema. Em particular, isso é notadamente importante quando o foco da análise é um sistema crítico, onde o funcionamento incorreto da aplicação pode causar efeitos indesejáveis ou desastrosos sob algum ponto de vista, como: prejuízo material, ambiental ou ao ser humano [Husseiny-90] [Perry-91] [Craigen-94].

Este trabalho pretende fornecer uma forma alternativa de avaliação de um sistema no tocante à sua confiabilidade, utilizando o já consagrado Modelo de Markov. O novo modelo aqui proposto [Cugnasca-99], que será denominado “Modelo de Markov Nebuloso”, possibilita o tratamento matemático de parâmetros definidos com algum grau de incerteza [Evans-92], fornecendo, como resultado final, curvas de confiabilidade com graus de incerteza associados.

2. A TEORIA NEBULOSA

2.1 Conceitos Básicos

Na teoria clássica dos conjuntos, dados um elemento x e um conjunto A dentro de um universo de discurso X , quando o elemento x é membro de A , esta pertinência é representada na forma:

$$x \in A ; \quad (1)$$

caso contrário, se x não é um membro de A , então:

$$x \notin A . \quad (2)$$

Os conjuntos nebulosos são uma extensão dos conjuntos clássicos [Zadeh-65] [Zimmermann-96]. O que caracteriza um conjunto nebuloso são os graus de pertinência dos seus membros ao conjunto universo, que variam dentro de uma faixa contínua de valores reais entre 0 e 1. Num conjunto clássico, um dado elemento tem grau de pertinência 1, quando pertence ao conjunto, e grau de pertinência 0, quando não pertence ao conjunto. Para diferenciar estes dois tipos de conjuntos, representar-se-ão os conjuntos nebulosos com o símbolo “~” acrescentado a letra do nome do conjunto (p.ex., \tilde{A}).

Os graus de pertinência dos elementos x de um conjunto \tilde{A} são expressos através de uma função de pertinência, representada por $\mu_{\tilde{A}}(x)$, definida formalmente por:

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]. \quad (3)$$

Define-se o **α -corte** (“ α -cut”) para um conjunto nebuloso \tilde{A} como sendo o conjunto clássico \tilde{A}_α que contém todos os elementos do conjunto universo X cujos graus de pertinência ao conjunto \tilde{A} são iguais ou maiores do que α . Define-se, ainda, o **α -corte estrito** (“strong α -cut”) como sendo o conjunto ordinário $\tilde{A}_{\alpha+}$ que contém todos os elementos do conjunto universo X cujos graus de pertinência ao conjunto \tilde{A} são maiores do que α . O α -corte estrito para $\alpha=0$ também é denominado de **suporte** de um conjunto nebuloso. Em particular, quando o suporte de um conjunto nebuloso é um único ponto, este é denominado de “**fuzzy singleton**” [Dubois-80] [Klir-95].

Formalmente, dado um conjunto nebuloso \tilde{A} de elementos de um conjunto universo X e um número $\alpha \in [0,1]$ qualquer, o α -corte e o α -corte estrito são escritos, respectivamente, nas formas:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \text{ e} \quad (4)$$

$$\tilde{A}_{\alpha+} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}. \quad (5)$$

Um conjunto \tilde{A} é dito **normal** quando o maior valor de pertinência alcançado por um de seus elementos é igual a 1. A figura 1 ilustra uma função de pertinência de um conjunto nebuloso e exemplifica o conceito de α -corte.

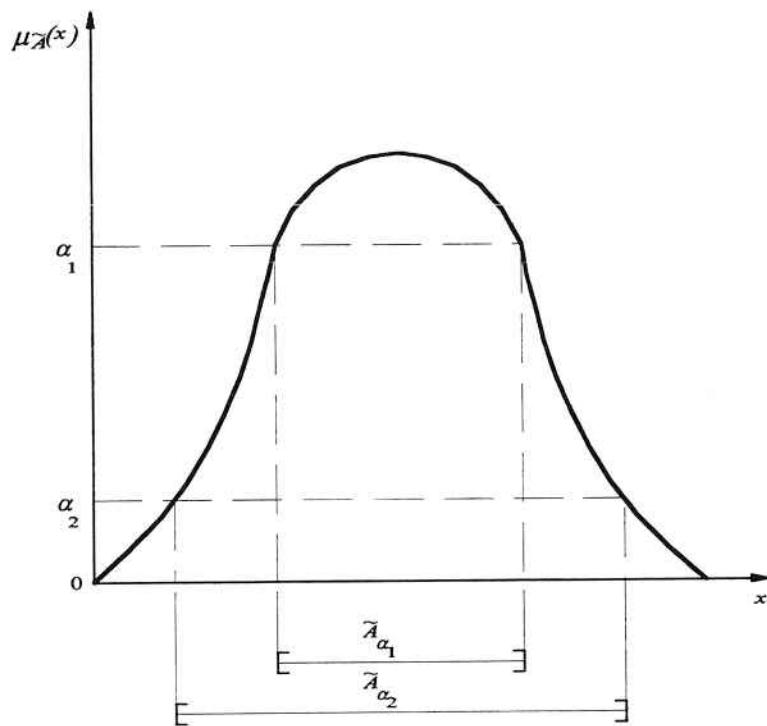


Figura 1 – Conjunto nebuloso \tilde{A} e exemplos de α -cortes.

2.2 Números Nebulosos

Os números nebulosos constituem um caso particular de conjuntos nebulosos, sendo definidos sobre o conjunto dos números reais \mathbb{R} [Lee-90]. Os números nebulosos representam o conceito intuitivo de “números aproximados” (números próximos a um determinado número real) [Klir-95]. Para um conjunto \tilde{A} definido em \mathbb{R} ser qualificado como um número nebuloso, este deve possuir as seguintes características:

- (i) \tilde{A} precisa ser um conjunto nebuloso normal;
- (ii) O suporte de \tilde{A} , definido para $\alpha=0+$, precisa ser limitado; e
- (iii) \tilde{A}_α precisa ser um intervalo fechado para todo $\alpha \in (0,1]$.

A figura 2 apresenta um exemplo de dois números nebulosos \tilde{A} e \tilde{B} que refletem os conceitos de “números próximos de 1” e “números próximos de 3”.

2.3 Aritmética Nebulosa

Duas propriedades dos números nebulosos regem as operações aritméticas sobre eles:

- (i) Todo conjunto nebuloso e, por consequência, todo número nebuloso, pode ser unicamente representado pelos seus α -cortes;
- (ii) Os α -cortes de cada número nebuloso correspondem a intervalos fechados sobre o conjunto dos números reais, para todo $\alpha \in (0,1]$.

Como resultado imediato destas duas propriedades, as operações aritméticas sobre números nebulosos podem ser definidas em função das operações aritméticas para os seus α -cortes, que correspondem a operações aritméticas sobre intervalos fechados, sendo esta uma área sedimentada dentro da matemática clássica [Klir-95]. Para facilitar a apresentação da aritmética sobre intervalos, as quatro operações aritméticas: adição (“+”), subtração (“-”), multiplicação (“ \cdot ”) e divisão (“ $/$ ”) serão representadas, genericamente, pelo símbolo “*”. Assim, uma operação qualquer entre dois elementos f e g , pertencentes aos intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$, respectivamente, pode ser escrita da seguinte forma:

$$[a,b]*[c,d] = \{f * g \mid a \leq f \leq b, c \leq g \leq d\}, \quad (6)$$

excetuando-se a operação $[a,b]/[c,d]$ que não é definida para $0 \in [c,d]$. Como consequência, toda operação realizada sobre dois intervalos fechados resulta também num intervalo fechado. A operação de adição entre números nebulosos é exemplificada na figura 2.

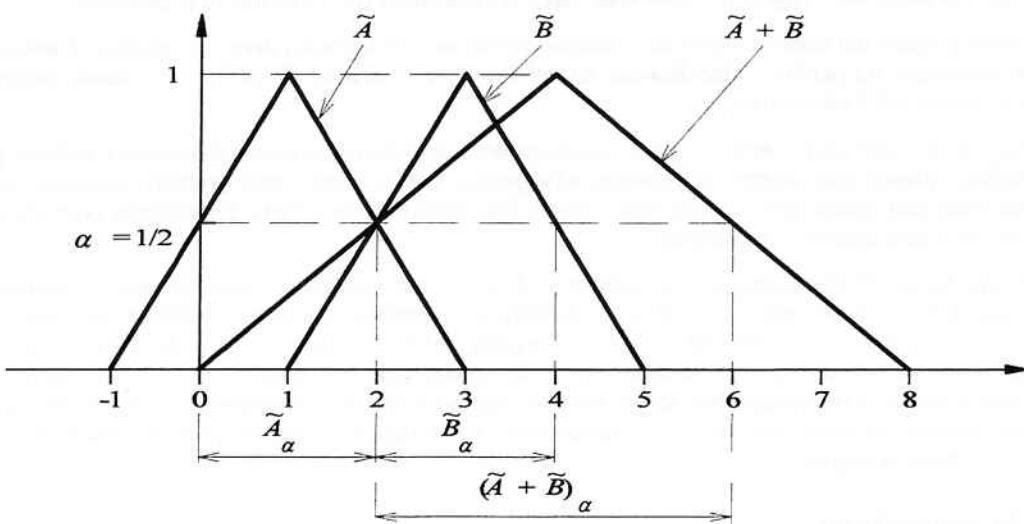


Figura 2 – Exemplos de números nebulosos e da operação aritmética de adição.

Feitas estas considerações, as quatro operações aritméticas básicas sobre intervalos fechados podem ser definidas como [Klir-95] [Bowles-95]:

$$\begin{aligned} [a,b] + [c,d] &= [a+c, b+d], \\ [a,b] - [c,d] &= [a-d, b-c], \\ [a,b] \cdot [c,d] &= [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)], \\ [a,b] / [c,d] &= [a,b] \cdot [1/d, 1/c] \\ &= [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)], \text{ e} \\ &\quad \text{para } 0 \notin [c,d]. \end{aligned} \quad (7)$$

Em particular, um número real r pode ser visto como um intervalo especial degenerado $[r,r]$. Quando um dos intervalos envolvidos na operação é degenerado, as operações apresentam particularidades que as simplificam; quando ambos são degenerados, trata-se de uma operação aritmética tradicional envolvendo dois números reais.

3. SISTEMAS TOLERANTES A DEFEITOS

Genericamente, um **sistema tolerante a defeitos** é aquele que consegue realizar suas tarefas mesmo na presença de defeitos de hardware ou “bugs” de programas. Um “bug” existente num programa de um sistema tolerante a defeitos deve ser superado de forma a não impedir o funcionamento do sistema, bem como um defeito num componente de hardware não deve impedir que o sistema desempenhe suas funções corretamente.

3.1 Conceitos

A **confiabilidade** (“reliability”) de um sistema é uma função que depende da variável tempo, e será designada por $R(t)$. A função $R(t)$ é a probabilidade condicional de um sistema desempenhar corretamente suas funções no intervalo de tempo $[t_0, t]$, dado que este estava em perfeito estado de funcionamento no instante t_0 [Siewiorek-82] [Johnson-89].

Analogamente, a **não-confiabilidade** de um sistema, designada por $Q(t)$, é definida como a probabilidade do sistema não desempenhar suas funções corretamente no intervalo de tempo $[t_0, t]$, dado que este estava funcionando no instante inicial de tempo t_0 , e também pode ser chamada de **probabilidade de falha**.

3.2 Defeitos, Erros e Falhas

Um **defeito** (“fault”) é definido como um problema físico ou imperfeição que ocorre dentro de um determinado componente de hardware [Siewiorek-82] ou software.

Um **erro** (“error”) é a manifestação do defeito, indicando um desvio da precisão ou correção de um resultado.

A **falha** (“failure”) de um sistema é caracterizada quando um erro resulta na execução incorreta de uma de suas funções. O termo falha também é utilizado como sinônimo para **mal-funcionalmento**. Em algumas situações, a falha também pode ser caracterizada quando alguma função de um sistema é executada num modo abaixo do esperado, tanto de forma quantitativa, quanto de forma qualitativa.

3.3 Técnicas de Projeto de Sistemas para a Obtenção da Tolerância a Defeitos

Ao se projetar um sistema tolerante a defeitos devem ser considerados diversos aspectos: a **detecção** do defeito, a **contenção** do defeito, a **localização** do defeito, a **recuperação** do defeito e o **mascaramento** do defeito [Siewiorek-82] [Johnson-89].

Um sistema que provê recursos para o mascaramento de defeitos alcança a tolerância a defeitos por esconder o defeito quando este ocorre. Tal sistema não precisa que o defeito seja primeiro detectado para depois ser tolerado, mas apenas que o defeito seja contido. Isso significa que o efeito do problema ocorrido será local e não afetará o funcionamento do sistema.

Outra forma de se conseguir a tolerância a defeitos, sem utilizar o mascaramento, é através da detecção, localização e recuperação do defeito. A maioria dos sistemas tolerantes a defeitos apoia-se na detecção do defeito. Após ter sido detectado, o defeito precisa ser localizado para se saber qual componente apresenta problema, de forma que o sistema possa ser recuperado do defeito, através de algum procedimento. Normalmente, a recuperação do defeito envolve alguma forma de reconfiguração que, via de regra, desabilita o componente problemático, física ou logicamente, e habilita um outro componente sobressalente, também de forma física ou lógica.

3.4 Redundância

A **redundância** (“redundancy”) foi sempre utilizada desde os primeiros projetos de sistemas tolerantes a defeitos, através da replicação física de componentes de hardware dentro dos sistemas. Posteriormente outras formas de redundância foram sendo estudadas e incorporadas aos sistemas.

Genericamente, redundância é a adição de informação, recursos ou tempo além do necessário para a operação normal de um sistema, podendo assumir uma das seguinte modalidades [Siewiorek-82] [Johnson-89]:

- **Redundância de hardware:** é a adição de componentes extras de hardware com o objetivo de detectar ou tolerar defeitos;
- **Redundância de software:** é a adição de componentes extras de software com o objetivo de detectar e possivelmente tolerar defeitos;
- **Redundância de informação:** é a adição de informações além das necessárias para implementar uma determinada função;
- **Redundância de tempo:** é a utilização de mais tempo do que o necessário para desempenhar uma determinada função com o objetivo de se obter detecção e, possivelmente, tolerância a defeitos.

A redundância de hardware, foco deste trabalho, pode ser classificada em: passiva, ativa e híbrida. A técnica de **redundância de hardware passiva** utiliza o conceito de mascaramento do defeito para esconder a sua ocorrência e evitar que os defeitos resultem em erros, sem necessitar detectar e localizar o defeito, nem reconfigurar o sistema; desta forma, alcança-se a tolerância a defeitos. Esta redundância tem como base o mecanismo de **votação** para mascarar a ocorrência de um eventual defeito. A grande maioria dos sistemas que utilizam esta técnica de implementação adota o conceito de votação majoritária.

A técnica de **redundância de hardware ativa** procura obter a tolerância a defeitos pela detecção, localização e recuperação do defeito. Normalmente, a detecção do defeito é obtida devido ao erro por ele produzido.

A **redundância de hardware híbrida** combina os benefícios existentes na redundância passiva e ativa. Isso possibilita o mascaramento de defeitos, o que evita resultados errados, e a detecção, localização e reconfiguração do defeito. Consequentemente, esta forma de redundância é mais dispendiosa do que as anteriores, sendo utilizada em aplicações que necessitam de alta confiabilidade.

A **redundância modular tripla** (“triple modular redundancy” – TMR) é a forma de redundância de hardware passiva mais utilizada. Nesta técnica, o hardware é triplicado e utiliza-se um **votador** para escolher a saída que será apresentada pelo sistema (a saída de um sistema com votador é igual à saída da maioria das saídas dos módulos de entrada). Neste caso, o votador é majoritário, e mesmo que um dos módulos apresente defeito, estando os outros dois módulos livres de problemas, este é mascarado pelo votador. A figura 3 apresenta, esquematicamente, um TMR [Siewiorek-82] [Johnson-89]. Como exemplos de aplicação, podemos ter sistemas TMR para processadores, memória e outros módulos de hardware em sistemas que requeiram tolerância a defeitos.

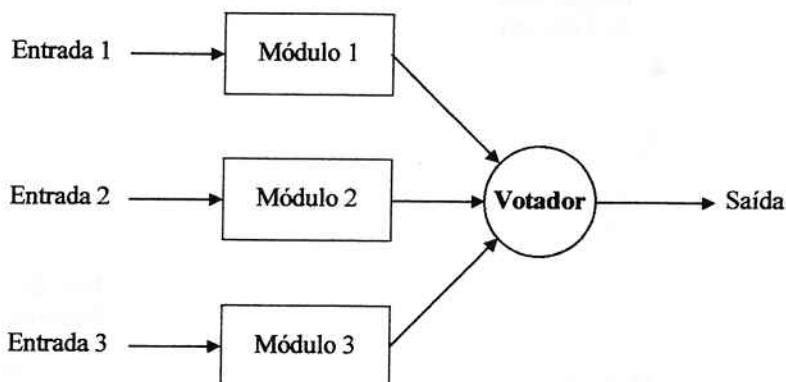


Figura 3 – Redundância modular tripla (TMR), com 3 módulos idênticos e um votador.

Um dos problemas-chave do TMR é o votador pois, caso este apresente defeito, o sistema como um todo falha. Desta forma, o votador passa a ser um componente fundamental desta técnica, limitando a confiabilidade do sistema à confiabilidade do votador.

A **redundância N-modular** (“N-modular redundancy” - NMR) é uma generalização da TMR, que utiliza N módulos idênticos [Siewiorek-82] [Johnson-89]. Em geral, o número de módulos é ímpar para garantir sempre uma maioria na votação.

3.5 Taxa de Falha e Função Confiabilidade

A **taxa de falha** (“failure rate”) é o número esperado de falhas⁽¹⁾ de um dispositivo ou sistema para um determinado período de tempo. Se um dispositivo falha uma vez a cada 1000 horas, a sua taxa de falhas é 1/1000 falhas/hora. Este parâmetro, essencial no cálculo da confiabilidade, é representado pelo símbolo λ e serve para a comparação entre dispositivos ou sistemas. A redundância inserida dentro de um sistema visa obter valores para a confiabilidade e/ou segurança maiores do que aqueles que o sistema teria caso fosse concebido sem nenhuma redundância [Siewiorek-82] [Johnson-89].

A **confiabilidade** de um componente ou sistema é representada por $R(t)$ e corresponde à probabilidade deste funcionar corretamente no intervalo de tempo $[t_0, t]$, dado que este estava funcionando no instante t_0 . Supondo um universo de N componentes, funcionando no instante t_0 , e que N_f componentes tenham falhado e N_o componentes tenham permanecido operacionais até o instante t , então a confiabilidade $R(t)$, que é a probabilidade de um componente ter permanecido operacional até o instante t , pode ser calculada por:

$$R(t) = \frac{N_o(t)}{N} = \frac{N_o(t)}{N_o(t) + N_f(t)} . \quad (8)$$

Analogamente, a **não-confiabilidade** $Q(t)$, que é a probabilidade de um componente ou sistema não ter permanecido operacional no instante t , pode ser calculada por:

$$Q(t) = \frac{N_f(t)}{N} = \frac{N_f(t)}{N_o(t) + N_f(t)} . \quad (9)$$

⁽¹⁾ No caso de um componente, o termo “falha” tem o significado de “defeito”.

Obviamente,

$$R(t) + Q(t) = 1 . \quad (10)$$

A função **taxa de falha** $z(t)$ é definida como:

$$z(t) = \frac{1}{N_o(t)} \cdot \frac{dN_o(t)}{dt} = \frac{1}{N_o(t)} \cdot \left[-N \cdot \frac{dR(t)}{dt} \right] = -\frac{\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} . \quad (11)$$

Embora a função taxa de falhas apresente dois componentes variantes com o tempo ($N_o(t)$ e $dN_o(t)/dt$), os componentes eletrônicos apresentam, experimentalmente, um comportamento particular. Existe uma fase da vida do componente onde a taxa de falhas pode ser considerada aproximadamente constante. A assim chamada “curva da banheira” (“bathtub curve”), apresentada na figura 4, mostra a função taxa de falhas para os componentes eletrônicos.

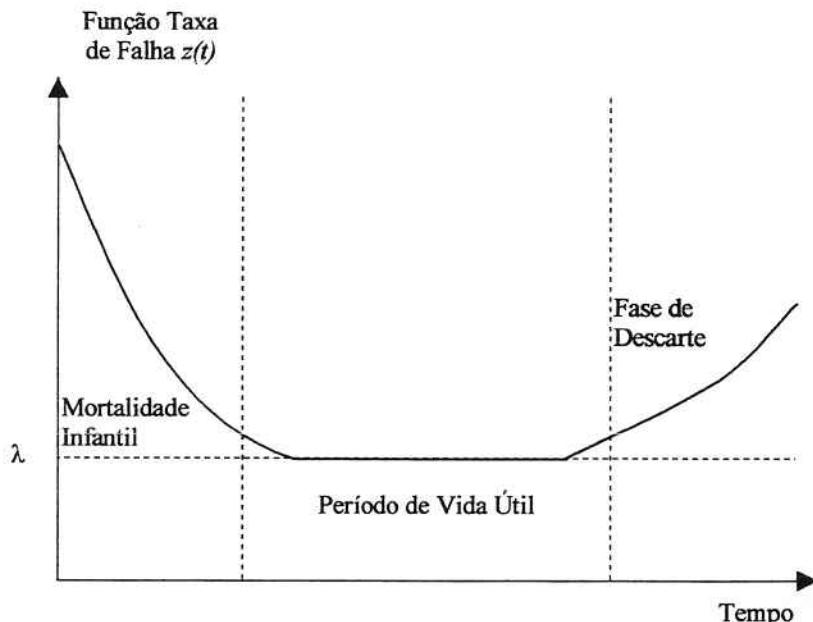


Figura 4 – “Curva da banheira” ilustrando a função taxa de falha para componentes eletrônicos.

No início da vida os componentes apresentam uma taxa de falha mais elevada cujo valor máximo encontra-se no instante inicial de tempo, devido a existência de componentes abaixo da especificação, ou com defeito de fabricação. Esta fase é denominada de “mortalidade infantil” e tem duração aproximada de 20 semanas. Esta taxa cai com o tempo até se estabilizar; neste momento, o componente está dentro do seu “período de vida útil”, que é um período longo de tempo (aproximadamente de 5 a 25 anos) [Siewiorek-82]. Finalmente, na última fase do componente, a “fase de descarte”, existe uma maior taxa de falhas, crescente, devido ao desgaste físico do componente. O problema da mortalidade infantil pode ser evitado testando-se o componente durante um certo período de tempo, em condições reais de operação, antes deste ser colocado em operação (“burn in”).

A taxa de falha λ , descrita anteriormente como o número de falhas por hora, refere-se ao período de vida útil do componente, onde $z(t)$ é constante. O problema da fase de descarte é contornado substituindo-o antes dele atingir esta fase, através da manutenção preventiva. Desta forma, todo o equacionamento será elaborado considerando-se que os componentes eletrônicos possuem uma taxa de falha constante e igual a λ . Como

$$z(t) = -\frac{\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} , \quad (12)$$

então a solução desta equação diferencial é:

$$R(t) = e^{-\lambda t} . \quad (13)$$

Esta função exponencial também é conhecida como a **lei da falha exponencial**, e vale somente para componentes eletrônicos, que podem ser considerados como elementos com taxa de falhas constante na maioria dos cálculos de confiabilidade de sistemas.

3.6 Cobertura de Defeito

Um aspecto fundamental na avaliação de um sistema tolerante a defeitos é a sua **cobertura de defeitos** (“fault coverage”). A cobertura de defeitos de um sistema trará um impacto significativo no cálculo da sua confiabilidade e segurança [Siewiorek-82] [Johnson-89]. A cobertura de defeito pode se dar em diversos níveis:

- Cobertura de deteção do defeito;
- Cobertura de localização do defeito;
- Cobertura de contenção do defeito;
- Cobertura de recuperação do defeito.

No cálculo da confiabilidade de um sistema tolerante a defeitos o fator de cobertura de recuperação do defeito normalmente é o mais considerado, sendo muitas vezes sinônimo de fator de cobertura. Neste trabalho, o fator de cobertura de defeito será representado pela letra C e é definido como a probabilidade condicional de recuperação de um defeito, dado que ele ocorreu.

4. MODELOS CLÁSSICOS DE CONFIABILIDADE

Existem diversas alternativas para a elaboração do cálculo da confiabilidade, baseadas em abordagens analíticas. Destacam-se o **modelo combinatório** e o **modelo de Markov**.

4.1 Modelo Combinatório

O **modelo combinatório** utiliza a técnica probabilística que enumera todas as formas nas quais o sistema pode estar operacional ou falho. A confiabilidade é a soma das probabilidades de todos os eventos que levam o sistema a um estado operacional. Dois casos são mais significativos: os **sistemas-série**, onde todos os componentes dos sistemas devem estar funcionando para o sistema estar operacional; e os **sistemas paralelos**, onde apenas um dos componentes necessita estar funcionando para o sistema funcionar. Na prática existem os **sistemas híbridos** (série-paralelos) que combinam estes dois tipos modelos.

Apesar do modelo combinatório ser de fácil utilização, ele apresenta problemas para a modelagem de sistemas mais complexos, quando a construção dos diagramas de blocos de confiabilidade passa a ser uma tarefa árdua e as expressões resultantes ficam muito complicadas. Um exemplo disso é a introdução do fator de cobertura de defeitos num sistema; outro exemplo é a incorporação das taxas de manutenção dos módulos, que podem ser de caráter corretivo ou preventivo. Nestas situações, o modelo combinatório fica muito difícil ou impossível de ser aplicado, e o modelo de Markov passa a ser uma alternativa altamente satisfatória.

4.2 Modelo de Markov

Um exemplo simples para ilustrar o modelo de Markov sem cobertura de defeitos e sem reparo é a arquitetura TMR, com três módulos idênticos organizados num esquema de votação majoritário e sem reconfiguração do votador. Neste caso, o estado do sistema num determinado instante pode ser definido como $S = \{S_1, S_2, S_3\}$, onde um estado genérico S_i (para variando de i de 1 a 3) indica o estado do módulo i , sendo que $S_i = 1$ significa que o módulo i está isento de defeito e $S_i = 0$ que o módulo está com defeito. Os estados possíveis do sistema TMR são: (111), (110), (101), (011), (100), (001), (010) e (000), como mostra a figura 5. Como o sistema TMR tolera somente um defeito, os estados (100), (001), (010) e (000) caracterizam a falha do sistema. As mudanças de estados do sistema são indicadas pelas transições entre os seus estados, sinalizando que algum módulo apresentou defeito, e são representadas pela probabilidade de um módulo, naquele estado em particular, apresentar defeito. Por simplicidade, adota-se que apenas uma falha pode ocorrer de cada vez.

Considerando-se o sistema TMR com todos os módulos perfeitos num instante inicial de tempo, este encontra-se, então, no estado (111). Ao ocorrer um defeito no instante t , este irá transitar para um dos seguintes estados: (110), (101) ou (011), dependendo do módulo que apresentar defeito. A inexistência de um defeito faz com que o sistema não mude de estado (transição para o próprio estado). Os estados deste sistema podem ser agrupados em três categorias: estado de perfeito funcionamento do sistema, sem módulos defeituosos (111); estados do sistema com um defeito ocorrido (110), (101) e (011); e estados do sistema com falha (100), (001), (010) e (000). Cada uma das transições de um estado para outro está associada com a probabilidade de que tal transição ocorra num determinado período de tempo, correspondendo à ocorrência de defeito em um determinado módulo.

Considerando-se a lei da falha exponencial, com taxa de falha λ constante, a probabilidade de um módulo apresentar defeito no instante de tempo $t+\Delta t$, dado que este estava operacional no instante t , é dada por [Johnson-89]:

$$Q_{\text{Módulo}}(t) = 1 - R_{\text{Módulo}}(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot \Delta t}. \quad (14)$$

O termo exponencial pode ser expandido numa série infinita de termos:

$$e^{-\lambda \cdot \Delta t} = 1 + \frac{(-\lambda \cdot \Delta t)}{1!} + \frac{(-\lambda \cdot \Delta t)^2}{2!} + \frac{(-\lambda \cdot \Delta t)^3}{3!} \dots \quad (15)$$

Logo, a probabilidade de um módulo estar com defeito no instante $t + \Delta t$ é:

$$Q_{\text{Módulo}}(t + \Delta t) = (\lambda \cdot \Delta t) - \frac{(-\lambda \cdot \Delta t)^2}{2!} - \frac{(-\lambda \cdot \Delta t)^3}{3!} \dots \quad (16)$$

Para intervalos de tempo pequenos (Δt pequeno), esta expressão pode ser reduzida a:

$$1 - e^{-\lambda \cdot \Delta t} \approx \lambda \cdot \Delta t, \quad (17)$$

que é a probabilidade aproximada de um módulo deixar de funcionar no período Δt .

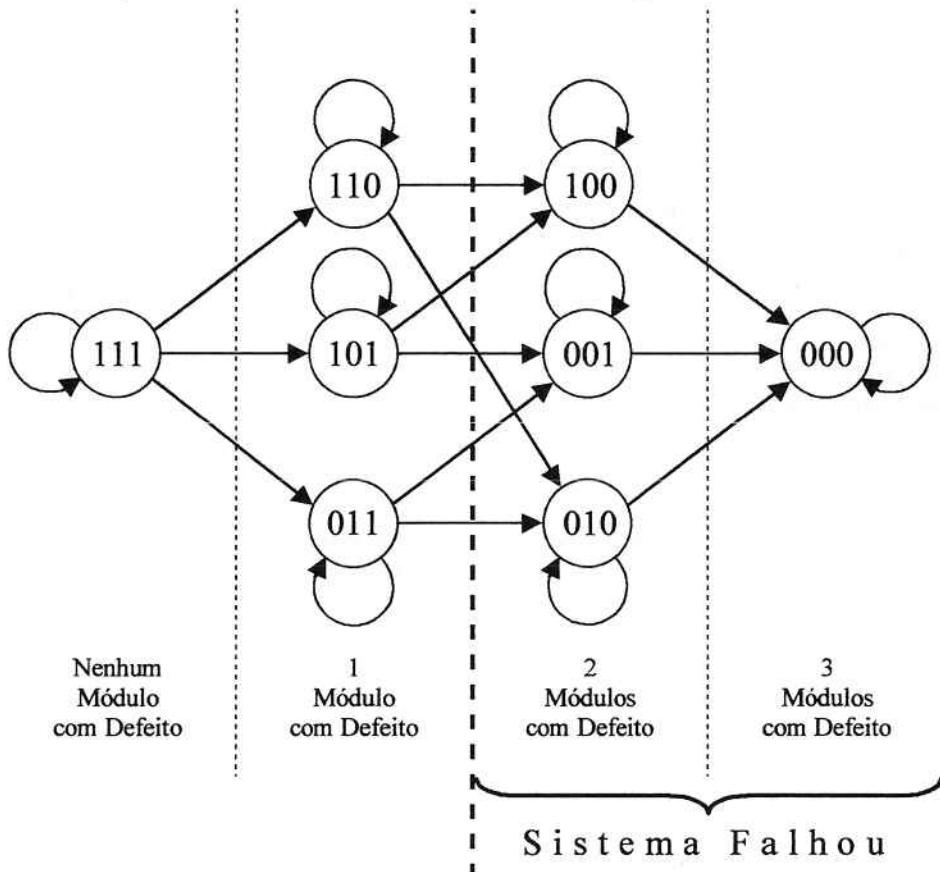


Figura 5 – Sistema TMR e seus possíveis estados e transições.

Assim, para o sistema TMR tem-se o diagrama de transição de estados da figura 6, com as probabilidades atribuídas às transições de estados. Nota-se que a probabilidade do sistema permanecer num mesmo estado no período Δt é a probabilidade do sistema não mudar de estado neste período de tempo.

Contudo, é possível reduzir-se o diagrama de transição de estados do sistema combinando os estados situados dentro de uma mesma categoria: estado sem módulo defeituoso, estados com um módulo defeituoso e estados do sistema com falha (com dois ou três módulos defeituosos). Desta forma o sistema TMR passa a possuir somente 3 estados:

- Estado 3: sistema TMR com todos os módulos funcionando perfeitamente;
- Estado 2: sistema TMR com um módulo defeituoso;
- Estado F: sistema TMR com dois ou três módulos defeituosos (sistema falhou).

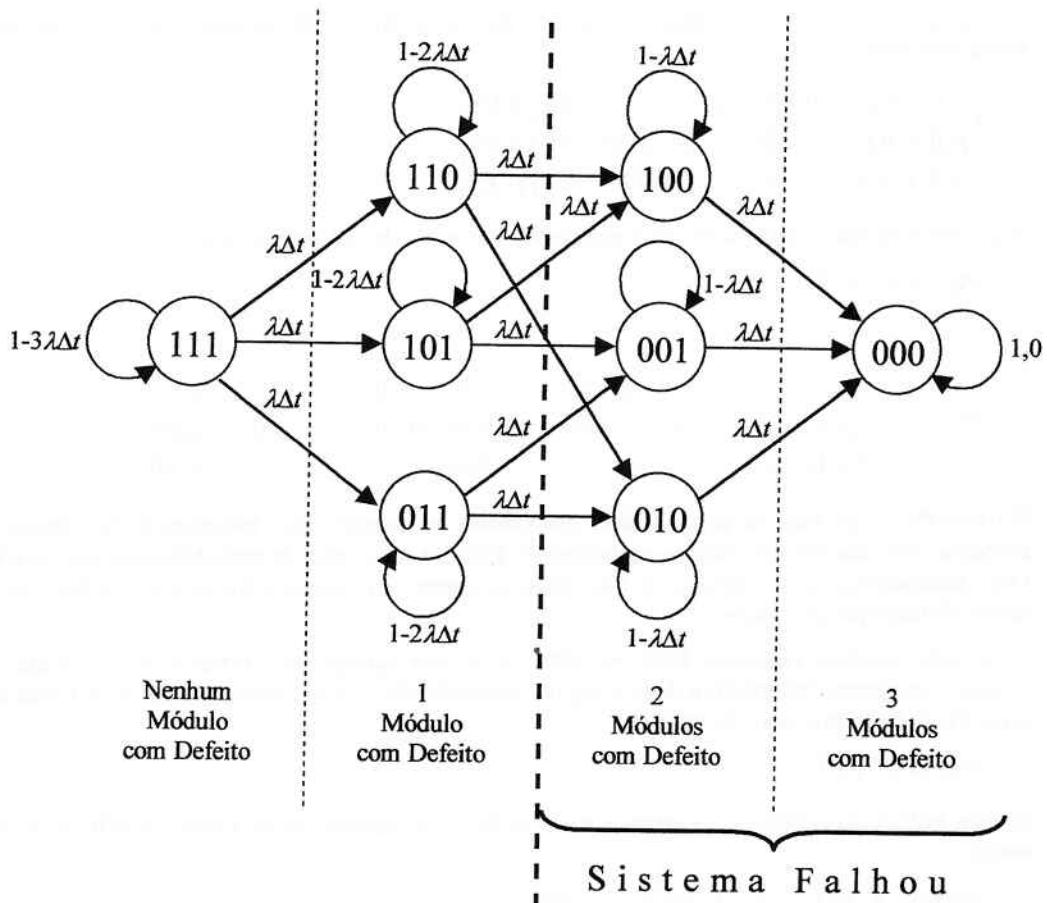


Figura 6 – Probabilidades de transição entre estados de um sistema TMR.

O novo diagrama de transição de estados é apresentado na figura 7. Neste caso, a transição do estado 3 para o estado 2 ocorre com uma probabilidade aproximada de $3\lambda\Delta$, enquanto a transição do estado 2 para o estado F ocorre com probabilidade $2\lambda\Delta$.

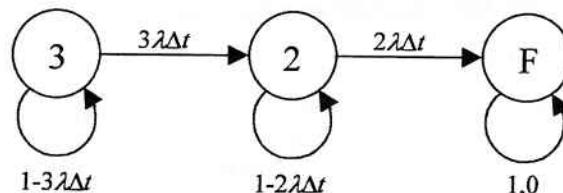


Figura 7 – Diagrama de transição de estados do sistema TMR obtido a partir do modelo de Markov reduzido.

A partir deste diagrama simplificado pode-se escrever as equações relacionadas ao modelo de Markov com certa facilidade. Para um determinado estado S , a probabilidade do sistema se encontrar neste estado num determinado instante de tempo $t+\Delta t$ depende do sistema se encontrar em estados que possam transitar para o estado S e das probabilidades associadas à essas transições. Para o estado 3, a probabilidade do sistema se encontrar em S_3 no instante $t+\Delta t$ depende da probabilidade deste se encontrar em S_3 no instante t e da probabilidade deste transitar para o próprio estado S_3 (não transitar para o estado S_2). Assim:

$$p_j(t + \Delta t) = (1 - 3\lambda \Delta t) \cdot p_j(t) . \quad (18)$$

onde $p_3(t)$ é a probabilidade do sistema estar no estado S_3 no instante t e $p_3(t + \Delta t)$ é a probabilidade do sistema se encontrar no estado S_3 no instante $t + \Delta t$. Analogamente, as equações para os estados S_2 e S_F são, respectivamente:

$$p_i(t + \Delta t) = (3\lambda\Delta t) \cdot p_i(t) + (1 - 2\lambda\Delta t) \cdot p_i(t) \quad \text{e} \quad (19)$$

$$p_e(t + \Delta t) = (2\lambda\Delta t) \cdot p_e(t) + p_e(t) \quad (20)$$

As equações associadas ao modelo de Markov para o sistema TMR também podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} p_3(t + \Delta t) \\ p_2(t + \Delta t) \\ p_F(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - 3\lambda\Delta t) & 0 & 0 \\ 3\lambda\Delta t & (1 - 2\lambda\Delta t) & 0 \\ 0 & 2\lambda\Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_2(t) \\ p_F(t) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Numa maneira mais condensada, estas expressões são reduzidas a [Johnson-89]:

$$\mathbf{P}(t + \Delta t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}(t). \quad (22)$$

onde:

$$\mathbf{P}(t + \Delta t) = \begin{bmatrix} p_3(t + \Delta t) \\ p_2(t + \Delta t) \\ p_F(t + \Delta t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1 - 3\lambda\Delta t) & 0 & 0 \\ 3\lambda\Delta t & (1 - 2\lambda\Delta t) & 0 \\ 0 & 2\lambda\Delta t & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_3(t) \\ p_2(t) \\ p_F(t) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

O termo $\mathbf{P}(t)$ é um vetor de probabilidade dos estados no instante t que indica as probabilidades do sistema se encontrar em cada um dos estados no instante t ; $\mathbf{P}(t + \Delta t)$ é o vetor de probabilidades dos estados no instante $t + \Delta t$, indicando as probabilidades do sistema se encontrar em cada um dos estados no instante $t + \Delta t$; e \mathbf{A} é a matriz de transição de estados.

A equação matricial resultante pode ser vista como uma equação de diferença com o intuito de se obter a solução, cujo encaminhamento é dado a seguir. Supondo $t=0$ e assumindo um valor inicial para o vetor $\mathbf{P}(0)$, o vetor $\mathbf{P}(\Delta t)$ é obtido a partir de $\mathbf{P}(0)$:

$$\mathbf{P}(\Delta t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}(0). \quad (24)$$

O vetor $\mathbf{P}(2\Delta t)$, no instante $2\Delta t$, é obtido a partir de $\mathbf{P}(\Delta t)$, no instante Δt , ou a partir de $\mathbf{P}(0)$, no instante inicial de tempo:

$$\mathbf{P}(2\Delta t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}(\Delta t) = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}(0)] = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{P}(0). \quad (25)$$

Por analogia, a solução geral do vetor de probabilidades dos estados no instante $n\Delta t$ pode ser obtida a partir deste vetor de probabilidades no instante inicial de tempo:

$$\mathbf{P}(n\Delta t) = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{P}(0). \quad (26)$$

Como a probabilidade do sistema falhar é a probabilidade deste se encontrar num estado falho, para o sistema TMR falhar este deve se encontrar no estado P_F . Logo, a confiabilidade do sistema TMR é sua probabilidade de não se encontrar num estado falho, podendo ser escrita como:

$$R_{TMR}(t) = 1 - p_F(t) = p_3(t) + p_2(t). \quad (27)$$

Nesta abordagem do modelo de Markov, foi obtida uma solução para o tempo discreto, com intervalos de tempo (Δt) pequenos. Neste caso, é lícito supor que somente uma transição ocorra de cada vez, o que é muito prático do ponto de vista computacional. É possível obter-se também uma solução contínua no tempo a partir do modelo de Markov, onde as transições entre os estados podem ocorrer em qualquer instante de tempo. Esta solução é obtida a partir das equações de tempo discreto, quando o intervalo Δt tende a zero, através da transformada de Laplace.

4.3 Proposta de um Modelo Generalizado Utilizando o Modelo de Markov com Reparo e com Fator de Cobertura

Algumas abordagens a respeito da utilização do modelo de Markov para incorporar o reparo ou o fator de cobertura são encontradas na literatura especializada. Porém é desejável a existência de um modelo que incorpore no seu equacionamento tanto o fator de cobertura quanto a taxa de reparo, sendo esta última dividida em corretiva e preventiva. A seguir será proposto um modelo genérico que atende a todos estes requisitos, para um sistema com redundância e N módulos [Cugnasca-99].

Para ilustrar este modelo será considerado um sistema composto por três módulos idênticos, cada um com taxa de defeito λ , fator de cobertura C , taxa de manutenção corretiva μ_C e taxa de manutenção preventiva μ_P . As saídas dos módulos entram num votador com porta de limiar, que se reconfigura à medida que os módulos apresentam defeitos detectados e corretamente tratados. Quando um erro num módulo é detectado, a chave referente a este módulo é desconectada do votador, que altera o seu limiar de votação, considerando somente os módulos efetivamente atuantes. Este esquema é ilustrado pela figura 8.

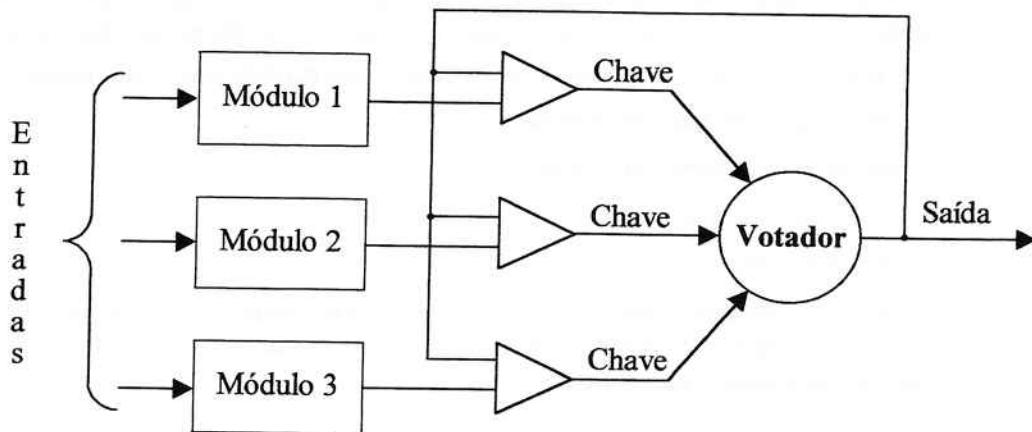


Figura 8 – Redundância N -modular com auto-eliminação de módulos e votador com porta de limiar, para $N=3$.

O diagrama que representa todos os estados do sistema e todas as transições entre os estados é apresentado na figura 9. Os estados são denominados na forma S_{i_α} , onde o índice i representa o número de módulos funcionando no sistema e o sub-índice α representa o número de módulos com falhas não detectadas. No instante inicial de tempo o sistema encontra-se no estado S_{3_0} , pois todos os seus módulos estão operacionais.

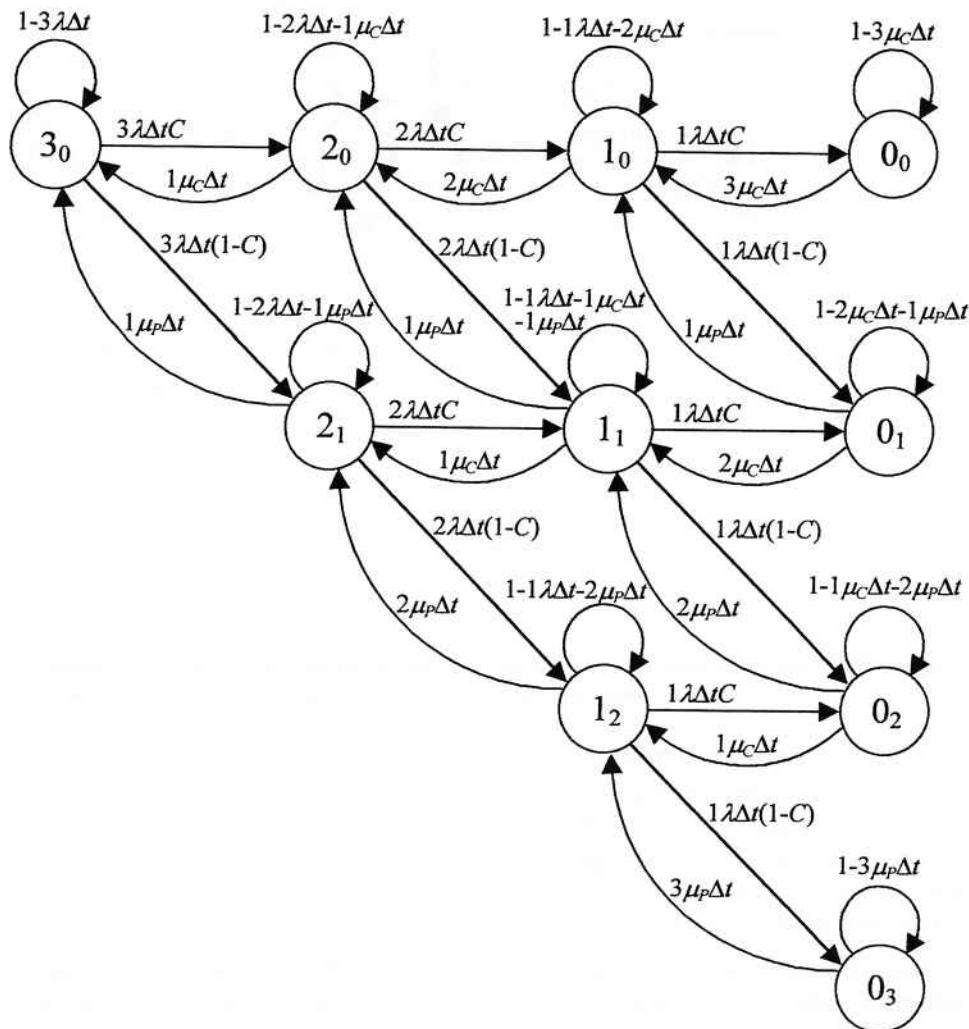


Figura 9 – Modelo de Markov generalizado de tempo discreto com fator de cobertura, reparo preventivo e reparo corretivo, para um sistema com redundância e 3 módulos idênticos.

Para analisar o diagrama de estados, supõe-se que num dado instante de tempo qualquer o sistema se encontra num estado genérico S_{i_a} (i módulos funcionando e a módulos com defeito não detectável). No intervalo de tempo Δt pode ocorrer um dos seguintes eventos, estando o sistema num determinado estado:

- defeito com cobertura num módulo;
- defeito sem cobertura num módulo;
- reparo corretivo num módulo; e
- reparo preventivo num módulo.

Por simplicidade, considera-se que só ocorre, no máximo, um evento em cada intervalo de tempo Δt , o que é razoável para Δt pequeno. A figura 10 apresenta as transições que fazem o sistema sair do estado S_{i_a} e as transições de outros estados para este estado.

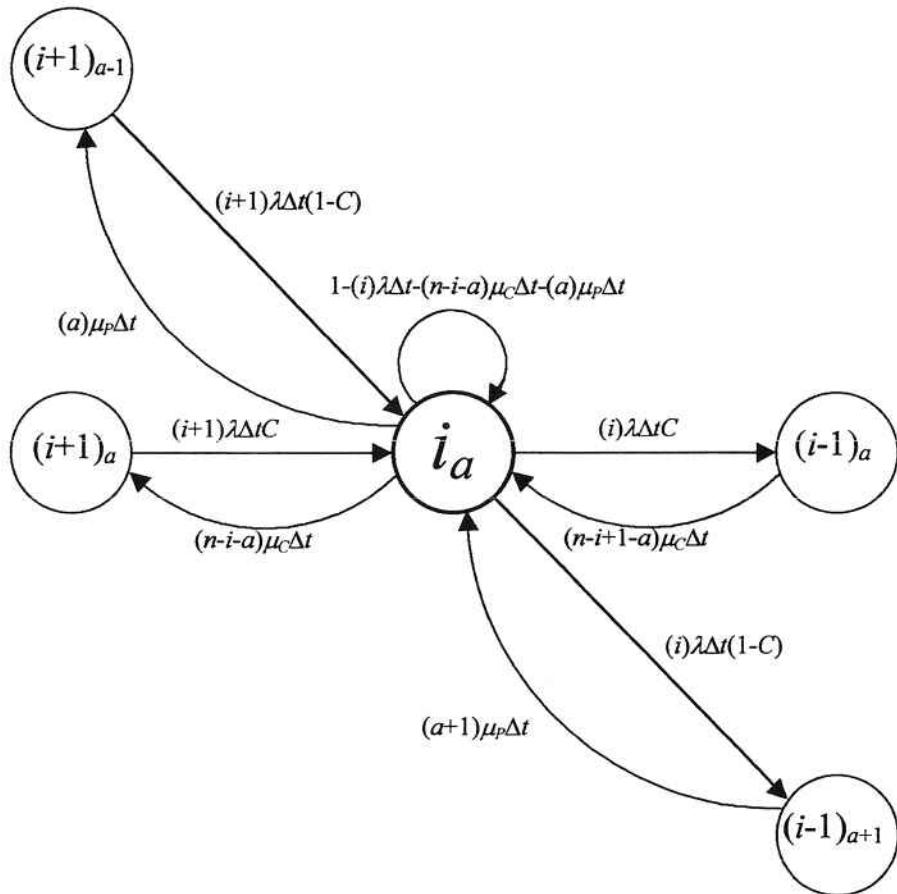


Figura 10 – Transições associadas a um estado genérico do modelo de Markov generalizado de tempo discreto com fator de cobertura, taxa de reparo corretivo e taxa de reparo preventivo.

Quando ocorre uma manutenção corretiva, o sistema transita para o estado $S_{i_{a+1}}$, aumentando o número de módulos operacionais, mantendo o número de defeitos sem cobertura. Com a manutenção preventiva, o sistema passa para o estado $S_{i_{a-1}}$, decrescendo o número de defeitos sem cobertura e de módulos com defeito. Deve-se salientar que uma manutenção preventiva pode ser efetuada tanto num módulo em perfeito estado de funcionamento quanto num módulo defeituoso; na prática, se a manutenção for realizada num módulo sem defeito, não muda o estado em que o sistema se encontra.

As probabilidades de cada transição estão apresentadas na figura 9, considerando a taxa de defeito λ , a taxa de manutenção corretiva μ_c , a taxa de manutenção preventiva μ_p e o fator de cobertura de defeitos C . De forma genérica, estas probabilidades estão apresentadas na figura 10, para um dado estado S_{i_a} .

Desta forma, tem-se as seguintes equações na forma matricial que fornecem as probabilidades do sistema se encontrar num determinado estado S_{i_a} :

$$\begin{bmatrix} P_{0_0}(t + \Delta t) \\ P_{0_1}(t + \Delta t) \\ P_{0_2}(t + \Delta t) \\ P_{0_3}(t + \Delta t) \\ P_{1_0}(t + \Delta t) \\ P_{1_1}(t + \Delta t) \\ P_{1_2}(t + \Delta t) \\ P_{2_0}(t + \Delta t) \\ P_{2_1}(t + \Delta t) \\ P_{3_0}(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} P_{0_0}(t) \\ P_{0_1}(t) \\ P_{0_2}(t) \\ P_{0_3}(t) \\ P_{1_0}(t) \\ P_{1_1}(t) \\ P_{1_2}(t) \\ P_{2_0}(t) \\ P_{2_1}(t) \\ P_{3_0}(t) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - 3\mu_c \Delta t & 0 & 0 & 0 & \lambda \Delta t C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2\mu_c \Delta t - \mu_p \Delta t & 0 & 0 & \lambda \Delta t (1 - C) & \lambda \Delta t C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \mu_c \Delta t - 2\mu_p \Delta t & 0 & 0 & \lambda \Delta t (1 - C) & \lambda \Delta t C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 3\mu_p \Delta t & 0 & 0 & \lambda \Delta t (1 - C) & 0 & 0 & 0 \\ 3\mu_c \Delta t & \mu_p \Delta t & 0 & 0 & 1 - \lambda \Delta t - 2\mu_c \Delta t & 0 & 0 & 2\lambda \Delta t C & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_p \Delta t & 2\mu_p \Delta t & 0 & 0 & 1 - \lambda \Delta t - \mu_c \Delta t - \mu_p \Delta t & 0 & 2\lambda \Delta t (1 - C) & 2\lambda \Delta t C & 0 \\ 0 & 0 & \mu_c \Delta t & 3\mu_p \Delta t & 0 & 0 & 1 - \lambda \Delta t - 2\mu_p \Delta t & 0 & 2\lambda \Delta t (1 - C) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_c \Delta t & \mu_p \Delta t & 0 & 1 - 2\lambda \Delta t - \mu_c \Delta t & 0 & 3\lambda \Delta t C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_c \Delta t & 2\mu_p \Delta t & 0 & 1 - 2\lambda \Delta t - \mu_p \Delta t & 3\lambda \Delta t (1 - C) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_c \Delta t & \mu_p \Delta t & \mu_p \Delta t & 1 - 3\lambda \Delta t \end{bmatrix} \quad (29)$$

Para um sistema genérico composto por n módulos iguais, as seguintes considerações a respeito do estado S_i são verdadeiras:

- existem i módulos funcionando;
- existem $(n-i)$ módulos com defeito;
- existem a módulos com defeitos sem cobertura;
- existem $(n-i-a)$ módulos com defeitos com cobertura; e
- $(i+a) \leq n$.

Então, pode-se definir a expressão genérica para a determinação da probabilidade do sistema estar num determinado estado S_i no instante $t + \Delta t$, a ser utilizada computacionalmente nas simulações deste modelo.

$$\begin{aligned} p_{i_a}(t + \Delta t) = & [1 - (i)\lambda \Delta t - (n-i-a)\mu_c \Delta t - (a)\mu_p \Delta t] \cdot p_{i_a} \\ & + [(i+1)\lambda \Delta t C] \cdot p_{i+1_a} & \text{para } (i+a) < n \\ & + [(i+1)\lambda \Delta t (1 - C)] \cdot p_{i+1_{a-1}} & \text{para } a > 0 \\ & + [(n-i+1-a)\mu_c \Delta t] \cdot p_{i-1_a} & \text{para } i > 0 \\ & + [(a+1)\mu_p \Delta t] \cdot p_{i-1_{a+1}} & \text{para } i > 0 \end{aligned} \quad (30)$$

5. MODELO DE CONFIABILIDADE NEBULOSA

Esta abordagem permite que todos os parâmetros utilizados no cálculo da confiabilidade possam ser modelados de forma nebulosa, incorporando, assim, a incerteza existente a respeito dos seus valores. Consequentemente, o resultado a ser obtido são curvas de confiabilidade com graus de possibilidades associados a cada uma delas.

Para apresentar este modelo genérico, será considerado um sistema simples, sem redundância, composto por um módulo e que possua cobertura de defeito. Tendo ocorrido um defeito num módulo, este poderá ser detectado ou não (dependendo do fator de cobertura do módulo); desta forma, o reparo trará o módulo ao seu estado operacional através da manutenção corretiva (ocorreu um erro e houve cobertura) ou preventiva (ocorreu um erro e não houve cobertura).

Deve-se observar, porém, que este módulo pode ser aplicado a um sistema qualquer com n módulos iguais, com redundância ou não, e permite a incorporação dos parâmetros taxa de falha, fator de cobertura, taxa de reparo corretivo e taxa de reparo preventivo, com incertezas a eles associadas. Eventualmente, se um ou mais destes parâmetros não for ser utilizado, o modelo ainda assim continua válido e, neste caso, trata-se de um caso particular.

Para um sistema simples com um módulo somente, e considerando-se todos os parâmetros mencionados, tem-se o diagrama de transição de estados apresentado na figura 11. O estado 1_0 corresponde ao estado do sistema com o seu único módulo funcionando e, portanto, não existe nenhum defeito não detectado. Tendo ocorrido uma falha, o sistema transita para um dos estados de falha: 0_0 (o módulo apresentou um defeito e houve cobertura) ou 0_1 (o módulo apresentou defeito e não houve cobertura). Através da manutenção, o sistema pode retornar ao estado 1_0 .

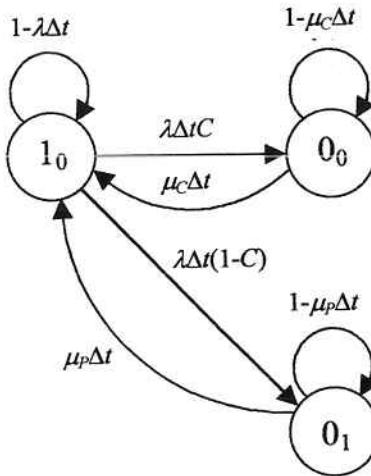


Figura 11 – Diagrama de Markov para um sistema com um módulo com cobertura, taxa de reparo corretivo e taxa de reparo preventivo.

As equações do modelo de Markov, que fornecem as probabilidades do sistema se encontrar em cada um dos seus estados no instante $t+\Delta t$, a partir das probabilidades de estar em cada um dos estados no instante t , são as seguintes:

$$p_{1_0}(t+\Delta t) = (1 - \mu_c \Delta t) \cdot p_{1_0}(t) + \lambda \Delta t C \cdot p_{1_0}(t), \quad (31)$$

$$p_{0_0}(t+\Delta t) = (1 - \mu_p \Delta t) \cdot p_{0_0}(t) + \lambda \Delta t (1 - C) \cdot p_{1_0}(t), \quad (32)$$

$$p_{0_1}(t+\Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) \cdot p_{0_1}(t) + \mu_c \Delta t \cdot p_{1_0}(t) + \mu_p \Delta t \cdot p_{0_0}(t). \quad (33)$$

Estas mesmas equações podem ser escritas na forma matricial:

$$\mathbf{P}(t+\Delta t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}(t), \quad (34)$$

onde

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} p_{1_0}(t) \\ p_{0_0}(t) \\ p_{0_1}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(t+\Delta t) = \begin{bmatrix} p_{1_0}(t+\Delta t) \\ p_{0_0}(t+\Delta t) \\ p_{0_1}(t+\Delta t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - \mu_c \Delta t & 0 & \lambda \Delta t C \\ 0 & 1 - \mu_p \Delta t & \lambda \Delta t (1 - C) \\ \mu_c \Delta t & \mu_p \Delta t & 1 - \lambda \Delta t \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Supondo o instante inicial $t_0=0$, então, para o instante $n \cdot \Delta t$ tem-se:

$$\mathbf{P}(n \cdot \Delta t) = \mathbf{A}^n \cdot \mathbf{P}(0). \quad (36)$$

Os parâmetros taxa de falha (λ), fator de cobertura (C), taxa de reparo corretivo (μ_c) e taxa de reparo preventivo (μ_p) serão modelados como números nebulosos, incorporando a imprecisão que possa existir a respeito dos seus valores, e serão representados por: $\tilde{\lambda}$, \tilde{C} , $\tilde{\mu}_c$ e $\tilde{\mu}_p$, respectivamente.

A figura 12 apresenta $\tilde{\lambda}$, \tilde{C} , $\tilde{\mu}_c$ e $\tilde{\mu}_p$ como números nebulosos. As formas das funções de pertinência é que vão modelar a incerteza associada a cada um destes parâmetros. Para facilitar o entendimento do equacionamento a seguir, as formas de cada uma destas funções foi representada de forma diferenciada. Por exemplo, λ_N , λ_I e λ_S são os valores nominal (N), limite inferior (I) e limite superior (S), respectivamente, para o parâmetro λ modelado como número nebuloso ($\tilde{\lambda}$).

Ainda, caso não seja desejável a incorporação da incerteza associada a algum destes parâmetros, basta modelá-lo como um “fuzzy-singleton”, que este será tratado como um valor “crisp”. Em particular, se não for necessária a utilização de um determinado parâmetro, este deve ser representado por um “fuzzy-singleton” com valor nominal 0.

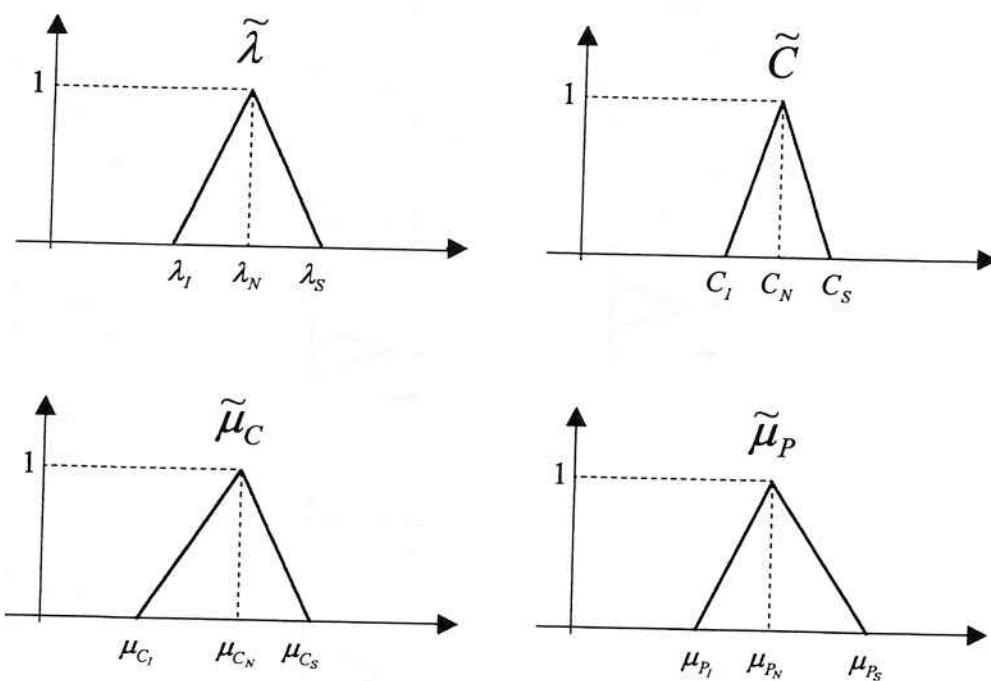


Figura 12 – Funções de pertinência na forma triangular dos parâmetros: taxa de defeito nebuloso ($\tilde{\lambda}$), fator de cobertura nebuloso (\tilde{C}), taxa de reparo corretivo nebulosa ($\tilde{\mu}_C$) e taxa de reparo preventivo nebulosa ($\tilde{\mu}_P$).

Pelo fato dos parâmetros presentes na matriz \mathbf{A} serem números nebulosos, esta será representada por $\tilde{\mathbf{A}}$. O mesmo ocorre com o vetor $\mathbf{P}(n\Delta t)$, que será representado na forma $\tilde{\mathbf{P}}(n\Delta t)$. O equacionamento final resultante é:

$$\tilde{\mathbf{P}}(n\Delta t) = \tilde{\mathbf{A}}^n \cdot \mathbf{P}(0) . \quad (37)$$

A seguir é apresentada a matriz \tilde{A} original:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \tilde{A} & & & \\ & & & \tilde{C} & & \\ & & & & \tilde{C} & \\ & & & & & \tilde{C} \end{pmatrix} \quad (38)$$

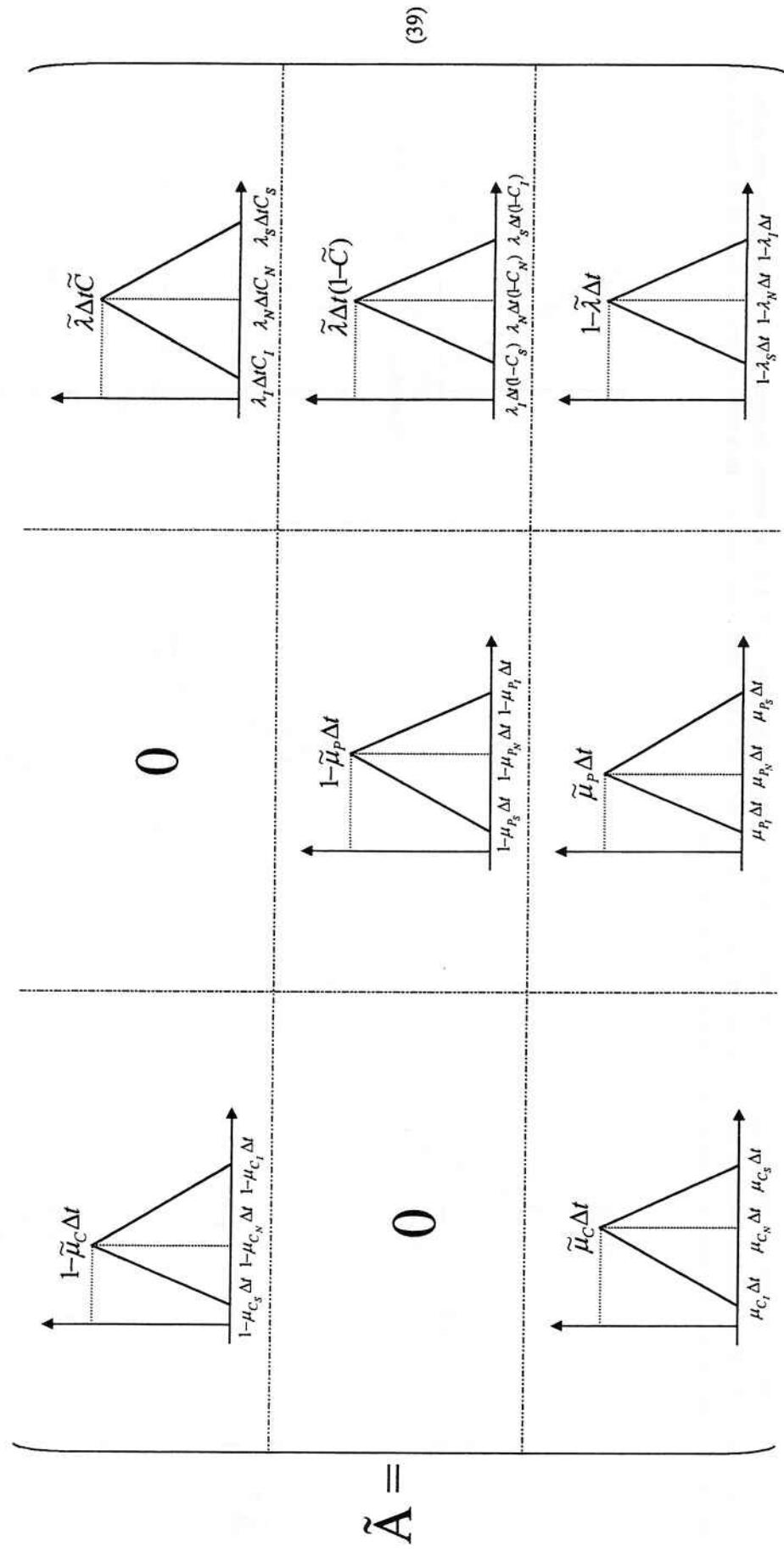
where \tilde{A} is a tridiagonal matrix with the following structure:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_C & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \tilde{\mu}_C & & & \\ & & & \tilde{\mu}_P & & \\ & & & & \tilde{\mu}_P & \\ & & & & & \tilde{\mu}_P \end{pmatrix}$$

and \tilde{C} is a matrix with the following structure:

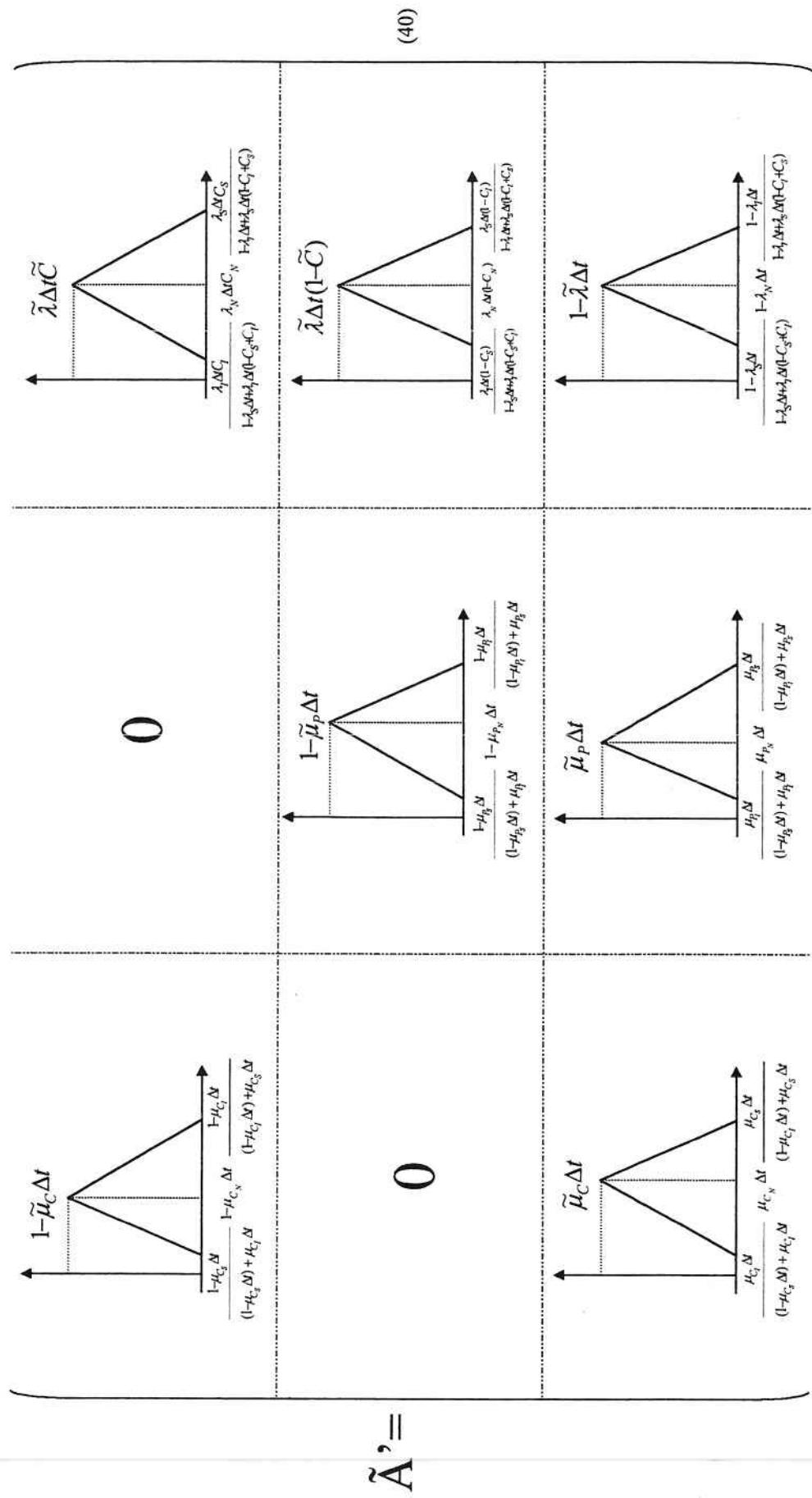
$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_i & \tilde{\lambda}_N & \tilde{\lambda}_j & & & \\ & \Delta t & & & & \\ & & \tilde{\lambda} & & & \\ & & & \tilde{C} & & \\ & & & & \tilde{C} & \\ & & & & & \tilde{C} \end{pmatrix}$$

where $\tilde{\lambda}_i$, $\tilde{\lambda}_N$, $\tilde{\lambda}_j$, $\tilde{\mu}_{C_i}$, $\tilde{\mu}_{C_N}$, $\tilde{\mu}_{C_j}$, $\tilde{\mu}_{P_i}$, $\tilde{\mu}_{P_N}$, $\tilde{\mu}_{P_j}$, $\tilde{\mu}_{\lambda_i}$, $\tilde{\mu}_{\lambda_N}$, $\tilde{\mu}_{\lambda_j}$, $\tilde{\mu}_{\Delta t}$, $\tilde{\mu}_{\tilde{\lambda}}$, $\tilde{\mu}_{\tilde{C}}$, and $\tilde{\mu}_{\tilde{C}_i}$, $\tilde{\mu}_{\tilde{C}_N}$, $\tilde{\mu}_{\tilde{C}_j}$ are triangular fuzzy numbers.



Efetuando-se as multiplicações (aproximadas por triângulos) e subtrações de números nebulosos, tem-se:

No modelo de Markov, a soma das probabilidades de cada coluna é igual a 1 e corresponde à probabilidade do sistema transitar de um dado estado para outros, inclusive, para si mesmo. Assim, deseja-se que a soma das probabilidades nebulosas em cada coluna seja igual a 1, para todo α -corte, o que será alcançado pela normalização das colunas da matriz $\tilde{\mathbf{A}}$. Tem-se, então, a matriz $\tilde{\mathbf{A}}'$ normalizada:



Este exemplo apresentado teve o seu equacionamento efetuado para α -cortes 0 e 1 e a normalização foi necessária somente nos extremos de cada número nebuloso. A cada passo i de simulação, no instante de tempo $i.\Delta t$, a matriz \tilde{A}^i sofre este mesmo processo de normalização.

A confiabilidade nebulosa do sistema, neste exemplo, no instante $i.\Delta t$, é dada por:

$$\tilde{R}(i.\Delta t) = \tilde{p}_{l_0}(i.\Delta t). \quad (41)$$

Como resultado, tem-se duas curvas de confiabilidade em função do tempo para α -corte=0 e uma para α -corte=1. Num dado instante t de tempo, estas curvas fornecem 3 valores de confiabilidade. Os valores extremos possuem um grau de confiança 0 associado, enquanto o valor central possui grau de confiança 1.

Pode-se obter outros valores de confiabilidade com graus de confiança intermediários, interpolando-se outros pontos entre os obtidos. Caso seja desejada uma maior precisão, o cálculo apresentado pode ser efetuado para outros valores de α -corte. A figura 13 apresenta as curvas de confiabilidade nebulosa considerando os α -cortes 0, 0,5 e 1 [Cugnasca-99].

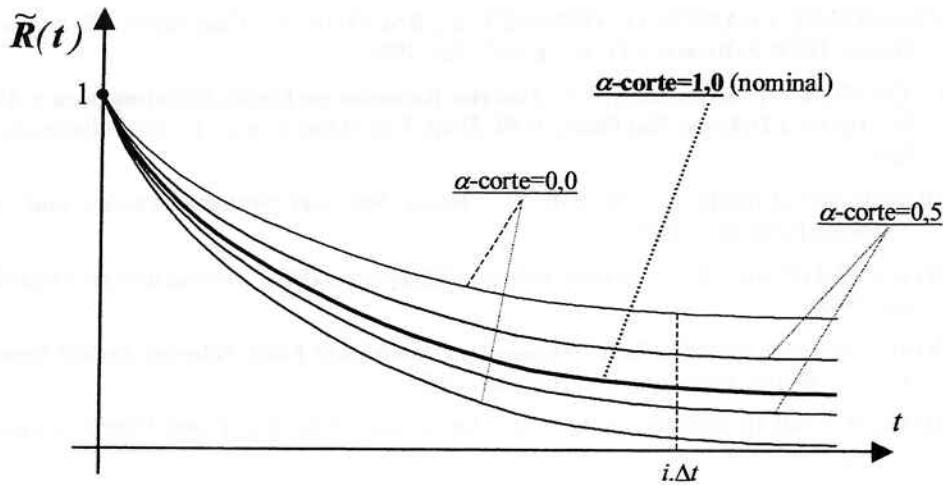


Figura 13 – Curvas da confiabilidade nebulosa para os α -cortes 0,0 , 0,5 e 1,0.

Finalmente, num determinado instante de tempo $i.\Delta t$, a confiabilidade nebulosa pode ser aproximada por um triângulo, como mostra a figura 14, onde cada valor de confiabilidade tem um grau de pertinência no qual o projetista ou analista acredita que o sistema tenha. Os pontos $R_l(i.\Delta t)$ e $R_s(i.\Delta t)$ definem um intervalo de valores de confiabilidade, cada qual com um grau de pertinência. O valor nominal $R_n(i.\Delta t)$ representa o valor mais provável da confiabilidade, com grau de pertinência 1.

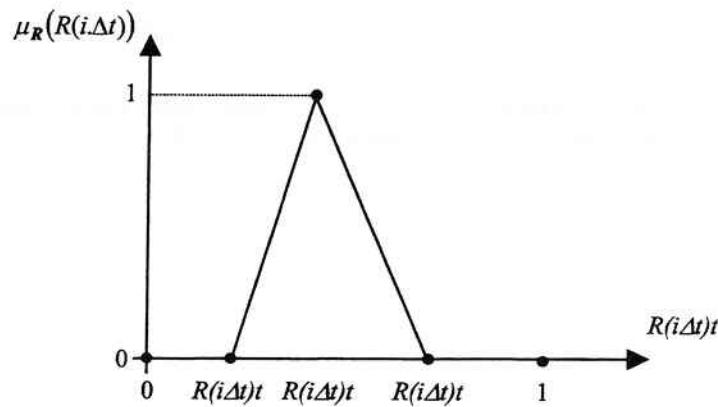


Figura 14 – Confiabilidade nebulosa no instante de tempo $(i.\Delta t)$.

6. CONCLUSÃO

Este artigo apresentou uma forma alternativa de determinação da confiabilidade de um sistema computacional tolerante a defeitos, utilizando a teoria nebulosa, baseada no modelo de Markov (Modelo de Markov Nebuloso). Esta proposta não tem o objetivo de substituir os métodos de determinação de confiabilidade existentes, mas apresenta o benefício de aproveitar a experiência do projetista ou analista do sistema, quando os valores dos parâmetros necessários para o cálculo da confiabilidade são definidos de forma vaga ou imprecisa. O Modelo de Markov Nebuloso não exige precisão dos dados quando isso não é possível, permitindo o cálculo aproximado da confiabilidade de um sistema redundante tolerante a defeitos. Como resultado, tem-se curvas de confiabilidade com diferentes graus de confiança. À medida que as incertezas diminuem, as curvas de confiabilidade tendem àquela obtida pelo Modelo de Markov tradicional. Desta forma, o Modelo de Markov Nebuloso pode ser considerado uma generalização do modelo de Markov tradicional.

BIBLIOGRAFIA

- [BOWLES-95] BOWLES, J.B.; PELÁEZ, C.E. Application of Fuzzy Logic to Reliability Engineering. *Proceedings of the IEEE*, v.83, n.3, p.435-49, Mar. 1995.
- [CRAIGEN-94] CRAIGEN, D.; GERHART, S.; RALSTON, T. Case Study: Darlington Nuclear Generating Station. *IEEE Software*, v.11, n.1, p.30-2, Jan. 1994.
- [CUGNASCA-99] CUGNASCA, P.S. **Modelos Baseados em Lógica Nebulosa para a Avaliação de Sistemas Tolerantes a Defeitos**. São Paulo, 1999. 236p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [DUBOIS-80] DUBOIS, D.; PRADE, H. **Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications**. USA, Academic Press Inc., 1980.
- [EVANS-92] EVANS, R.A. Genuine Imitation Statistician. *IEEE Transaction on Reliability*, v.41, n.2, p.165, Jun. 1992.
- [JOHNSON-89] JOHNSON, B.W. **Design and Analysis of Fault-Tolerant Digital Systems**. Charlottesville, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1989.
- [HUSSEINY-90] HUSSEINY, A.A. et al. Automation of Nuclear Power Plants. *Nuclear Technology*, v.90, p.34-48, Apr. 1990.
- [KLIR-95] KLIR, G.J.; YUAN, B. **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic – Theory and Applications**. Upper Saddle River, New Jersey, USA, Prentice Hall PTR, 1995.
- [LEE-90] LEE, C.C. Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller - Part I. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v.20, n.2, p.404-18, Mar./Apr. 1990.
- [PERRY-91] PERRY, T.S.; ADAM, J.A. Improving the World's Largest, Most Advanced System. *IEEE Spectrum*, v.28, n.2, p.22-36, Feb. 1991.
- [SIEWIOREK-82] SIEWIOREK, D.P.; SWARZ, R.S. **The Theory and Practice of Reliable System Design**. USA, Digital Press, 1982.
- [ZADEH-65] ZADEH, L.A. Fuzzy Sets. *Information and Control*, n.8, p.338-53, 1965.
- [ZADEH-65-2] ZADEH, L.A. Fuzzy Sets and Systems. *Symposium on System Theory, Polytechnic Institute of Brooklyn*, p.29-37, Apr. 1965.
- [ZIMMERMANN-96] ZIMMERMANN, H.-J. **Fuzzy Set Theory and Its Applications**. 3.ed. Boston/Dordrecht/London, Kluwer Academic Publishers, 1996.

BOLETINS TÉCNICOS - TEXTOS PUBLICADOS

- BT/PCS/9301 - Interligação de Processadores através de Chaves Ômicron - GERALDO LINO DE CAMPOS, DEMI GETSCHKO
- BT/PCS/9302 - Implementação de Transparência em Sistema Distribuído - LUÍSA YUMIKO AKAO, JOÃO JOSÉ NETO
- BT/PCS/9303 - Desenvolvimento de Sistemas Especificados em SDL - SIDNEI H. TANO, SELMA S. S. MELNIKOFF
- BT/PCS/9304 - Um Modelo Formal para Sistemas Digitais à Nível de Transferência de Registradores - JOSÉ EDUARDO MOREIRA, WILSON VICENTE RUGGIERO
- BT/PCS/9305 - Uma Ferramenta para o Desenvolvimento de Protótipos de Programas Concorrentes - JORGE KINOSHITA, JOÃO JOSÉ NETO
- BT/PCS/9306 - Uma Ferramenta de Monitoração para um Núcleo de Resolução Distribuída de Problemas Orientado a Objetos - JAIME SIMÃO SICHMAN, ELERI CARDOSO
- BT/PCS/9307 - Uma Análise das Técnicas Reversíveis de Compressão de Dados - MÁRIO CESAR GOMES SEGURA, EDIT GRASSIANI LINO DE CAMPOS
- BT/PCS/9308 - Proposta de Rede Digital de Sistemas Integrados para Navio - CESAR DE ALVARENGA JACOBY, MOACYR MARTUCCI JR.
- BT/PCS/9309 - Sistemas UNIX para Tempo Real - PAULO CESAR CORIGLIANO, JOÃO JOSÉ NETO
- BT/PCS/9310 - Projeto de uma Unidade de Matching Store baseada em Memória Paginada para uma Máquina Fluxo de Dados Distribuído - EDUARDO MARQUES, CLAUDIO KIRNER
- BT/PCS/9401 - Implementação de Arquiteturas Abertas: Uma Aplicação na Automação da Manufatura - JORGE LUIS RISCO BECERRA, MOACYR MARTUCCI JR.
- BT/PCS/9402 - Modelamento Geométrico usando do Operadores Topológicos de Euler - GERALDO MACIEL DA FONSECA, MARIA ALICE GRIGAS VARELLA FERREIRA
- BT/PCS/9403 - Segmentação de Imagens aplicada a Reconhecimento Automático de Alvos - LEONCIO CLARO DE BARROS NETO, ANTONIO MARCOS DE AGUIRRA MASSOLA
- BT/PCS/9404 - Metodologia e Ambiente para Reutilização de Software Baseado em Composição - LEONARDO PUJATTI, MARIA ALICE GRIGAS VARELLA FERREIRA
- BT/PCS/9405 - Desenvolvimento de uma Solução para a Supervisão e Integração de Células de Manufatura Discreta - JOSÉ BENEDITO DE ALMEIDA, JOSÉ SIDNEI COLOMBO MARTINI
- BT/PCS/9406 - Método de Teste de Sincronização para Programas em ADA - EDUARDO T. MATSUDA, SELMA SHIN SHIMIZU MELNIKOFF
- BT/PCS/9407 - Um Compilador Paralelizante com Detecção de Paralelismo na Linguagem Intermediária - HSUEH TSUNG HSIANG, LÍRIA MATSUMOTO SAITO
- BT/PCS/9408 - Modelamento de Sistemas com Redes de Petri Interpretadas - CARLOS ALBERTO SANGIORGIO, WILSON V. RUGGIERO
- BT/PCS/9501 - Síntese de Voz com Qualidade - EVANDRO BACCI GOUVÉA, GERALDO LINO DE CAMPOS
- BT/PCS/9502 - Um Simulador de Arquiteturas de Computadores "A Computer Architecture Simulator" - CLAUDIO A. PRADO, WILSON V. RUGGIERO
- BT/PCS/9503 - Simulador para Avaliação da Confiabilidade de Sistemas Redundantes com Reparo - ANDRÉA LUCIA BRAGA, FRANCISCO JOSÉ DE OLIVEIRA DIAS
- BT/PCS/9504 - Projeto Conceitual e Projeto Básico do Nível de Coordenação de um Sistema Aberto de Automação, Utilizando Conceitos de Orientação a Objetos - NELSON TANOMARU, MOACYR MARTUCCI JUNIOR
- BT/PCS/9505 - Uma Experiência no Gerenciamento da Produção de Software - RICARDO LUIS DE AZEVEDO DA ROCHA, JOÃO JOSÉ NETO
- BT/PCS/9506 - MétodOO - Método de Desenvolvimento de Sistemas Orientado a Objetos: Uma Abordagem Integrada à Análise Estruturada e Redes de Petri - KECHI HIRAMA, SELMA SHIN SHIMIZU MELNIKOFF
- BT/PCS/9601 - MOOPP: Uma Metodologia Orientada a Objetos para Desenvolvimento de Software para Processamento Paralelo - ELISA HATSUE MORIYA HUZITA, LÍRIA MATSUMOTO SATO
- BT/PCS/9602 - Estudo do Espalhamento Brillouin Estimulado em Fibras Ópticas Monomodo - LUIS MEREGE SANCHES, CHARLES ARTUR SANTOS DE OLIVEIRA
- BT/PCS/9603 - Programação Paralela com Variáveis Compartilhadas para Sistemas Distribuídos - LUCIANA BEZERRA ARANTES, LÍRIA MATSUMOTO SATO
- BT/PCS/9604 - Uma Metodologia de Projeto de Redes Locais - TEREZA CRISTINA MELO DE BRITO CARVALHO, WILSON VICENTE RUGGIERO

- BT/PCS/9605 - Desenvolvimento de Sistema para Conversão de Textos em Fonemas no Idioma Português - DIMAS TREVIZAN CHBANE, GERALDO LINO DE CAMPOS
- BT/PCS/9606 - Sincronização de Fluxos Multimídia em um Sistema de Videoconferência - EDUARDO S. C. TAKAHASHI, STEFANIA STIUBIENER
- BT/PCS/9607 - A importância da Completeza na Especificação de Sistemas de Segurança - JOÃO BATISTA CAMARGO JÚNIOR, BENÍCIO JOSÉ DE SOUZA
- BT/PCS/9608 - Uma Abordagem Paraconsistente Baseada em Lógica Evidencial para Tratar Exceções em Sistemas de Frames com Múltipla Herança - BRÁULIO COELHO ÁVILA, MÁRCIO RILLO
- BT/PCS/9609 - Implementação de Engenharia Simultânea - MARCIO MOREIRA DA SILVA, MOACYR MARTUCCI JÚNIOR
- BT/PCS/9610 - Statecharts Adaptativos - Um Exemplo de Aplicação do STAD - JORGE RADY DE ALMEIDA JUNIOR, JOÃO JOSÉ NETO
- BT/PCS/9611 - Um Meta-Editor Dirigido por Sintaxe - MARGARETE KEIKO IWAI, JOÃO JOSÉ NETO
- BT/PCS/9612 - Reutilização em Software Orientado a Objetos: Um Estudo Empírico para Analisar a Dificuldade de Localização e Entendimento de Classes - SELMA SHIN SHIMIZU MELNIKOFF, PEDRO ALEXANDRE DE OLIVEIRA GIOVANI
- BT/PCS/9613 - Representação de Estruturas de Conhecimento em Sistemas de Banco de Dados - JUDITH PAVÓN MENDONZA, EDIT GRASSIANI LINO DE CAMPOS
- BT/PCS/9701 - Uma Experiência na Construção de um Tradutor Inglês - Português - JORGE KINOSHITA, JOÃO JOSÉ NETO
- BT/PCS/9702 - Combinando Análise de "Wavelet" e Análise Entrópica para Avaliar os Fenômenos de Difusão e Correlação - RUI CHUO HUEI CHIOU, MARIA ALICE G. V. FERREIRA
- BT/PCS/9703 - Um Método para Desenvolvimento de Sistemas de Computacionais de Apoio a Projetos de Engenharia - JOSÉ EDUARDO ZINDEL DEBONI, JOSÉ SIDNEI COLOMBO MARTINI
- BT/PCS/9704 - O Sistema de Posicionamento Global (GPS) e suas Aplicações - SÉRGIO MIRANDA PAZ, CARLOS EDUARDO CUGNASCA
- BT/PCS/9705 - METAMBI-OO - Um Ambiente de Apoio ao Aprendizado da Técnica Orientada a Objetos - JOÃO UMBERTO FURQUIM DE SOUZA, SELMA S. S. MELNIKOFF
- BT/PCS/9706 - Um Ambiente Interativo para Visualização do Comportamento Dinâmico de Algoritmos - IZAURA CRISTINA ARAÚJO, JOÃO JOSÉ NETO
- BT/PCS/9707 - Metodologia Orientada a Objetos e sua Aplicação em Sistemas de CAD Baseado em "Features" - CARLOS CÉSAR TANAKA, MARIA ALICE GRIGAS VARELLA FERREIRA
- BT/PCS/9708 - Um Tutor Inteligente para Análise Orientada a Objetos - MARIA EMÍLIA GOMES SOBRAL, MARIA ALICE GRIGAS VARELLA FERREIRA
- BT/PCS/9709 - Metodologia para Seleção de Solução de Sistema de Aquisição de Dados para Aplicações de Pequeno Porte - MARCELO FINGUERMAN, JOSÉ SIDNEI COLOMBO MARTINI
- BT/PCS/9801 - Conexões Virtuais em Redes ATM e Escalabilidade de Sistemas de Transmissão de Dados sem Conexão - WAGNER LUIZ ZUCCHI, WILSON VICENTE RUGGIERO
- BT/PCS/9802 - Estudo Comparativo dos Sistemas da Qualidade - EDISON SPINA, MOACYR MARTUCCI JR.
- BT/PCS/9803 - The VIBRA Multi-Agent Architecture: Integrating Purposive Vision With Deliberative and Reactive Planning - REINALDO A. C. BIANCHI, ANNA H. REALI C. RILLO, LELIANE N. BARROS
- BT/PCS/9901 - Metodologia ODP para o Desenvolvimento de Sistemas Abertos de Automação - JORGE LUIS RISCO BECCERRA, MOACYR MARTUCCI JUNIOR
- BT/PCS/9902 - Especificação de Um Modelo de Dados Bitemporal Orientado a Objetos - SOLANGE NICE ALVES DE SOUZA, EDIT GRASSIANI LINO DE CAMPOS
- BT/PCS/9903 - Implementação Paralela Distribuída da Dissecção Cartesiana Aninhada - HILTON GARCIA FERNANDES, LIRIA MATSUMOTO SATO
- BT/PCS/9904 - Metodologia para Especificação e Implementação de Solução de Gerenciamento - SERGIO CLEMENTE, TEREZA CRISTINA MELO DE BRITO CARVALHO
- BT/PCS/9905 - Modelagem de Ferramenta Hipermídia Aberta para a Produção de Tutoriais Interativos - LEILA HYODO, ROMERO TORI
- BT/PCS/9906 - Métodos de Aplicações da Lógica Paraconsistente Anotada de Anotação com Dois Valores-LPA2v com Construção de Algoritmo e Implementação de Circuitos Eletrônicos - JOÃO I. DA SILVA FILHO, JAIR MINORO ABE